

УДК 519.64

doi 10.26089/NumMet.v20r101

***p*-ВЕРСИЯ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ РЕШЕНИЯ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА
В СРЕДЕ МАТХЕМАТИСА**

В. П. Шапеев^{1,2}, Е. В. Ворожцов³

Предложена и реализована p -версия метода коллокации численного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В данной реализации осуществлены возможности варьирования степени полинома в полиномиальном представлении приближенного решения уравнений и варьирования количества узлов используемой квадратурной формулы Гаусса для влияния на точность решения. Исследовано влияние числа точек коллокации, использованных для аппроксимации решения, и количества узлов квадратурной формулы Гаусса на число обусловленности системы линейных алгебраических уравнений, к решению которой сводится построение приближенного решения, и на его точность путем численного решения примеров, в том числе приведенных в известных изданиях. Предложенный алгоритм реализован на языке программного пакета *Mathematica*. Во всех рассмотренных примерах предложенная версия метода коллокации позволила достичь точности решения уравнений, близкой к уровню машинных ошибок округления. Программный продукт, реализующий предложенную p -версию, получился достаточно компактным, а метод оказался экономичным: машинное время, необходимое для решения рассмотренных в работе задач, не превышало 3 секунды работы персонального компьютера. Описан алгоритм, позволяющий оценить точность приближенного решения по предложенной p -версии метода в тех случаях, когда точное решение интегрального уравнения неизвестно.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма второго рода, метод коллокации, число обусловленности, квадратура Гаусса.

1. Введение. В настоящее время интегральные уравнения получили широкое распространение при математическом описании многих сложных явлений в физике, гидромеханике, биологии, социологии, экономике. Например, известные законы сохранения массы, импульса и энергии имеют интегральную формулировку и описывают конкретные процессы и явления [1]. Другими примерами успешного применения интегральных уравнений являются многие задачи электродинамики [2, 3], компьютерной томографии [4], сейсморазведки [5, 6], обработки изображений [7].

Традиционными приближенными методами, применяемыми, главным образом, при решении интегральных уравнений второго рода, являются методы квадратур, итераций, резольвенты, вырожденных ядер, коллокации, преобразования Фурье и некоторые другие [8]. Для решения уравнений первого рода является эффективным метод регуляризации Тихонова [4], метод “погружения” Бакушинского, метод фильтрации Калмана и ряд других [8]. Методы решения интегральных уравнений различаются между собой, прежде всего, способом аппроксимации искомого решения и соответствующим ему способом дискретизации — переходом от бесконечномерного функционального пространства, в котором находится точное решение уравнения, к конечномерному функциональному пространству, в котором ищется его приближение (аппроксимант).

Метод коллокации используется на практике, прежде всего, для решения обыкновенных дифференциальных [9, 10] и одномерных интегральных уравнений. На его основе создан пакет COLSYS для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [11], который до сих пор является хорошим инструментом для решения с высокой точностью дифференциальных уравнений и используется для решения прикладных задач. Достоинством метода коллокации является его простота. В частности, в нем есть воз-

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; главный науч. сотр., e-mail: Shapeev@itam.nsc.ru

² Новосибирский национальный исследовательский университет, механико-математический факультет, ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск; профессор, e-mail: vshapeev@ngs.ru

³ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; ведущий науч. сотр., e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

возможность при решении многомерной краевой задачи в нерегулярной области записать краевые условия для приближенной задачи непосредственно в точках, расположенных на границе области [12].

Это обстоятельство очень важно в целях достижения высокой точности решения. Недостатком метода коллокации является то, что при решении плохо обусловленных задач, например для уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса, возникает необходимость решать плохо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Чем подробнее используемая дискретизация (в сеточных методах — чем мельче шаг сетки), тем больше размер соответствующей СЛАУ и хуже ее обусловленность. Поэтому зачастую этим методом на компьютере не удается построить сходящееся решение. Возможности численного решения таких задач существенно расширяются при комбинировании метода коллокации и наименьших квадратов. Это показано в [12–16] и в целом ряде других работ.

Возможности метода коллокации также можно расширить, используя “бессеточный” вариант — p -версию метода, в которой в отличие от (сеточной) h -версии вся область численного решения задачи состоит из одного интервала или одной ячейки, как в спектральном методе. Поэтому нередко такие варианты методов называют также псевдоспектральными. В p -версии метода коллокации достаточно просто реализуется высокая точность аппроксимации путем увеличения числа базисных элементов используемого функционального пространства. В случае решения интегральных уравнений точность аппроксимации решения, зависящая от малости погрешности применяемой квадратурной формулы, также повышается за счет применения высокоточных квадратурных формул, например формул Гаусса. Ниже будет показано, что оба указанных здесь фактора легко реализуются в компактной программе на компьютере. Как правило, при решении дифференциальных и интегральных уравнений численными методами с ростом размера СЛАУ, которые возникают в результате дискретизации исходной задачи, растет их обусловленность. Здесь существенно то, что с увеличением числа базисных элементов и узлов квадратурной формулы размер соответствующей СЛАУ приближенной задачи растет относительно медленнее, чем в сеточном варианте метода коллокации, т.е. в его h -версии при мельчении шага сетки. Это свойство p -версии можно эффективно использовать.

В настоящей статье описывается реализация p -версии метода коллокаций для численного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода в среде системы *Mathematica* [17]. В этой версии в случае использования полиномиальных пространств решение ищется в виде полинома достаточно высокой степени. Показано на примерах, что предлагаемым численным методом можно получать численное решение задач также с погрешностью, близкой к погрешности арифметических операций на компьютере.

Метод был реализован в программе, написанной на языке пакета *Mathematica*. В p -версии алгоритма весь расчетный интервал представлял собой “одну ячейку” расчетной сетки, в которой решение искалось в виде полинома достаточно высокой степени.

Известно, что в случае аппроксимации гладких кривых полиномами расположение узлов аппроксимации в корнях ортогональных полиномов (Чебышева, Лежандра и других) зачастую дает заметно меньшую погрешность, чем в случае равномерного расположения узлов (точек коллокации). В этой связи в разработанной *Mathematica*-программе при вычислении интеграла, входящего в интегральное уравнение, применялась квадратурная формула Гаусса с 6–45 узлами, которая использует в качестве узлов корни полиномов Лежандра. Кроме того, точки коллокации также задавались в корнях полиномов Лежандра степени, зависящей от степени полинома, аппроксимирующего решение.

Соответствующая программа на языке системы *Mathematica* получилась достаточно компактной также благодаря тому, что в этой системе имеются такие удобные функции, как функция решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), функция вычисления всех собственных значений матрицы и многие другие полезные при реализации численных методов функции. В программе заложены возможности варьирования числа базисных элементов в полиномиальном пространстве, в котором строится приближенное решение, и варьирования числа узлов применяемой квадратурной формулы Гаусса.

Результаты численных экспериментов с p -версией алгоритма приведены ниже в таблицах и на графиках, из анализа которых можно судить о возможностях предлагаемого метода. Для понимания поведения погрешности решения в зависимости от обусловленности СЛАУ, к решению которой сводится решение заданного уравнения, в таблицы включен столбец, в котором приводится значение числа обусловленности.

2. Описание p -версии коллокационного метода для численного решения интегрального уравнения. Рассматривается следующее уравнение Фредгольма второго рода:

$$g(x)u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)u(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1)$$

Функции $K(x, s)$, $f(x)$, $g(x)$, параметр λ и интервал $[a, b]$ предполагаются заданными. Кроме того, предполагается, что $-\infty < a < b < \infty$. Опишем p -версию алгоритма решения уравнения (1) коллокационным методом. Пусть x_c — середина интервала $[a, b]$, т.е. $x_c = (a + b)/2$, и пусть $h = (b - a)/2$. Удобно ввести, по аналогии с [13, 14], новую независимую переменную y по формуле $y = (x - x_c)/h$. Очевидно, $y \in [-1, 1]$ при $x \in [a, b]$. Пусть $U(y) = u(x_c + hy)$. Сделаем в (1) замену $x = x_c + hy$. В результате уравнение (1) примет вид

$$g(x_c + hy)U(y) - \lambda h \int_{-1}^1 K(x_c + hy, x_c + h\xi)U(\xi) d\xi = F(y), \quad y \in [-1, 1], \tag{2}$$

где $F(y) = f(x_c + hy)$.

Приближенное решение уравнения (2) ищется на интервале $-1 \leq y \leq 1$ в виде многочлена

$$U(y) = \sum_{k=1}^n b_k y^{k-1}, \tag{3}$$



Рис. 1. Положения точек коллокации

где b_k — неизвестные коэффициенты, n — заданное число степеней свободы. Предполагается, что степень этого многочлена $N_p = n - 1 > 0$. Подставляя выражение (3) в (2), получим алгебраическое уравнение (уравнение коллокации), в которое входят n неизвестных коэффициентов b_1, \dots, b_n . Чтобы найти эти коэффициенты, зададим $N_c = n$ точек коллокации y_j на интервале $[-1, 1]$, $j = 1, \dots, N_c$.

В случае использования корней полинома Лежандра в качестве точек коллокации здесь сначала задаются две точки коллокации на границах $y = -1$ и $y = 1$, а остальные $N_c - 2$ точек коллокации находятся как корни многочлена Лежандра степени $N_c - 2$. Возможно также задание точек коллокации в узлах равномерной сетки $y_j = -1 + 2(j - 1)/(N_c - 1)$, $j = 1, \dots, N_c$. На рис. 1 показан случай, когда $N_c = 11$.

После подстановки численных значений координаты точки коллокации в уравнения коллокации они становятся линейными алгебраическими уравнениями. Так, для определения вектора коэффициентов решения $\mathbf{X} = (b_1, \dots, b_n)$ получается СЛАУ

$$A\mathbf{X} = \Phi, \tag{4}$$

где A — матрица размера $n \times n$. В данной работе эта система решалась с применением встроенной функции `LinearSolve[A,Phi]` системы *Mathematica*. Работа созданной нами компактной *Mathematica*-программы p -версии коллокационного метода продемонстрирована далее на решении нескольких примеров.

3. Результаты численных экспериментов.

Пример 1. В тех случаях, когда необходимо проверить возможности и пределы применимости нового численного метода для решения изучаемых задач, полезно для верификации метода сначала использовать гладкие решения, получаемые методом “изготовленных решений”. Этот метод был первоначально разработан в [18]. Подробный обзор свойств метода дан в [19]. Суть метода “изготовленных решений” состоит в том, что вместо того чтобы искать неизвестное решение исходного уравнения, его модифицируют так, чтобы оно удовлетворялось при подстановке в него некоторой функции, выбранной в качестве решения.

Здесь сначала рассмотрим достаточно простой пример, который для достижения погрешности решения, сравнимой с погрешностью ошибок округлений на компьютере, не потребовал от разработанной p -версии метода брать большое число узлов в формуле Гаусса. Пусть в уравнении (1) $g(x) = 1$, $K(x, s) = 1$. Зададим точное решение в виде

$$u(x) = x^5 e^x, \quad x \in [a, b]. \tag{5}$$

Чтобы найти соответствующую правую часть, подставим решение (5) в (2). Получим следующее выражение для $F(y)$:

$$F(y) = e^{x_c + hy}(x_c + hy)^5 - \frac{1}{h} \left(e^{-h + x_c} \left(120 + 120(h - x_c) + 60(h - x_c)^2 + 20(h - x_c)^3 + 5(h - x_c)^4 + (h - x_c)^5 \right) + e^{2h} \left(-120 + 120(h + x_c) - 60(h + x_c)^2 + 20(h + x_c)^3 - 5(h + x_c)^4 + (h + x_c)^5 \right) \right) \lambda.$$

Расчеты по предлагаемому методу проводились в системе *Mathematica* при $a = -1$, $b = 1$, $\lambda = 1$ в (1). В этом случае $x_c = 0$, $h = 1$.

Целью серии расчетов, результаты которых приведены в табл. 1, было изучение влияния параметров n и N_{Gauss} на точность результата. В этой таблице N_{Gauss} — число узлов квадратурной формулы Гаусса для

приближенного подсчета интеграла. Таблицы численных значений узлов x_i и весов w_i , $i = 1, \dots, M$, для $M = 2, \dots, 64$ взяты с сайта <https://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html>. Там же приведена *Mathematica*-программа для вычисления x_i и w_i . Символом * в табл. 1 помечена строка с наилучшим по точности результатом.

Далее, $\kappa(A)$ — число обусловленности матрицы A , $\kappa(A) = \left(\frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|} \right)^{0.5}$, λ_i , $i = 1, \dots, n$, — собственные значения матрицы $A^T A$, где верхний индекс T обозначает операцию транспонирования.

Все численные расчеты, описываемые в настоящей работе, были выполнены на персональном компьютере с процессором Intel с тактовой частотой 3 гигагерца. В крайнем правом столбце табл. 1 приводится время счета соответствующего варианта на указанном компьютере.

Процекр в третьем столбце табл. 1 означает, что в этом вычислительном эксперименте интеграл, входящий в уравнение (1), вычислялся точно с применением первообразной. Во всех таких случаях, когда возможно вычисление интеграла в замкнутом аналитическом виде в программной системе *Mathematica*, нет необходимости использовать приближенную квадратурную формулу. Однако, как видно из табл. 1, без

применения квадратурной формулы (строка 7 в табл. 1) потребовалось машинное время, которое оказалось в 25 раз больше, чем при использовании квадратурной формулы Гаусса (строка 6* в табл. 1). Это объясняется тем, что интеграл, входящий в (2), хотя и вычисляется в замкнутом виде, но соответствующее аналитическое выражение имеет длину, которая в несколько раз превосходит размер подынтегрального выражения. При этом его подсчет требует выполнения большого числа арифметических действий, что существенно превышает в данном случае число арифметических действий при подсчете квадратуры по Гауссу. Возникла такая ситуация, что с точки зрения экономичности по времени для подсчета аналитического выражения интеграла требуется существенно больше времени, чем при применении численной, приближенной процедуры для вычисления значения интеграла. Далее, из сравнения строк 6* и 7 табл. 1 следует, что при использовании квадратурной формулы Гаусса погрешность коллокационного решения оказалась примерно в 8 раз меньше, чем в случае применения аналитической формулы для интеграла, входящего в (2). Это означает, что погрешность квадратурной формулы при выбранных параметрах формулы близка к ошибкам округлений на компьютере, и погрешность в обоих случаях вычисления интеграла определяется числом арифметических действий, необходимых для вычисления его значения. Таким образом, приходим к выводу о том, что с точки зрения скорости решения задачи и точности приближенного решения рекомендуется применять квадратурную формулу Гаусса для достижения высокой точности решения, в том числе с погрешностью, близкой к ошибкам округлений на компьютере независимо от возможности вычисления интеграла в (2) в замкнутой аналитической форме. Естественно, когда не требуется названная точность решения, можно ограничиться небольшим количеством узлов и весов в квадратурной формуле и небольшим числом точек коллокации, при этом затратить меньше времени счета. Можно также отметить, что с увеличением количества неизвестных n в полиномиальном представлении (3) приближенного решения растет число обусловленности решаемой СЛАУ. Однако его рост оказывается не критичным, чтобы препятствовать получению решения с погрешностью порядка 10^{-14} даже при $n = 20$. Например, в табл. 1 при переходе от первой строки к строке 6* размер СЛАУ увеличился примерно в два раза, а точность решения увеличилась более чем в 10^{10} раз. Аналогичный вывод можно сделать из анализа приведенных далее решений второго и третьего примеров.

Возможности достижения столь малых погрешностей решения уравнения, полученных в данной работе, способствует и то обстоятельство, что в программной системе *Mathematica*, которая реализована на языке C, используются вычисления в арифметике машинных чисел с плавающей запятой, которые имеют длину “long double”. Эта длина несколько больше, чем длина “double precision”. И при использовании чисел “double precision” достижимая на компьютере точность решения будет отличаться от достигнутой здесь точности почти на два десятичных порядка. Это при столь малых величинах погрешности, достигнутых здесь, практически несущественно.

Таблица 1

Погрешность $\|u - u_h\|_C$ как функция параметров n и N_{Gauss} в численном эксперименте в системе *Mathematica*

№	n	N_{Gauss}	$\ u - u_h\ _C$	$\kappa(A)$	$T_{\text{счета, сек.}}$
1	9	6	4.969e-4	4.578e2	0.19
2	11	8	4.010e-6	2.684e3	0.23
3	14	16	9.753e-10	3.902e4	0.38
4	15	10	4.864e-11	9.200e4	0.39
5	15	16	4.864e-11	9.200e4	0.45
6*	20	16	1.155e-14	7.746e6	0.22
7	20	—	9.132e-14	7.737e6	5.64

Был также проведен вычислительный эксперимент, в котором при $n = 20$ точки коллокации размещались в узлах равномерной сетки в промежутке $[-1, 1]$. Была получена погрешность $\|u - u_h\|_C = 2.630e-13$, которая в 23 раза больше, чем в случае размещения точек коллокации в узлах неравномерной сетки, лежащих в корнях полинома Лежандра 16-й степени (ср. со строкой 6* табл. 1).

Таблица 2
Влияние исключения конечных точек из множества точек коллокации на точность приближенного решения

№	n	N_{Gauss}	y_L	$\ u - u_h\ _C$	$\ u - u_h\ _{C, \text{бк}}$	δ
1	9	6	± 0.968160	$4.969e-4$	$5.805e-4$	1.168
2	14	16	± 0.986284	$9.753e-10$	$1.287e-9$	1.320
3	20	16	± 0.993129	$1.155e-10$	$1.199e-10$	1.038
4	30	24	± 0.996893	$1.205e-14$	$1.155e-14$	0.959
5	42	35	± 0.998400	$1.199e-14$	$1.199e-14$	1.000

И наконец, была выполнена серия расчетов, в которых конечные точки $y = -1, y = 1$ интервала решения уравнения были изъяты из множества точек коллокации, и все точки коллокации вычислялись как корни полинома Лежандра n -й степени (см. табл. 2). В табл. 2 y_L — ближайшие к конечным точкам $y = \pm 1$ корни этого полинома, $\|u - u_h\|_{C, \text{бк}}$ — погрешность приближенного решения, полученная без использования конечных точек в множестве точек коллокации, $\delta = \|u - u_h\|_{C, \text{бк}} / \|u - u_h\|_C$. Видно, что в интервале $9 \leq n \leq 20$ погрешность $\|u - u_h\|_{C, \text{бк}}$ убывает, но при этом остается большей, чем погрешность $\|u - u_h\|_C$. Далее, в интервале $14 \leq n \leq 30$ величина δ убывает. Этот эффект объясняется тем, что с увеличением степени полинома Лежандра его корни, ближайшие к конечным точкам интервала решения уравнения, стремятся к этим точкам, см. четвертый столбец в табл. 2. Можно сделать следующий общий вывод из этой таблицы: если значения n и N_{Gauss} не слишком велики, то с целью получения повышенной точности результата целесообразно включать конечные точки $y = \pm 1$ в множество точек коллокации. Однако начиная с некоторых достаточно больших значений n и N_{Gauss} наличие конечных точек в множестве точек коллокации уже не приводит к повышению точности результата численного расчета по предлагаемому коллокационному методу.

Способ задания точек коллокации с исключением конечных точек целесообразно применять в тех случаях, когда ядро $K(x, s)$ имеет сингулярность в одной или обеих конечных точках.

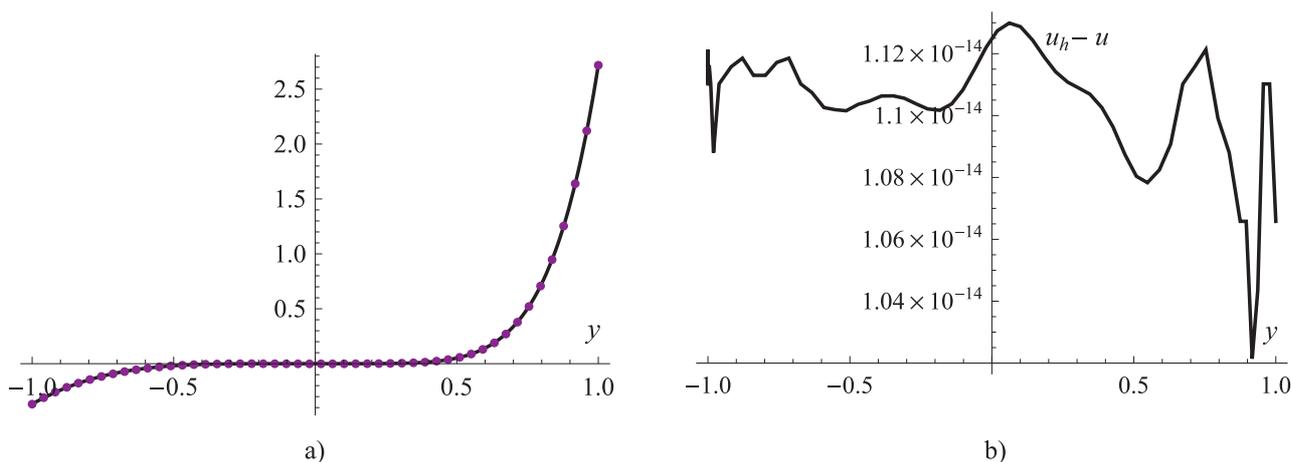


Рис. 2. Результаты расчетов при $n = 20, N_{\text{Gauss}} = 16$

На рис. 2 представлены результаты расчетов по рассматриваемому методу при $n = 20, N_{\text{Gauss}} = 16$. Точное решение изображено на рис. 2а сплошной линией, а численное решение — пунктирной. Как видно из табл. 1 и рис. 2б, $\|u_h - u\|_C$ не превышает 1.2×10^{-14} .

Пример 2. Рассмотрим уравнение (1) со следующими выражениями функций $g(x), K(x, s), f(x)$:

$$g(x) = 1, \quad K(x, s) = se^s \sin(x + s), \quad a = -1, \quad b = 1, \quad \lambda = 1,$$

$$f(x) = e^x \sin(x) - \frac{\lambda}{16} \left\{ e^2 [2 \cos(x) - \sin(2 + x) - 2 \cos(2 + x)] - e^{-2} [3 \sin(x - 2) - 6 \cos(x) + 2 \cos(x - 2)] \right\}.$$

Точное решение имеет следующий вид: $u(x) = e^x \sin(x)$. В табл. 3 представлена величина нормы погрешности $\|u - u_h\|_C$, вычисленная по 1000 точкам, взятым равномерно в области $-1 \leq x \leq 1$. Из сравнения табл. 1 и 3 следует, что при одинаковых значениях n и N_{Gauss} точность численного решения в примере 2 выше, чем в примере 1. Для того чтобы объяснить этот эффект, приведем следующую известную оценку [20] нормы погрешности решения СЛАУ (4):

$$\frac{\|\delta \mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta \Phi\|}{\|\Phi\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right). \quad (6)$$

Здесь δA — погрешность вычисления матрицы A , $\delta \Phi$ — погрешность вычисления правой части уравнения. Оценка верна при условиях, что A — квадратная матрица и $\kappa(A)\|\delta A\| \cdot \|A\|^{-1} < 1$. Из (6) видно, что чем меньше число обусловленности $\kappa(A)$, тем меньше погрешность решения СЛАУ. Как видно из сравнения табл. 1 и 3, в случае примера 2 число обусловленности $\kappa(A)$ меньше, чем в случае примера 1. Символом * в табл. 3 помечена строка с наилучшим по точности результатом.

На рис. 3 представлены результаты расчетов по обсуждаемому методу при $n = 20$, $N_{\text{Gauss}} = 16$. Точное решение изображено на рис. 3а сплошной линией, а численное решение, полученное предложенным методом, — пунктирной. Как видно из табл. 3 и рис. 3б, максимальная погрешность $|u_h - u|$ не превышает 1.4×10^{-15} .

Таблица 3

Погрешность $\|u - u_h\|_C$ как функция параметров n и N_{Gauss} в примере 2

№	n	N_{Gauss}	$\ u - u_h\ _C$	$\kappa(A)$	$T_{\text{счета, сек.}}$
1	9	6	1.179e-5	4.432e2	0.14
2	11	8	3.177e-9	2.589e3	0.24
3	14	16	5.016e-13	3.650e4	0.20
4	15	10	7.672e-14	8.853e4	0.22
5	15	16	1.660e-14	8.853e4	0.30
6*	20	16	1.332e-15	7.307e6	0.31

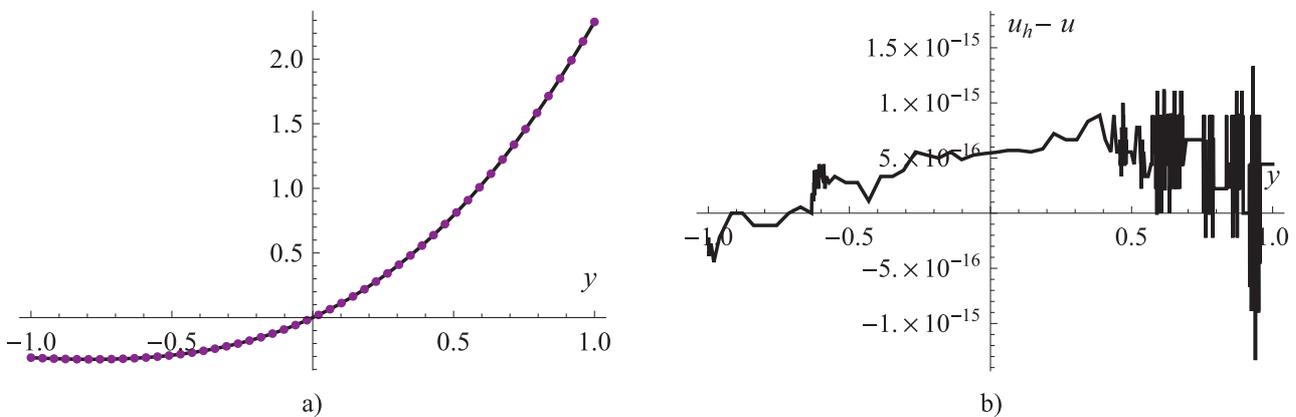


Рис. 3. Результаты решения интегрального уравнения примера 2 при $n = 20$, $N_{\text{Gauss}} = 16$

Пример 3. Рассмотрим уравнение (1) с выражениями для функций $g(x)$, $K(x, s)$, $f(x)$ [6]:

$$g(x) = \cos(x), \quad K(x, s) = \frac{3}{6.4\pi \cos^2\left(\frac{x+s}{2}\right) - 1},$$

$$f(x) = g(x) \left(\frac{17}{2} + \frac{128}{17} \cos 2x \right) + \frac{33}{2} - 16 \sin^2 x - \frac{128}{17} \cos 2x, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad \lambda = 1.$$

Точное решение имеет следующий вид: $u(x) = \frac{17}{2} + \frac{128}{17} \cos 2x$. Данный пример подробно рассматривался в [8], где расчетами на ЭВМ БЭСМ-6 было получено совпадение с точным решением в первых шести цифрах мантиссы десятичных чисел. Поэтому погрешность численного решения, достигнутая в [8], была порядка 10^{-6} .

В табл. 4 представлена вычисленная по 1000 точкам, взятым равномерно на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$, погрешность $\|u - u_h\|_C$. Этот пример для численного решения предъявляет к методам вычислений более высокие требования, чем два предыдущих, прежде всего, из-за более сложного поведения ядра уравнения. Кроме того, на интервале $[-\pi, \pi]$ содержатся два периода функции $(128/17) \cos(2x)$ с большими амплитудой и градиентами по сравнению с функцией $\sin(x)$, при этом в примере 2 рассматривалась лишь часть периода этой функции. Как видно из табл. 4, обусловленность СЛАУ, соответствующей примеру 3, намного хуже, чем в примерах 1 и 2. Символом * в табл. 4 помечена строка с наилучшим по точности результатом. Вследствие указанных причин в данном примере для достижения точности решения, сравнимой по порядку с величиной погрешности округлений, потребовалось значительно больше точек коллокации и узлов квадратурной формулы, чем в первых двух примерах.

Таблица 4

Погрешность $\|u - u_h\|_C$ как функция параметров n и N_{Gauss} в примере 3

№	n	N_{Gauss}	$\ u - u_h\ _C$	$\kappa(A)$	$T_{\text{счета}}$, сек.
1	9	6	8.404e-1	1.120e3	0.22
2	14	16	2.624e-3	2.309e5	0.31
3	20	16	3.712e-4	5.540e7	0.47
4	30	24	1.115e-7	5.054e8	1.08
5	36	30	5.957e-10	8.151e8	1.14
6	42	35	8.750e-12	5.153e8	1.49
7*	48	40	6.892e-13	8.650e8	2.06
8	56	45	5.301e-12	1.557e9	2.86

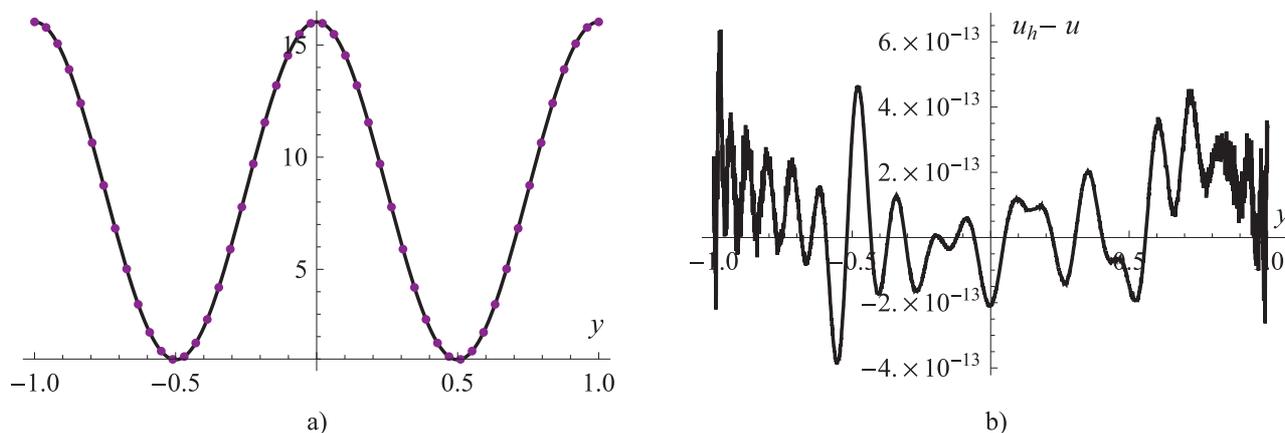


Рис. 4. Результаты решения интегрального уравнения примера 3 при $n = 48$, $N_{\text{Gauss}} = 40$

Точное решение изображено на рис. 4а сплошной линией, а численное решение, полученное предложенным методом, — пунктирной. Как видно из табл. 4 и рис. 4b, погрешность $\|u_h - u\|_C$ не превышает 7×10^{-13} .

Предложенный в настоящей работе вариант коллокационного метода, благодаря возможности варьировать количество базисных функций в полиномиальном представлении решения и количество узлов квадратурной формулы Гаусса, позволил достичь точности, которая на семь десятичных порядков выше, чем достигнутая в [8].

Из анализа результатов решения трех примеров можно сделать еще следующие выводы:

- 1) остаточный член аппроксимации решения и его точность в предложенном численном методе, как и во многих других, применяемых на практике, зависит от градиентов решения;
- 2) предельная достижимая точность решения на компьютере, как и во многих других численных методах, зависит также от обусловленности СЛАУ, к решению которой сводится построение приближенного решения задачи;
- 3) от обоих указанных факторов зависит достижимая на компьютере предельная минимальная величина погрешности решения.

Из анализа графиков погрешности решения во всех трех примерах видно, что когда погрешность решения по порядку величины близка к погрешности округлений на компьютере, на графике появляются осцилляции, амплитуда которых коррелирует с величиной градиентов решения. Например, амплитуда осцилляций погрешности в примере 2 больше на правом краю интервала, чем на левом. Их амплитуда в примере 3 намного больше, чем в примере 2. Результат, приведенный в строке 8 табл. 4, говорит о том, что при дальнейшем увеличении числа узлов в формуле Гаусса и числа точек коллокаций происходит такое накопление ошибок округления, что численный результат далее не уточняется.

Полученные в нашей работе результаты показывают гибкость и возможности предложенного метода: за счет подходящего выбора степени аппроксиманта, числа точек коллокации и способа их расположения на интервале интегрирования можно получать очень высокую точность результата, близкую по порядку величины к погрешности машинных вычислений в арифметике чисел с плавающей запятой в системе *Mathematica*.

Теперь рассмотрим вопрос о том, как можно судить приближенно о величине погрешности численного решения, полученного по рассматриваемому методу, в том случае, когда точное решение уравнения (1) неизвестно. Перепишем уравнение (1) в виде

$$Lu = g(x)u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)u(s) ds - f(x) = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (7)$$

При подстановке приближенного решения $u_h(x)$ в (7) в правой части возникает ненулевая невязка $\varepsilon(x)$: $Lu_h(x) = \varepsilon(x)$. Если эта невязка окажется достаточно малой для всех $x \in [a, b]$, и, кроме того, она будет уменьшаться по модулю с увеличением степени $n - 1$ полинома, аппроксимирующего решение, то это будет свидетельствовать и о точности полученного численного решения, и о его сходимости к точному решению с увеличением n . Вычитая почленно из обеих частей равенства $Lu_h(x) = \varepsilon(x)$ обе части равенства $Lu(x) = 0$, легко получить следующее равенство: $L(u - u_h) = \varepsilon(x)$. Отсюда имеем: $\|u - u_h\| \leq \|L^{-1}\| \|\varepsilon\|$. Если значение $\|L^{-1}\|$ ограничено сверху, то отсюда приближенно можно судить о величине $\|u - u_h\|$ в зависимости от величины невязки ε . Как видно из табл. 5, с ростом n в пределах промежутка $9 \leq n \leq 48$ происходит быстрое уменьшение величины $\|\varepsilon(x)\|_C$, что свидетельствует о сходимости численного решения к точному и подтверждает правильность полученного приближенного решения. Но при $n = 56$ значение невязки уже несколько больше, чем при $n = 48$. Это согласуется с тем, что $\|u - u_h\|_C$ при этом n больше, чем при $n = 48$, см. табл. 4. На рис. 5 показан вид кривых $\varepsilon = \varepsilon(x)$ для двух пар значений (n, N_{Gauss}) .

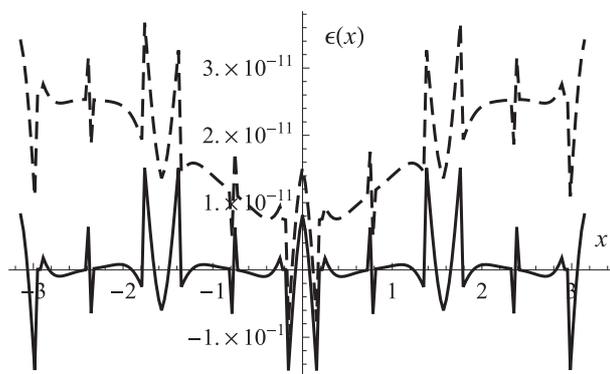


Рис. 5. Невязка (пример 3) при $n = 48$, $N_{\text{Gauss}} = 40$ (сплошная линия) и при $n = 36$, $N_{\text{Gauss}} = 30$ (штриховая линия)

Таблица 5
Норма невязки $\|\varepsilon(x)\|_C$
как функция параметров
 n и N_{Gauss} в примере 3

№	n	N_{Gauss}	$\ \varepsilon(x)\ _C$
1	9	6	4.976e-1
2	14	16	2.707e-3
3	20	16	8.997e-5
4	30	24	1.115e-7
5	36	30	3.673e-11
6	42	35	1.528e-11
7*	48	40	1.517e-11
8	56	45	1.543e-11

4. Заключение. Предложена p -версия коллокационного метода для численного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Важными особенностями метода являются возможности значительного варьирования степени полинома в полиномиальном представлении приближенного решения и значительного варьирования числа узлов квадратурной формулы Гаусса для достижения высокой точности решения уравнений.

Предложенная p -версия коллокационного метода реализована на языке системы *Mathematica*. Соответствующая компьютерная программа получилась достаточно компактной, и здесь показано, что она вполне может обеспечивать достаточную точность для широкого класса интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Во всех рассмотренных примерах предложенная версия коллокационного метода позволила достичь точности, близкой к величине машинных ошибок округления. При этом метод оказался экономичным с точки зрения требуемых для его реализации ресурсов компьютера: даже в самом сложном из рассмотренных в работе примеров — примере 3 для решения уравнения с погрешностью, близкой по величине к ошибкам округлений на компьютере, машинное время, необходимое для решения задачи, не превышало 3 секунды работы компьютера.

На примерах решения конкретных уравнений показаны возможности метода. Здесь также описан алгоритм, позволяющий верифицировать точность приближенного решения по предложенной p -версии коллокационного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ferziger J.H., Peric M.* Computational methods for fluid dynamics. Berlin: Springer, 2002.
2. *Rienen van U.* Numerical methods in computational electrodynamics. Berlin: Springer, 2013.
3. *Самохин А.Б.* Объемные интегральные уравнения: методы и алгоритмы. М.: МИРЭА, 2011.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.
5. *Laurentiev M.M., Avdeev A.V., Laurentiev M.M.Jr., Priimenko V.I.* Inverse problems of mathematical physics. Utrecht: VSP Publ., 2003.
6. *Zaslavsky M., Druskin V., Davydcheva S., et al.* Hybrid finite-difference integral equation solver for 3D frequency domain anisotropic electromagnetic problems // *Geophysics*. 2011. **76**, N 2. F123–F137.
7. *Pratt W.K.* Digital image processing. New York: Wiley-Interscience, 2001.
8. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986.
9. *Russell R.D., Shampine L.F.* A collocation method for boundary value problems // *Numer. Math.* 1972. **19**, N 1. 1–28.
10. *Ascher U.M., Mattheij R.M.M., Russell R.D.* Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations. Philadelphia: SIAM Press, 1995.
11. *Ascher U., Christiansen J., Russell R.D.* Collocation software for boundary-value ODEs // *ACM Trans. Math. Software*. 1981. **7**, N 2. 209–222.
12. *Shapeev V.* Collocation and least residuals method and its applications // *EPJ Web of Conferences*. 2016. **108**. DOI: 10.1051/epjconf/201610801009.
13. *Исаев В.И., Шанеев В.П.* Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. **50**, № 10. 1758–1770.
14. *Шанеев В.П., Ворожцов Е.В., Исаев В.И., Идимешев С.В.* Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье–Стокса // *Вычислительные методы и программирование*. 2013. **14**. 306–322.
15. *Ворожцов Е.В., Шанеев В.П.* О комбинировании способов ускорения сходимости итерационных процессов при численном решении уравнений Навье–Стокса // *Вычислительные методы и программирование*. 2017. **18**. 80–102.
16. *Kharenko D., Padovani C., Pagni A., Pasquinelli G., Semin L.* Free longitudinal vibrations of bimodular beams: a comparative study // *Int. J. Structural Stability and Dynamics*. 2011. **11**, N 1. 23–56.
17. *Wolfram S.* The Mathematica book. Champaign: Wolfram Media, 2003.
18. *Knupp P., Salari K.* Verification of computer codes in computational science and engineering. Boca Raton: CRC Press, 2002.
19. *Roache P.J.* Code verification by the method of manufactured solutions // *J. Fluids Eng.* 2002. **124**, N 1. 4–10.
20. *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. М.: БИНОМ, 2006.

Поступила в редакцию
7.11.2018

A P -version of the Collocation Method for Solving the Fredholm Integral Equations of the Second Kind in the Mathematica Environment

V. P. Shapeev^{1,2} and E. V. Vorozhtsov³

¹ *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Institutskaya ulitsa 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, Principal Scientist, e-mail: Shapeev@itam.nsc.ru*

² *Novosibirsk National Research University, Faculty of Mechanics and Mathematics; ulitsa Pirogova 2, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: vshapeev@ngs.ru*

³ *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Institutskaya ulitsa 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, Leading Scientist, e-mail: vorozh@itam.nsc.ru*

Received November 7, 2018

Abstract: A p -version of the collocation method for the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind is proposed and implemented. In the considered implementation, the possibilities are realized for the variation of the polynomial degree in the polynomial representation of the approximate solution of equations and the variation of the number of nodes of the employed Gauss quadrature formula to affect the solution accuracy. The influence of the number of collocation points used for the solution approximation and of the number of nodes of the Gauss quadrature formula on the condition number of the system of linear algebraic equations to the solution of which the construction of the approximate solution is reduced and on its accuracy are studied by the numerical solution of examples, including some examples presented in well-known publications. The proposed algorithm is implemented in the language of the program package Mathematica. In all considered examples, the proposed version of the collocation method has enabled us to reach the accuracy of the solution of equations, which is close to the level of the machine rounding errors. The program product implementing the proposed p -version has proved to be compact and the method turned out to be economical: the machine time required for the solution of problems considered in the paper did not exceed 3 seconds of the CPU time of a personal computer. We describe an algorithm allowing us to estimate the accuracy of the approximate solution obtained by the proposed p -version of the method in the cases where the exact solution of the integral equation is unknown.

Keywords: Fredholm integral equation of the second kind, collocation method, condition number, Gauss quadrature.

References

1. J. H. Ferziger and M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics* (Springer, Berlin, 2002).
2. U. van Rienen, *Numerical Methods in Computational Electrodynamics* (Springer, Berlin, 2013).
3. A. B. Samokhin, *Volume Integral equations: Methods and Algorithms* (Moscow Inst. Radio Eng., Moscow, 2011) [in Russian].
4. A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, and A. A. Timonov, *Mathematical Problems of Computer Tomography* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian].
5. M. M. Lavrentiev, A. V. Avdeev, M. M. Lavrentiev, Jr., and V. I. Priimenko, *Inverse Problems of Mathematical Physics* (VSP Publ., Utrecht, 2003).
6. M. Zaslavsky, V. Druskin, S. Davydycheva, et al., “Hybrid Finite-Difference Integral Equation Solver for 3D Frequency Domain Anisotropic Electromagnetic Problems,” *Geophysics* **76** (2), F123–F137 (2011).
7. W. K. Pratt, *Digital Image Processing* (Wiley-Interscience, New York, 2001).
8. A. F. Verlan’ and V. S. Sizikov, *Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs* (Naukova Dumka, Kiev, 1986) [in Russian].
9. R. D. Russell and L. F. Shampine, “A Collocation Method for Boundary Value Problems,” *Numer. Math.* **19** (1), 1–28 (1972).
10. U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij, and R. D. Russell, *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations* (SIAM Press, Philadelphia, 1995).
11. U. Ascher, J. Christiansen, and R. D. Russell, “Collocation Software for Boundary-Value ODEs,” *ACM Trans. Math. Software.* **7** (2), 209–222 (1981).
12. V. Shapeev, “Collocation and Least Residuals Method and Its Applications,” *EPJ Web of Conferences* **108** (2016). doi 10.1051/epjconf/201610801009
13. V. I. Isaev and V. P. Shapeev, “High-Accuracy Versions of the Collocations and Least Squares Method for the Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **50** (10), 1758–1770 (2010) [*Comput. Math. Math. Phys.* **50** (10), 1670–1681 (2010)].
14. V. P. Shapeev, E. V. Vorozhtsov, V. I. Isaev, and S. V. Idimeshev, “The Method of Collocations and Least Residuals for Three-Dimensional Navier–Stokes Equations,” *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 306–322 (2013).
15. E. V. Vorozhtsov and V. P. Shapeev, “On Combining the Techniques for Convergence Acceleration of Iteration Processes during the Numerical Solution of Navier–Stokes Equations,” *Vychisl. Metody Programm.* **18**, 80–102 (2017).
16. D. Kharenko, C. Padovani, A. Pagni, et al., “Free Longitudinal Vibrations of Bimodular Beams: A Comparative Study,” *Int. J. Str. Stab. Dyn.* **11** (1), 23–56 (2011).
17. S. Wolfram, *The Mathematica Book* (Wolfram Media, Champaign, 2003).

18. P. Knupp and K. Salari, *Verification of Computer Codes in Computational Science and Engineering* (CRC Press, Boca Raton, 2002).
19. P. J. Roache, "Code Verification by the Method of Manufactured Solutions," *J. Fluids Eng.* **124** (1), 4–10 (2002).
20. I. B. Petrov and A. I. Lobanov, *Lectures on Computational Mathematics* (Binom, Moscow, 2006) [in Russian].