

УДК 519.688

doi 10.26089/NumMet.v20r103

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ**В. А. Вшивков¹, Л. В. Вшивкова², Г. И. Дудникова³**

При исследовании механизмов генерации электромагнитного излучения, наблюдаемого в лабораторных экспериментах по взаимодействию релятивистских электронных пучков с плазмой, возникает проблема определения структуры, спектральных характеристик и мощности излучаемых электромагнитных волн. Так, при численном решении уравнений Максвелла возникает потребность в разработке точных, эффективных и надежных методов реализации открытых граничных условий, позволяющих электромагнитным волнам выходить из расчетной области без отражения. Распространение волн в вакууме описывается линейными уравнениями Максвелла, и, следовательно, можно легко найти частоты и амплитуды проходящих и отраженных волн с помощью анализа Фурье и определить их структуру. Для изучения этого вопроса достаточно рассмотреть задачу в двумерном случае. Целью настоящей работы является разработка методики определения направлений и амплитуд всех электромагнитных волн в вакууме, которые находятся в вычислительной области в определенный момент времени.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, электромагнитные волны в вакууме, преобразование Фурье.

1. Введение. Взаимодействие высокоскоростных потоков плазмы сопровождается генерацией электромагнитных волн, которые могут менять амплитуду и направление распространения в плазменной среде. При численном моделировании этих процессов спектральные характеристики генерируемых электромагнитных полей трудно определить, поскольку их самосогласованное взаимодействие с плазмой носит существенно нелинейный характер.

Для решения данной проблемы в ряде работ предлагается окружить плазму вакуумной областью, в которой исследуется генерируемое в плазме электромагнитное излучение [1, 2]. Главная сложность такого подхода состоит в корректной реализации граничных условий для электромагнитных полей с целью уменьшения ошибок, которые связаны с отражениями волн от границы вычислительной области. В работах [3–5] указанная проблема решается путем введения дополнительного поглощающего слоя на границах расчетной области, в котором значения электромагнитного поля на каждом временном шаге умножаются на коэффициент $k < 1$, зависящий от расстояния до границы. В частности, в [5] впервые был исследован новый механизм генерации электромагнитных волн, основанный на прямом столкновении плазменных волн, генерируемых в процессе распространения встречных электронных пучков различных сечений в плазме. В работе [6] рассмотрено применение метода PML (Perfectly Matched Layer) [7] для поглощающих граничных условий, основанного на создании дополнительных слоев, которые окружают расчетную область и в которых в обязательном порядке вводятся электрические и магнитные потери. Эффективность метода иллюстрируется сравнением с точным решением, но возникающие искажения электромагнитных волн недостаточно исследованы. В [8] рассматривается алгоритм включения радиационного излучения при моделировании методом частиц в ячейках, но в качестве характеристики излучения рассматривается только плотность электромагнитной энергии. Поглощающие граничные условия ABC (Absorbing Boundary Condition), предложенные в работе [9] и получившие название условий Мура, являются простыми в реализации, но не всегда могут обеспечить высокую степень поглощения и не позволяют определить вклад каждой из компонент электромагнитного поля в общем балансе полной энергии исследуемой системы.

Существующая необходимость более тщательного изучения характеристик генерируемых в плазменных процессах электромагнитных волн связана в настоящее время с возможностью проводить длительные вычисления с использованием схем высокого порядка на вычислительных комплексах современной архитектуры. В настоящей статье предложен алгоритм, позволяющий определить направления и амплитуды всех электромагнитных волн, распространяющихся в рассматриваемой вакуумной области.

¹ Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиМГ СО РАН), просп. Лаврентьева, д. 6, 630090, Новосибирск; главный науч. сотр., e-mail: vsh@ssd.sccc.ru

² Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиМГ СО РАН), просп. Лаврентьева, д. 6, 630090, Новосибирск; ученый секретарь, e-mail: lyudmila.vshivkova@parbz.sccc.ru

³ Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиМГ СО РАН), просп. Лаврентьева, д. 6, 630090, Новосибирск; главный науч. сотр., e-mail: gdudnikova@gmail.com

2. Постановка задачи. При исследовании механизмов генерации терагерцевого излучения, наблюдаемого в лабораторных экспериментах по взаимодействию релятивистских электронных пучков с плазмой [1], возникает проблема определения структуры, спектральных характеристик и мощности излучаемых электромагнитных волн. Нелинейные механизмы генерации обусловлены турбулентными процессами в пучково-плазменной системе, что затрудняет проведение анализа формирующихся высокочастотных полей в плазме. Будем считать, что возникающее при распространении электронного пучка в плазме электромагнитное излучение выходит в вакуумную область, и рассмотрим алгоритм, позволяющий определить характеристики генерируемых электромагнитных волн. Электромагнитные волны, распространяющиеся в вакууме со скоростью света c , подчиняются линейным уравнениям Максвелла и распадаются на не взаимодействующие друг с другом волны различной частоты и амплитуды. В численных расчетах с помощью анализа Фурье можно легко определить частоты и амплитуды всех 6 компонент электромагнитного поля. К сожалению, все волны перемешаны и найти характеристики отдельных волн невозможно. Более того, две волны, имеющие одинаковые волновые числа, но движущиеся в противоположных направлениях, невозможно разделить с помощью анализа Фурье.

Рассмотрим задачу распространения электромагнитных волн в вакууме. Исходная система уравнений Максвелла имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E},$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} — векторы напряженностей электрического и магнитного полей. Здесь и далее все уравнения записаны в безразмерном виде. В качестве нормировок используются скорость света c , время t_0 , длина $L_0 = ct_0$ и напряженность электрического поля E_0 . Данная система в двумерном случае разбивается на две подсистемы, независимые друг от друга. Считая, что все функции зависят от времени t и координат x и y , получим

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial B_z}{\partial x}. \quad (2)$$

Для решения систем уравнений (1) и (2) численными методами в области решения

$$0 \leq x < L_x, \quad 0 \leq y < L_y, \quad t \geq 0$$

вводится равномерная прямоугольная сетка с узлами (x_i, y_k, t^m) , где $x_i = ih_x$, $y_k = kh_y$, $t^m = m\tau$, h_x, h_y — шаги сетки в направлениях x и y соответственно, τ — временной шаг, i, k — номера узлов. Аппроксимируя систему уравнений (1), получаем схему

$$\begin{aligned} \frac{(BX)_{i-1/2,k}^{m+1/2} - (BX)_{i-1/2,k}^{m-1/2}}{\tau} &= -\frac{(EZ)_{i-1/2,k+1/2}^m - (EZ)_{i-1/2,k-1/2}^m}{h_y}, \\ \frac{(BY)_{i,k-1/2}^{m+1/2} - (BY)_{i,k-1/2}^{m-1/2}}{\tau} &= -\frac{(EZ)_{i+1/2,k-1/2}^m - (EZ)_{i-1/2,k-1/2}^m}{h_x}, \\ \frac{(EZ)_{i-1/2,k-1/2}^m - (EZ)_{i-1/2,k-1/2}^{m-1}}{\tau} &= \frac{(BY)_{i,k-1/2}^{m-1/2} - (BY)_{i-1,k-1/2}^{m-1/2}}{h_x} - \frac{(BX)_{i-1/2,k}^{m-1/2} - (BX)_{i-1/2,k-1}^{m-1/2}}{h_y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогичная схема получается для системы уравнений (2). Схема (3) известна как схема FDTD (Finite Difference Time Domain) [10] и имеет второй порядок аппроксимации по всем направлениям. В процессе решения какой-либо задачи в любой момент времени мы имеем определенные на выбранной сетке функции E_x, E_y, E_z, B_x, B_y и B_z . Нашей целью является найти по известным сеточным полям тип и направление распространения электромагнитных волн. Сначала рассмотрим волны, связанные с первой подсистемой. Произвольная волна, удовлетворяющая системе (1), может быть записана в виде

$$\begin{cases} E_z = \omega A \sin(-\omega t + k_x x + k_y y + \varphi_0), \\ B_x = k_y A \sin(-\omega t + k_x x + k_y y + \varphi_0), \\ B_y = -k_x A \sin(-\omega t + k_x x + k_y y + \varphi_0), \end{cases} \quad (4)$$

где A — амплитуда волны, ω — частота волны, k_x и k_y — компоненты волнового вектора, φ_0 — сдвиг фаз волны в пространстве. Компоненты волнового вектора связаны с частотой формулой

$$\omega^2 = k_x^2 + k_y^2,$$

что позволяет ввести угол α наклона волнового вектора к оси x :

$$k_x = \omega \cos \alpha, \quad k_y = \omega \sin \alpha. \quad (5)$$

В случае, когда область решения ограничена

$$0 \leq x < L_x, \quad 0 \leq y < L_y,$$

компоненты волнового вектора могут принимать счетное количество значений

$$k_x = N_x \frac{2\pi}{L_x}, \quad k_y = N_y \frac{2\pi}{L_y},$$

где N_x, N_y — натуральные числа.

Любая функция в двумерном случае может быть представлена в виде двойного ряда Фурье

$$\sum_{N_x=0}^{\infty} \sum_{N_y=0}^{\infty} [R_{1,N_x,N_y} \cos(k_x x) \cos(k_y y) + R_{2,N_x,N_y} \cos(k_x x) \sin(k_y y) + \\ + R_{3,N_x,N_y} \sin(k_x x) \cos(k_y y) + R_{4,N_x,N_y} \sin(k_x x) \sin(k_y y)],$$

где коэффициенты R вычисляются по формулам Эйлера–Фурье [11].

Задача состоит в том, чтобы в любой момент времени t , зная значения функций E_x, E_y, E_z, B_x, B_y и B_z , определить, какие волны присутствуют в области решения, т.е. для каждого k_x, k_y найти амплитуду волны, соответствующей этому волновому вектору. Поскольку все волны линейно независимы, рассмотрим далее только волны, имеющие одинаковые $|k_x|$ и $|k_y|$.

Двумерный анализ Фурье для функций E_z, B_x, B_y дает амплитуды всех гармоник. Однако это разложение смешивает 4 волны, которые имеют одинаковые $|k_x|$ и $|k_y|$, но при этом имеют разные направления движения. Например, для функции E_z будут смешиваться следующие 4 волны, имеющие разные амплитуды и сдвиги фаз:

$$E_z^{(1)} = \omega A_1 \sin(k_x x + k_y y + \varphi_1), \quad E_z^{(2)} = \omega A_2 \sin(k_x x - k_y y + \varphi_2), \\ E_z^{(3)} = \omega A_3 \sin(-k_x x + k_y y + \varphi_3), \quad E_z^{(4)} = \omega A_4 \sin(-k_x x - k_y y + \varphi_4). \quad (6)$$

Поскольку анализ функций ведется в фиксированный момент времени, здесь к сдвигу фаз φ добавлено $-\omega t$ (см. формулы (4)).

Таким образом, смесь четырех волн, упомянутых выше, имеет вид

$$E_z = E_z^{(1)} + E_z^{(2)} + E_z^{(3)} + E_z^{(4)}. \quad (7)$$

Преобразование Фурье функции E_z дает 4 коэффициента для гармоник

$$\sin(k_x x) \sin(k_y y), \quad \sin(k_x x) \cos(k_y y), \quad \cos(k_x x) \sin(k_y y), \quad \cos(k_x x) \cos(k_y y).$$

Разложение B_x и B_y дает еще 8 ненулевых коэффициентов разложения. Неизвестными являются амплитуды A_1, A_2, A_3, A_4 и углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ в формулах (6). Необходимо показать, что задача разрешима и имеет единственное решение, и найти это решение. Введем следующие обозначения:

$$p_i = \omega A_i \sin(\varphi_i), \quad q_i = \omega A_i \cos(\varphi_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Запишем разложения всех функций $E_z^{(i)}$:

$$E_z^{(1)} = p_1 \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) + q_1 \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) + q_1 \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) - p_1 \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y), \\ E_z^{(2)} = p_2 \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) - q_2 \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) + q_2 \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) + p_2 \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y), \\ E_z^{(3)} = p_3 \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) + q_3 \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) - q_3 \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) + p_3 \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y), \\ E_z^{(4)} = p_4 \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) - q_4 \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) - q_4 \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) - p_4 \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y).$$

Подставляя эти разложения в равенство (7), получаем

$$\begin{aligned} E_z &= R_1 \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) + R_2 \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) + \\ &+ R_3 \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) + R_4 \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y) = \sum E_z^{(i)} = \\ &= (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) + (q_1 - q_2 + q_3 - q_4) \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) + \\ &+ (q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) + (-p_1 + p_2 + p_3 - p_4) \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y), \end{aligned}$$

где R_1, R_2, R_3, R_4 — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции E_z . В результате получаем систему из четырех уравнений

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= R_1, & -p_1 + p_2 + p_3 - p_4 &= R_4, \\ q_1 - q_2 + q_3 - q_4 &= R_2, & q_1 + q_2 - q_3 - q_4 &= R_3. \end{aligned}$$

Решение данной системы дает следующие равенства

$$\begin{aligned} p_2 + p_3 &= \frac{1}{2} (R_1 + R_4), & p_1 + p_4 &= \frac{1}{2} (R_1 - R_4), \\ q_1 - q_4 &= \frac{1}{2} (R_2 + R_3), & q_2 - q_3 &= \frac{1}{2} (R_3 - R_2), \end{aligned} \quad (8)$$

которых недостаточно для определения коэффициентов p_i и q_i . Для однозначного определения неизвестных p_i, q_i необходимо использовать коэффициенты разложения функций B_x и B_y .

Рассмотрим функцию B_x . Аналогично функции E_z , представим ее как сумму четырех функций, имеющих одинаковые $|k_x|$ и $|k_y|$:

$$B_x = B_x^{(1)} + B_x^{(2)} + B_x^{(3)} + B_x^{(4)},$$

где

$$\begin{aligned} B_x^{(1)} &= k_y A_1 \sin(k_x x + k_y y + \varphi_1), & B_x^{(2)} &= -k_y A_2 \sin(k_x x - k_y y + \varphi_2), \\ B_x^{(3)} &= k_y A_3 \sin(-k_x x + k_y y + \varphi_3), & B_x^{(4)} &= -k_y A_4 \sin(-k_x x - k_y y + \varphi_4). \end{aligned}$$

Разложение функций $B_x^{(i)}$ дает следующие равенства:

$$\begin{aligned} B_x^{(1)} &= \sin \alpha [p_1 \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) + q_1 \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) + \\ &+ q_1 \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) - p_1 \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y)], \\ B_x^{(2)} &= \sin \alpha [-p_2 \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) + q_2 \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) - \\ &- q_2 \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) - p_2 \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y)], \\ B_x^{(3)} &= \sin \alpha [p_3 \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) + q_3 \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) - \\ &- q_3 \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) + p_3 \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y)], \\ B_x^{(4)} &= \sin \alpha [-p_4 \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) + q_4 \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) + \\ &+ q_4 \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) + p_4 \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y)], \end{aligned}$$

где α — угол наклона волнового вектора к оси x (см. (5)). В результате суммирования этих функций получим

$$\begin{aligned} \sum B_x^{(i)} &= \sin \alpha \cdot (p_1 - p_2 + p_3 - p_4) \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) + \sin \alpha \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) + \\ &+ \sin \alpha \cdot (q_1 - q_2 - q_3 + q_4) \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) + \sin \alpha \cdot (-p_1 - p_2 + p_3 + p_4) \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y) = \\ &= B_x = U_1 \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y) + U_2 \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) + U_3 \cdot \sin(k_x x) \cos(k_y y) + U_4 \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y), \end{aligned}$$

где U_1, U_2, U_3, U_4 — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции B_x . Здесь мы снова получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 + p_3 - p_4 &= U_1 / \sin \alpha, & -p_1 - p_2 + p_3 + p_4 &= U_4 / \sin \alpha, \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 &= U_2 / \sin \alpha, & q_1 - q_2 - q_3 + q_4 &= U_3 / \sin \alpha, \end{aligned}$$

которая дает решение

$$\begin{aligned} p_3 - p_2 &= (U_1 + U_4)/(2 \sin \alpha), & p_1 - p_4 &= (U_1 - U_4)/(2 \sin \alpha), \\ q_1 + q_4 &= (U_2 + U_3)/(2 \sin \alpha), & q_2 + q_3 &= (U_2 - U_3)/(2 \sin \alpha). \end{aligned}$$

Решая эти уравнения совместно с системой (8), получаем значения всех коэффициентов p_i и q_i :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{4} \left(R_1 - R_4 + \frac{U_1 - U_4}{\sin \alpha} \right), & p_2 &= \frac{1}{4} \left(R_1 + R_4 - \frac{U_1 + U_4}{\sin \alpha} \right), \\ p_3 &= \frac{1}{4} \left(R_1 + R_4 + \frac{U_1 + U_4}{\sin \alpha} \right), & p_4 &= \frac{1}{4} \left(R_1 - R_4 - \frac{U_1 - U_4}{\sin \alpha} \right), \\ q_1 &= \frac{1}{4} \left(R_2 + R_3 + \frac{U_2 + U_3}{\sin \alpha} \right), & q_2 &= \frac{1}{4} \left(R_3 - R_2 + \frac{U_2 - U_3}{\sin \alpha} \right), \\ q_3 &= \frac{1}{4} \left(R_2 - R_3 + \frac{U_2 - U_3}{\sin \alpha} \right), & q_4 &= \frac{1}{4} \left(-R_2 - R_3 + \frac{U_2 + U_3}{\sin \alpha} \right). \end{aligned}$$

Зная все p_i и q_i , можно найти амплитуды всех волн, имеющих одинаковые значения $|k_x|$ и $|k_y|$:

$$A_i = \frac{1}{\omega} \sqrt{p_i^2 + q_i^2}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Сдвиг фаз определяется по формулам

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{p_i}{q_i}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Подобным образом производится разложение в ряд Фурье функции B_y . Поскольку амплитуды волн должны определяться однозначно, использование функции B_y вместо B_x приводит к тому же результату, но формулы для определения коэффициентов p_i и q_i изменяются:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{4} \left(R_1 - R_4 + \frac{V_4 - V_1}{\cos \alpha} \right), & p_2 &= \frac{1}{4} \left(R_1 + R_4 - \frac{V_1 + V_4}{\cos \alpha} \right), \\ p_3 &= \frac{1}{4} \left(R_1 + R_4 + \frac{V_1 + V_4}{\cos \alpha} \right), & p_4 &= \frac{1}{4} \left(R_1 - R_4 + \frac{V_1 - V_4}{\cos \alpha} \right), \\ q_1 &= \frac{1}{4} \left(R_2 + R_3 - \frac{V_2 + V_3}{\cos \alpha} \right), & q_2 &= \frac{1}{4} \left(R_3 - R_2 + \frac{V_2 - V_3}{\cos \alpha} \right), \\ q_3 &= \frac{1}{4} \left(R_2 - R_3 + \frac{V_2 - V_3}{\cos \alpha} \right), & q_4 &= \frac{1}{4} \left(-R_2 - R_3 - \frac{V_2 + V_3}{\cos \alpha} \right), \end{aligned}$$

где V_1, V_2, V_3, V_4 — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции B_y . Когда угол $\alpha = 0$ или близок к нулю, эти формулы более предпочтительны, так как в знаменателе находится $\cos \alpha$.

3. Пример реализации алгоритма. Рассмотрим применение алгоритма при решении тестовой задачи распространения электромагнитного импульса в вакууме в следующей постановке. В начальный момент времени в вакуумную расчетную область

$$0 \leq x < 8, \quad 0 \leq y < 15$$

через левую границу $x = 0$ входит электромагнитный импульс, имеющий круговую поляризацию

$$\begin{aligned} E_z = -B_y &= A \exp \left[- \left(\frac{x - x_0 - t}{r_x} \right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{r_y} \right)^2 \right] \sin [2\pi(t - x)], \\ E_y = B_z &= A \exp \left[- \left(\frac{x - x_0 - t}{r_x} \right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{r_y} \right)^2 \right] \cos [2\pi(t - x)], \end{aligned} \tag{9}$$

размеры $r_x = r_y = 4$ и амплитуду $A = 1.5$. Импульс проходит расчетную область и затем выходит из области. Уравнения (1), (2) решаются на прямоугольной равномерной сетке с использованием схемы FDTD [10] с шагами $h_x = h_y = 0.05$ и временным шагом $\tau = 0.005$. На границах $y = 0$ и $y = 15$

ставятся периодические граничные условия. На границе $x = 0$ в соответствии с формулами (9) задаются функции E_y , E_z , B_y , B_z и $E_x = B_x = 0$, а на границе $x = 8$ — неотражающие граничные условия Мура первого порядка [9]. Пространственное распределение плотности энергии электромагнитного поля $W = B^2 + E^2$, представленное на рис. 1, соответствует моменту времени $t = 13$, когда электромагнитный импульс полностью вошел в расчетную область.

Зависимость полной энергии электромагнитного поля от времени, позволяющая проследить динамику входа ($6 < t < 9$), движения ($9 < t < 16$) и выхода $t > 16$ электромагнитного импульса через границу $x = 8$, представлена на рис. 2.

Хотя к моменту времени $t = 19$ электромагнитный импульс практически полностью вышел из области, 0.6% полной энергии импульса остается внутри (пунктирной линией на графике показана зависимость энергии от времени, которая соответствует случаю полного отсутствия отражения от границы). На рис. 3 представлено распределение амплитуд электромагнитных волн A в пространстве номеров волновых чисел N_x , N_y для системы уравнений (1) в момент времени $t = 25$, наглядно демонстрирующее наличие электромагнитного поля внутри расчетной области после прохождения импульса (для системы уравнений (2) картина аналогична).

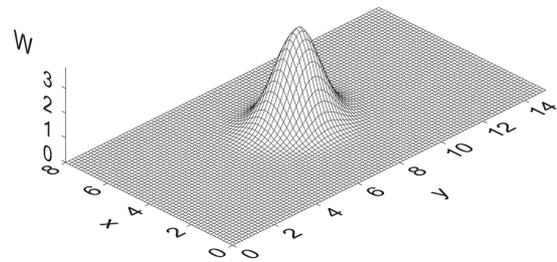


Рис. 1. Плотность энергии электромагнитных волн

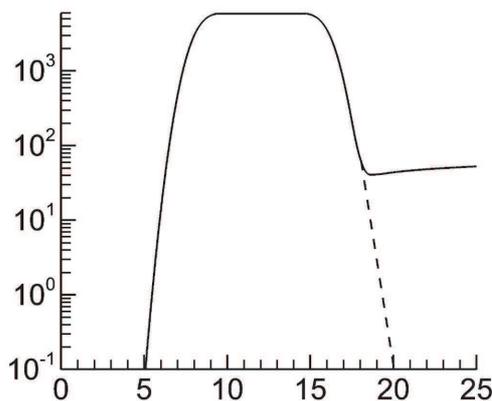


Рис. 2. Полная энергия электромагнитного поля

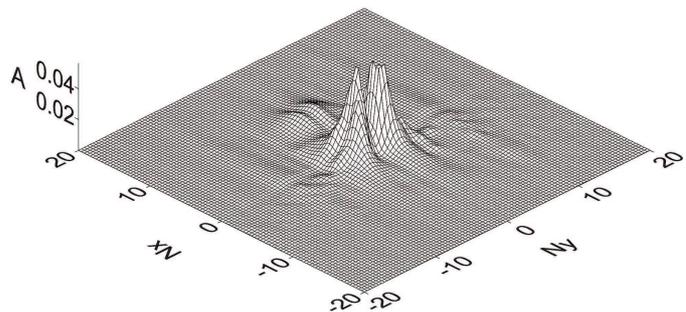


Рис. 3. Амплитуды волн в момент времени $t = 25$

4. Заключение. В настоящей статье рассмотрен метод вычисления амплитуд волн для двумерных сеточных величин электромагнитных полей в вакууме и приведен пример его применения для анализа решения тестовой задачи. Метод позволяет по имеющимся значениям электрических и магнитных полей в некоторый момент времени определить амплитуды и фазовые сдвиги для всех волн, в том числе разделить волны, имеющие одинаковые волновые векторы, но распространяющиеся в противоположных направлениях.

Работа выполнена в рамках темы 0315-2016-0009 ИВМиМГ СО РАН и проектов РФФИ 16-01-00209 и 16-07-00916.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Timofeev I.V., Annenkov V.V., Volchok E.P.* Generation of high-field narrowband terahertz radiation by counterpropagating plasma wakefields // *Physics of Plasmas*. 2017. **24**. doi 10.1063/1.4993100.
2. *Berendeev E.A., Dudnikova G.I., Efimova A.A.* PIC-simulation of the electron beam interaction with modulated density plasma // *AIP Conference Proceedings*. 2017. **1895**. doi 10.1063/1.5007419.
3. *Berendeev E., Dudnikova G., Efimova A., Vshivkov V.* A simple absorbing layer for EM-radiation from a beam-plasma interaction system // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2018. **41**, N 18. 9276–9282.
4. *Timofeev I.V., Berendeev E.A., Dudnikova G.I.* Simulations of a beam-driven plasma antenna in the regime of plasma transparency // *Physics of Plasmas*. 2017. **24**, N 9. doi 10.1063/1.4995323.

5. *Annenkov V.V., Berendeev E.A., Timofeev I.V., Volchok E.P.* High-power terahertz emission from a plasma penetrated by counterstreaming different-size electron beams // *Physics of Plasmas*. 2018. **25**. doi 10.1063/1.5048245.
6. *Abarbanel S., Gottlieb D., Hesthaven J.S.* Long time behavior of the perfectly matched layer equations in computational electromagnetics // *Journal of Scientific Computing*. 2002. **17**, N 1–4. 405–422.
7. *Berenger J.-P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *Journal of Computational Physics*. 1994. **114**, N 2. 185–200.
8. *Vranic M., Martins J.L., Fonseca R.A., Silva L.O.* Classical radiation reaction in particle-in-cell simulations // *Computer Physics Communications*. 2016. **204**. 141–151.
9. *Mur G.* Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations // *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*. 1981. **EMC-23**, N 4. 377–382.
10. *Taflove A., Hagness S.C.* *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*. Boston: Artech House, 2005.
11. *Korn G.A., Korn T.M.* *Mathematical handbook for scientists and engineers*. New York: McGraw-Hill, 1961.

Поступила в редакцию
28.12.2018

An Algorithm to Identify the Structure of Electromagnetic Fields

V. A. Vshivkov¹, L. V. Vshivkova², and G. I. Dudnikova³

¹ *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, Principal Scientist, e-mail: vsh@ssd.sccc.ru*

² *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Scientific Secretary, e-mail: lyudmila.vshivkova@parbz.sccc.ru*

³ *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Principal Scientist, e-mail: gdudnikova@gmail.com*

Received December 28, 2018

Abstract: In the study of generation mechanisms of electromagnetic radiation observed in laboratory experiments on the interaction of relativistic electron beams with plasma, the problem of determining the structure, spectral characteristics, and power of the emitted electromagnetic waves arises. So, in the numerical solution of Maxwell’s equations, there is a need to develop accurate, efficient, and reliable methods for implementing open boundary conditions that allow electromagnetic waves to exit the computational domain without reflection. The linear Maxwell’s equations describe the propagation of electromagnetic waves in vacuum and, therefore, it is possible to easily find the frequencies and amplitudes of passing and reflected waves using the Fourier analysis and to determine their structure. In order to study this question, it is sufficient to consider the problem in the two-dimensional case. The aim of this paper is to develop a method of determining the directions and amplitudes of all electromagnetic waves in a vacuum that are in the computational domain at a certain instant of time.

Keywords: Maxwell’s equations, electromagnetic waves, Fourier transform.

References

1. I. V. Timofeev, V. V. Annenkov, and E. P. Volchok, “Generation of High-Field Narrowband Terahertz Radiation by Counterpropagating Plasma Wakefields,” *Phys. Plasmas* **24** (2017). doi 10.1063/1.4993100
2. E. A. Berendeev, G. I. Dudnikova, and A. A. Efimova, “PIC-Simulation of the Electron Beam Interaction with Modulated Density Plasma,” *AIP Conf. Proc.* **1895** (2017). doi 10.1063/1.5007419
3. E. Berendeev, G. Dudnikova, A. Efimova, and V. Vshivkov, “A Simple Absorbing Layer for EM-Radiation from a Beam-Plasma Interaction System,” *Math. Meth. Appl. Sci.* **41** (18), 9276–9282 (2018).
4. I. V. Timofeev, E. A. Berendeev, and G. I. Dudnikova, “Simulations of a Beam-Driven Plasma Antenna in the Regime of Plasma Transparency,” *Phys. Plasmas* **24** (2017). doi 10.1063/1.4995323

5. V. V. Annenkov, E. A. Berendeev, I. V. Timofeev, and E. P. Volchok, "High-Power Terahertz Emission from a Plasma Penetrated by Counterstreaming Different-Size Electron Beams," *Phys. Plasmas* **25** (2018). doi 10.1063/1.5048245
6. S. Abarbanel, D. Gottlieb, and J. S. Hesthaven, "Long Time Behavior of the Perfectly Matched Layer Equations in Computational Electromagnetics," *J. Sci. Comput.* **17** (1–4), 405–422 (2002).
7. J.-P. Berenger, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves," *J. Comput. Phys.* **114** (2), 185–200 (1994).
8. M. Vranic, J. L. Martins, R. A. Fonseca, L. O. Silva, "Classical Radiation Reaction in Particle-in-Cell Simulations," *Comput. Phys. Commun.* **204**, 141–151 (2016).
9. G. Mur, "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **EMC-23** (4), 377–382 (1981).
10. A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method* (Artech House, Boston, 2005).
11. G. A. Korn and T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers* (McGraw Hill, New York, 1961).