УДК 519.642 doi 10.26089/NumMet.v19r446

ТОМОГРАФИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ОБЛАСТИ, ИМЕЮЩЕЙ ЗАДАННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПЛОТНОСТИ

А. В. Лихачев[1]

Предложен новый метод определения на томограмме области, соответствующей участкам объекта, заполненным однородным веществом с заданной плотностью. Его суть заключается в том, что пиксели реконструированного изображения считаются принадлежащими рассматриваемой области, если их яркость лежит в определенном интервале, границы которого определяются из условия минимума взвешенной суммы вероятностей ошибок первого и второго рода. Для определения этих вероятностей были выдвинуты статистические гипотезы о распределении яркости пикселей томограммы, которые подтвердились результатами вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: двумерная томография, гистограмма изображения, распределение яркости пикселей.

1. Введение. В настоящее время рентгеновская томография является одним из наиболее эффективных средств исследования внутренней структуры объектов различной природы. Традиционно она применяется в медицине для диагностики патологий, в том числе новообразований. Еще одной важной областью ее приложения является дефектоскопия. В частности, томографические методы используются для обнаружения трещин в металлических и бетонных конструкциях, находящихся в эксплуатации. На практике часто предметом интереса служит распределение по исследуемому объему или сечению однородного вещества (например, метастазов опухоли) либо, напротив, пустот. Изображение области, занятой рассматриваемой субстанцией, реконструированное стандартными алгоритмами, не всегда удовлетворяет требованиям, продиктованным условиями задачи. В первую очередь это касается точности определения границы. Предлагаемая работа посвящена решению этой проблемы.

Для определенности будем рассматривать двумерную постановку, описывающую изучение среза объекта. Математически задача формулируется следующим образом. Пусть имеется M проекций от функции $g(x,y)$. Под проекцией здесь понимается функция одной переменной $f_m(p)$, значения которой определяются формулой

$$f_m(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(\sqrt{p^2+l^2},\, \varphi_m + \arctan\frac{l}{p}\right) dl. \tag{1}$$

Иными словами, значение $f_m(p)$ равно интегралу от $g(x,y)$, взятому вдоль прямой, проходящей на расстоянии p от начала координат перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = (\cos\varphi_m, \sin\varphi_m)$. Далее, известно, что $g(x,y) = \mu_0$ в области D, при этом область D может быть неодносвязной. Требуется по существующему набору проекционных данных найти D при заданном μ_0.

В рентгеновской томографии $g(x,y)$ — это распределение коэффициента линейного ослабления рентгеновского излучения. Зная его, можно идентифицировать вещество в любом месте рассматриваемого сечения. Значения функций $f_m(p)$ определяются из зарегистрированной интенсивности излучения, прошедшего через объект. Связь между искомыми и измеряемыми параметрами, выражаемая посредством (1), соответствует так называемому лучевому приближению, которое в настоящее время является общепринятым для рентгеновской томографии. При определенных предположениях формула (1) может быть получена из уравнения переноса излучения [1].

Если рассматривать φ_m как непрерывную переменную, принимающую значения из интервала $[0; 2\pi]$, то правая часть выражения (1) представляет собой преобразование Радона функции $g(x,y)$, формула обращения которого может быть представлена в следующем виде [2]:

$$g(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\omega|\tilde{f}_m(\omega)\exp\bigl(i\omega(x\cos\varphi_m + y\sin\varphi_m)\bigr)\, d\omega\, d\varphi_m. \tag{2}$$

[1] Институт автоматики и электрометрии СО РАН (ИАЭ СО РАН), просп. Коптюга, 1, 630090, г. Новосибирск; ст. науч. сотр., e-mail: ipm1@iae.nsk.su

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Здесь $\tilde{f}_m(\omega)$ — преобразование Фурье от проекции. Операция интегрирования по углу называется обратным проецированием. На практике она реализуется путем суммирования, поскольку число проекций всегда конечно. По формуле (2) можно реконструировать приближение функции $g(x,y)$, которое ниже будет обозначаться через $\hat{g}(x,y)$. Для решения поставленной выше задачи здесь разработан алгоритм, основанный на анализе гистограммы изображения оценки $\hat{g}(x,y)$.

2. Предлагаемый метод. Представим функции $g(x,y)$ и $\hat{g}(x,y)$ полутоновыми изображениями. Для приложений, в первую очередь, интересны функции с компактным носителем. Не уменьшая общности, будем полагать, что $\operatorname{supp}\big(g(x,y)\big)$ лежит в единичном круге. Разобьем описывающий его квадрат на $n \times n$ пикселей. Яркость каждого пикселя будем определять по формуле $I(i,j) = c_1 g(x_i, y_j) + c_2$, где $g(x_i, y_j)$ — значение в его центре, а c_1 и c_2 — некоторые константы. Аналогично получается изображение результата реконструкции $\hat{I}(i,j)$, которое ниже будет называться томограммой. Обозначим через I_0 яркость, соответствующую μ_0.

Предложенное решение состоит в том, что пиксель реконструированного изображения $\hat{I}(i,j)$ считается принадлежащим D, если его яркость лежит в интервале $[I_1; I_2]$, $I_1 \leqslant I_0 \leqslant I_2$. При этом I_1 и I_2 определяются из условия минимума взвешенной суммы вероятностей ошибок первого и второго рода:

$$P_\alpha(I_1, I_2) = P_1(I_1, I_2) + \alpha P_2(I_1, I_2).$$

Параметр α характеризует относительную значимость ошибок второго рода и задается на основе конкретных условий задачи.

Для того чтобы вычислить вероятности, было принято следующее предположение. Пиксель, имеющий на исходном изображении $I(i,j)$ яркость I_C, на реконструированном изображении $\hat{I}(i,j)$ имеет нормально распределенное случайное значение яркости с математическим ожиданием, равным I_C. Его функция плотности вероятности выражается как

$$\rho_{I_C}(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} \exp\left(-\frac{(I - I_C)^2}{2\sigma_I^2}\right). \tag{3}$$

Такое предположение основывается на следующем рассуждении. Формула обращения (2) определяет последовательное выполнение двух операций: преобразования проекций фильтром с частотной характеристикой $|\omega|$ (в англоязычной литературе он называется ramp-фильтром) и обратного проецирования. Их различные алгоритмические реализации описаны в работах [2–7]. При использовании любой из них яркость произвольного пикселя томограммы вычисляется путем суммирования с весом $1/M$ данных с каждой отфильтрованной проекции. На практике они всегда содержат случайный шум, обусловленный неконтролируемыми факторами. Кроме того, при подготовке данных применяется дискретизация, а в процессе реконструкции — интерполяция, которые тоже вносят искажения. В предлагаемой работе рассматривается только влияние шума. Ошибки, вызванные дискретизацией и интерполяцией, рассматривались, например, в работах [2, 4]. Исходя из сказанного, можно записать

$$\hat{I}(i,j) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \left(f_m^F\big(p(i,j)\big) + \xi_m\right), \tag{4}$$

где через $f_m^F(p)$ обозначена отфильтрованная проекция.

Если все проекции регистрируются при одинаковых условиях, но в различные моменты времени, то суммируемые случайные величины ξ_m должны иметь одну и ту же функцию плотности вероятности ρ_ξ и быть независимыми. Тогда при M, стремящемся к бесконечности, их сумма в (4), согласно центральной предельной теореме теории вероятностей [8], имеет нормальное распределение при любой плотности ρ_ξ. В современных томографических установках число ракурсов наблюдения достаточно велико (порядка нескольких сотен), поэтому можно считать, что распределение яркости пикселя томограммы близко к нормальному. Отметим, что из приведенного рассуждения не следует, что ее математическое ожидание равно I_C. Этот факт проверялся путем вычислительного эксперимента, см. раздел 3.

Обозначим через σ_F^2 дисперсию случайных величин ξ_m (как указывалось выше, все они имеют одинаковое распределение, а следовательно, и дисперсию). В силу того, что они независимы, дисперсия их суммы с весом $1/M$, см. (4), равна $\dfrac{\sigma_F^2}{\sqrt{M}}$. По смыслу σ_F^2 есть не что иное, как дисперсия шума в отфильтрованной проекции. В [9] для нее получено выражение

$$\sigma_F^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Omega}^2(\omega) \widetilde{R}(\omega)\, d\omega. \tag{5}$$

Через $\widetilde{\Omega}(\omega)$ в (5) обозначена частотная характеристика аппроксимации ramp-фильтра, через $\widetilde{R}(\omega)$ — фурье-образ корреляционной функции шума в исходных данных. Резюмируя сказанное, запишем выражение для дисперсии распределения (3) при некоррелированном шуме:

$$\sigma_I^2 = \frac{\sigma_0^2}{2\pi\sqrt{M}} \int\limits_{-\omega_c}^{\omega_c} \widetilde{\Omega}^{\,2}(\omega)\, d\omega. \tag{6}$$

Здесь ω_c — частота отсечки аппроксимирующего фильтра, σ_0^2 — дисперсия шума в исходных данных.

Очевидно, что $P_1(I_1, I_2)$ суть вероятность того, что пиксель, имеющий на оригинальном изображении яркость I_0, на томограмме не попадает в интервал $[I_1; I_2]$:

$$P_1(I_1, I_2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} \int\limits_{I_1}^{I_2} \exp\left(-\frac{(I - I_0)^2}{2\sigma_I^2}\right) dI.$$

Для того чтобы найти $P_2(I_1, I_2)$, вероятность попадания в интервал $[I_1; I_2]$ нужно проинтегрировать по всем значениям яркости I_C:

$$P_2(I_1, I_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} \int\limits_{I_{\min}}^{I_{\max}} \left(G(I_C) \int\limits_{I_1}^{I_2} \exp\left(-\frac{(I - I_C)^2}{2\sigma_I^2}\right) dI \right) dI_C. \tag{7}$$

Здесь $G(I)$ — гистограмма оригинального изображения; $I_{\min}$, $I_{\max}$ — минимальное и максимальное значения его яркости. Строго говоря, при вычислении $P_2(I_1, I_2)$ переменная I_C не должна принимать значение I_0. Однако точка $I_C = I_0$ является множеством меры нуль на интервале $[I_{\min}; I_{\max}]$ и, следовательно, не вносит вклада в интеграл.

Изменим порядок интегрирования в (7). Если, кроме того, заменить $I_{\min}$ на $-\infty$, а $I_{\max}$ на ∞, то внутренний интеграл будет представлять собой свертку функций G и ρ_{I_C}. Будем считать, что ее оценкой является гистограмма реконструированного изображения $\hat{G}(I)$. В пользу возможности такой оценки говорит следующий аргумент. В первом случае мы имеем дело с весовым усреднением яркости в случайном интервале, размер которого определяется функцией ρ_{I_C}. Во втором — со случайной выборкой из распределения с такой же функцией плотности вероятности ρ_{I_C}. В частности, в обоих случаях обеспечивается сходимость к значению I_C при $\sigma_I^2 \to 0$. Соотношение $G * \rho_{I_C}(I) \approx \hat{G}(I)$ тоже проверялось путем вычислительного эксперимента. Детали даны в разделе 3.

Учитывая полученные выражения для вероятностей ошибок первого и второго рода, находим, что I_1 и I_2 должны минимизировать функцию

$$P_\alpha(I_1, I_2) = 1 - \int\limits_{I_1}^{I_2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} \exp\left(-\frac{(I - I_0)^2}{2\sigma_I^2}\right) + \alpha \widehat{G}(I) \right) dI.$$

В настоящей статье первое слагаемое в подынтегральном выражении аппроксимируется параболой

$$Q_1(I) = a_0 - a_2(I - I_0)^2, \quad a_0 = \left(\sqrt{2\pi}\,\sigma_I\right)^{-1}, \quad a_2 = \frac{1}{2\sigma_I^2 \ln 2}\left(\left(\sqrt{2\pi}\,\sigma_I\right)^{-1} - 0.5\right).$$

Гистограмма реконструированного изображения аппроксимируется полиномом третьей степени

$$Q_2(I) = b_3 I^3 + b_2 I^2 + b_1 I + b_0,$$

коэффициенты которого определяются методом наименьших квадратов. Таким образом, в рассматриваемом приближении I_1 и I_2 являются корнями полинома

$$Q(I) = Q_1(I) + \alpha Q_2(I). \tag{8}$$

Среди корней (8), удовлетворяющих условию $I_i < I_0 < I_j$, в качестве границ интервала выбираются те, которые ближе к I_0.

3. Вычислительный эксперимент. Разработанный метод тестировался в процессе вычислительного эксперимента. Были проведены исследования для проверки выдвинутых предположений. Во-первых,

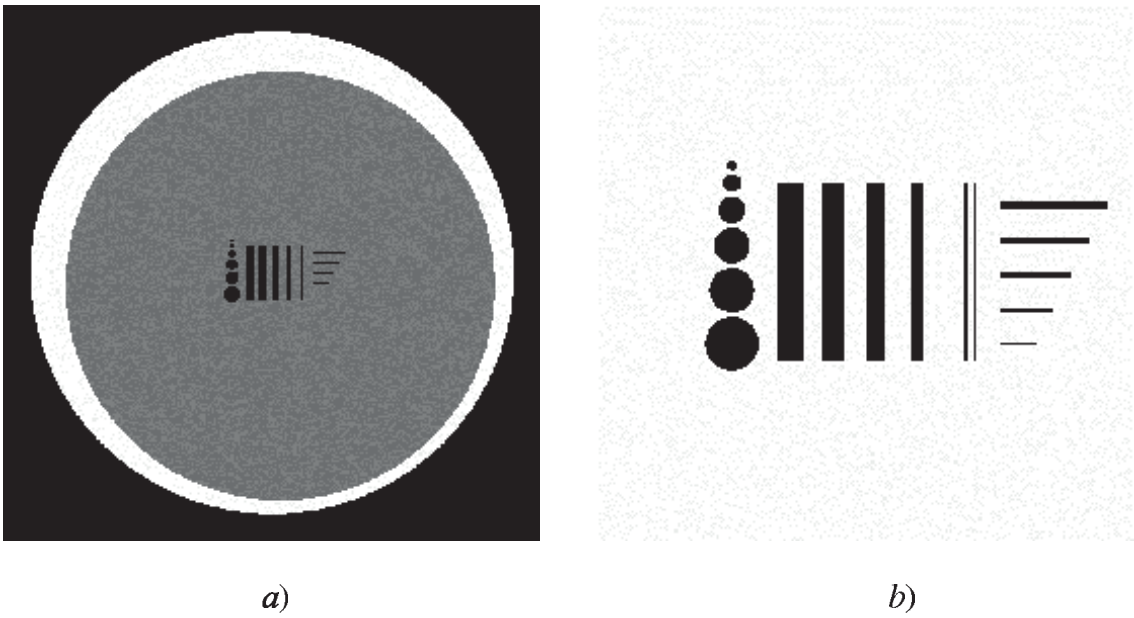


Рис. 1. Математический фантом (a); область D (b)

проверялось насколько точно выполняется гипотеза о нормальном распределении яркости пикселей томограммы (3). Использовался математический фантом, представленный на рис. 1a. Он имеет три градации плотности. Реконструируемая область D обозначена на изображении черным цветом. В ней значение функции $g(x, y)$ равно нулю, что в рентгеновской томографии соответствует отсутствию материала. На рис. 1b отдельно приведена область D, находящаяся в центральной части фантома. Отметим, что, хотя в используемом здесь фантоме фон вокруг области D постоянный, метод тоже будет работать и в случае переменного фона.

Реконструкция проводилась алгоритмом Шеппа–Логана [3]. При этом размер томограммы составлял 1024×1024 пикселей. В расчетах варьировалось число проекций и уровень шума в данных. Шум моделировался при помощи встроенного генератора случайных чисел, имитирующего выборку $\beta_1, \beta_2, \ldots$ из равномерного распределения в интервале $[0; \beta_{\max}]$. Каждая пара β_{2k-1}, β_{2k}, $k = 1, 2, \ldots$, по формуле Бокса–Мюллера преобразовывалась в число

$$\gamma_k = \sigma_0 \sin\left(2\pi \frac{\beta_{2k-1}}{\beta_{\max}}\right) \sqrt{-2 \ln\left(\frac{\beta_{2k}}{\beta_{\max}}\right)},$$

имеющее нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_0^2. Величина γ_k считалась значением шумовой составляющей в k-й точке проекции. Поскольку элементы выборки $\beta_1, \beta_2, \ldots$ полагаются независимыми, γ_k тоже независимы между собой. Таким образом моделируется некоррелированный шум. Его дисперсия после фильтрации σ_I^2 вычисляется согласно (6).

Для каждого набора параметров вычислялась 1000 томограмм при различных реализациях шума. Для нескольких пикселей, как принадлежащих, так и не принадлежащих области D, строились гистограммы яркости. Они сравнивались с функцией плотности (3), при этом проводилась проверка гипотезы на распределение методом Пирсона [10] и вычислялось нормированное среднеквадратичное отклонение Δ_d.

Были получены следующие результаты. Если число проекций превосходит 120, а стандартное отклонение шума σ_0 составляет не более 0.05 (здесь и далее σ_0 приводится в долях от среднего значения проекционных данных), то гистограмма согласуется с предполагаемым распределением с пятипроцентным уровнем значимости ошибки. При росте σ_0 до 0.1 согласование достигается для десятипроцентного уровня. Более высокий уровень значимости ошибки не рассматривался. Значение Δ_d в проведенных расчетах составляло от 0.007 до 0.12.

Вторым проверяемым предположением была замена свертки $(G * \rho_{I_C})(I)$ гистограммой $\widehat{G}(I)$. Обе функции были вычислены по 100 раз для числа проекций $M = 120$, $M = 360$ и $M = 720$ при различных реализациях шума с $\sigma_0 = 0.05$. Максимальное по всем расчетам нормированное среднеквадратичное отклонение между ними оказалось менее чем 0.1, среднее же — 0.033. При этом не было выявлено зависимости отклонения между $\widehat{G}(I)$ и $(G * \rho_{I_C})(I)$ от числа проекций.

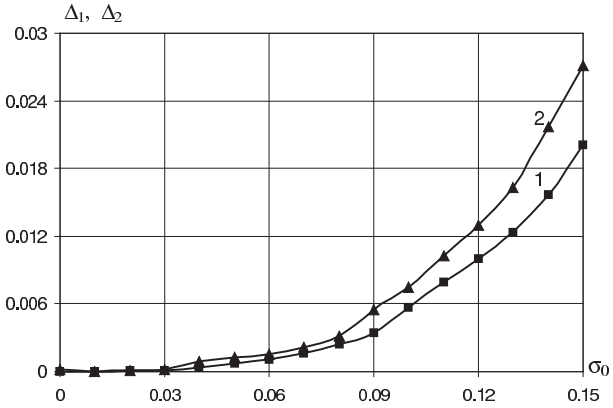


Рис. 2. Зависимости ошибок от уровня шума, $M = 360$

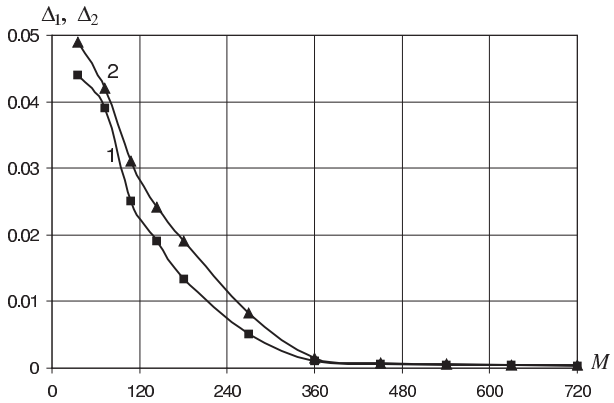
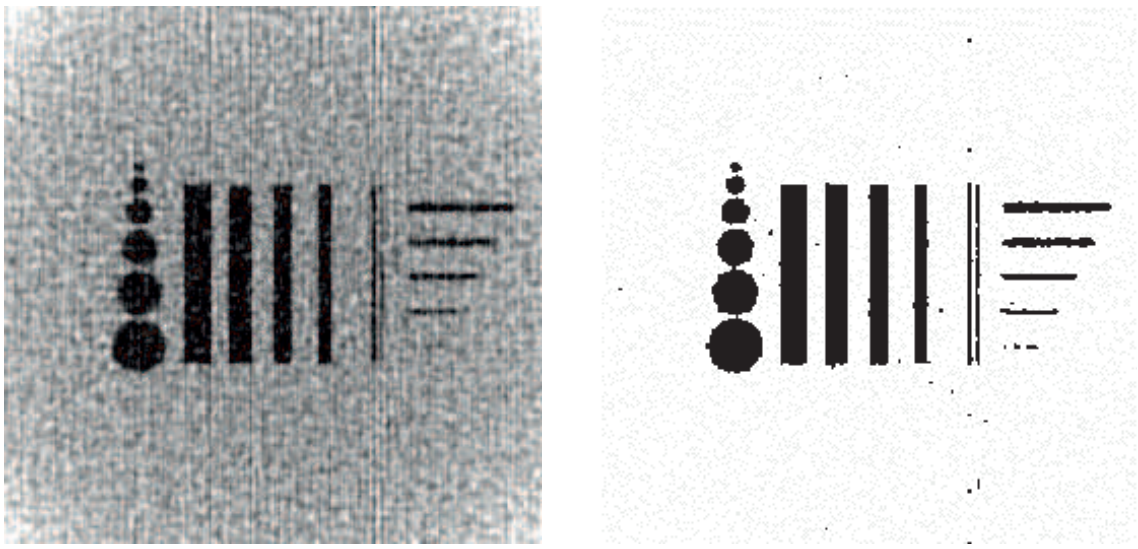


Рис. 3. Зависимости ошибок от числа проекций, $\sigma_0 = 0.05$

Исходя из приведенных выше результатов, можно заключить, что сделанные предположения о распределении яркости пикселей томограммы корректны. Далее приводятся результаты, характеризующие работу предложенного метода. Кривые 1 и 2, представленные на рис. 2 и 3, показывают зависимость критериев Δ_1 и Δ_2 от числа проекций и уровня шума соответственно. Критерий Δ_1 выражает количество ошибок первого рода, деленное на число пикселей, входящих в область D. Аналогично, критерий Δ_2 равен относительному числу ошибочно идентифицированных пикселей.



a) *b*)

Рис. 4. Центральная часть томограммы (a); восстановленная область D (b)

На рис. 4a приведена центральная часть томограммы, полученной при $M = 360$, $\sigma_0 = 0.05$. На рис. 4b — область D, восстановленная разработанным методом по этой томограмме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.
2. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
3. *Shepp L.A., Logan B.F.* The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1974. **21**, № 3. 21–43.
4. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
5. *Лаврентьев М.М., Зеркаль С.М., Трофимов О.Е.* Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999.
6. *Лихачев А.В.* Исследование $1/z^2$ фильтрации в алгоритмах томографии // Автометрия. 2007. **43**, № 3. 57–64.

7. *Лихачев А.В.* Регуляризующая фильтрация проекций в алгоритмах двумерной томографии // Сибирский журнал вычислительной математики. 2008. **11**, № 2. 187–200.
8. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.
9. *Лихачев А.В., Шибаева Ю.А.* Зависимость точности томографической реконструкции от корреляционной функции шума в проекционных данных // Цифровая обработка сигналов. 2015. № 2. 28–34.
10. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
28.09.2018

Tomographic Reconstruction of a Region with a Given Density Value

A. V. Likhachov [1]

[1] *Institute of Automation and Electrometry, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Koptyug prospekt 1, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Senior Scientist, e-mail: ipm1@iae.nsk.su*

Received September 28, 2018

Abstract: A new tomographic method is proposed to find the object's region filled with a homogeneous substance whose density is given. Its essence is that a pixel of the tomogram is assumed to belong to the image of the region if its brightness lies in a certain interval whose boundaries are determined from the minimum condition for the weighted sum of the error probabilities of the first and second kinds. In order to determine these probabilities, some statistical hypotheses on the distribution of pixel brightness in the reconstructed image are formulated. The adopted hypotheses are confirmed by numerical results.

Keywords: two-dimensional tomography, image histogram, distribution of pixel brightness

References

1. A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, and A. A. Timonov, *Mathematical Problems of Computer Tomography* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian].
2. F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography* (Wiley, New York, 1986; Mir, Moscow, 1990).
3. L. A. Shepp and B. F. Logan, "The Fourier Reconstruction of a Head Section," IEEE Trans. Nucl. Sci. **21** (3), 21–43 (1974).
4. G. T. Herman, *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections* (Academic, New York, 1980; Mir, Moscow, 1983).
5. M. M. Lavrent'ev, S. M. Zerkal, and O. E. Trofimov, *Computer Modeling in Tomography and Ill-Posed Problems* (IDMI NGU, Novosibirsk, 1999; VSP, Utrecht, 2001).
6. A. V. Likhachov, "Investigating of $1/z^2$ Filtering in Tomography Algorithms," Avtometriya **43** (3), 57–64 (2007) [Optoelectr., Instrum. Data Process. **43** (3), 239–245 (2007)].
7. A. V. Likhachov, "Regularizing Filtration of Projections for Two-Dimensional Tomography Algorithms," Sib. Zh. Vych. Mat. **11** (2), 187–200 (2008) [Numer. Anal. Appl. **1** (2), 151–162 (2008)].
8. B. V. Gnedenko, *The Theory of Probability* (Nauka, Moscow, 1988; Chelsea, New York, 1989).
9. A. V. Likhachov and Yu. A. Shibaeva, "Dependence of Tomography Reconstruction Accuracy on Noise Correlation Function Involved in Projection Data," Tsifrovaya Obrabot. Signal., No. 2, 28–34 (2015).
10. V. S. Pugachev, *Theory of Probability and Mathematical Statistics* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].