УДК 519.6; 517.958:5 doi 10.26089/NumMet.v19r443

НИЗКОЧАСТОТНАЯ 3D УЛЬТРАЗВУКОВАЯ ТОМОГРАФИЯ: ДВУХЧАСТОТНЫЙ МЕТОД

А. В. Гончарский[1], С. Ю. Романов[2], С. Ю. Серёжников[3]

Статья посвящена разработке эффективных методов 3D акустической томографии. Обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача для уравнения гиперболического типа относительно неизвестных функций скорости звука и коэффициента поглощения в трехмерном пространстве. Математическая модель описывает такие явления, как дифракция, рефракция, переотражение и поглощение ультразвука. Трудности решения обратной задачи связаны с ее нелинейностью. Предложен метод низкочастотной 3D акустической томографии, который основан на использовании коротких зондирующих импульсов двух центральных частот f_1 и $f_2 > f_1$, не превосходящих 500 кГц. В качестве алгоритма решения обратной задачи используется итерационный градиентный метод на частоте f_2, в котором в качестве начального приближения используются распределения скорости звука и коэффициента поглощения, полученные как результат решения обратной задачи на частоте f_1. Эффективность предложенного метода акустической томографии проиллюстрирована решением модельных задач при параметрах, близких к задачам ультразвукового зондирования мягких тканей в медицине. Предложенный метод низкочастотной 3D акустической томографии позволяет получить пространственное разрешение порядка 2–3 мм при контрасте скорости не более 10%. Разработанные алгоритмы легко распараллеливаются на GPU-кластерах.

Ключевые слова: ультразвуковая томография, волновое уравнение, нелинейная коэффициентная обратная задача, итерационные алгоритмы.

1. Введение. Настоящая статья посвящена методам акустической томографии, более конкретно — ультразвуковой томографии для диагностики мягких тканей в медицине. Дифференциальная диагностика рака молочной железы является одной из самых актуальных проблем современной медицины. Существенного прогресса в лечении рака молочной железы можно достичь, если удастся диагностировать заболевание на ранних стадиях его развития, когда размер новообразований не превосходит 2–3 мм.

Используемые в настоящее время рентгеновские томографы обладают достаточным разрешением, но не могут применяться для регулярных обследований. Использование ЯМР-томографов ограничивает высокая цена оборудования. Наиболее перспективными для регулярных исследований мягких тканей в медицине могли бы быть ультразвуковые методы. Однако все существующие в настоящее время ультразвуковые приборы не являются томографическими. Получаемые этими приборами изображения отражений (reflectivity images) выявляют лишь границы неоднородностей и не позволяют осуществлять характеризацию тканей с достаточно высоким разрешением. Разработка ультразвуковых томографов с высоким разрешением для исследования мягких тканей является одной из важнейших задач современной медицины.

В последние годы разработкой ультразвуковых томографов для дифференциальной диагностики рака молочной железы интенсивно занимается несколько групп в Германии, США и России. Разработки находятся на уровне макетов и прототипов [1–5]. Основные проблемы в акустической томографии связаны с нелинейностью обратных задач восстановления томографического изображения. Кроме того, особенностью задачи является низкий контраст объекта — разница в скорости звука в здоровых и пораженных тканях не превосходит 10% [6]. Один из подходов в ультразвуковой томографии заключается в использовании упрощенных линеаризованных моделей [7, 8]. Однако упрощенная модель позволяет осуществлять лишь грубую характеризацию тканей [9], ее точности недостаточно для обнаружения мелких и низкоконтрастных неоднородностей. В работах [4, 10] линейная модель усовершенствована с помощью метода

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru
[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: romanov60@gmail.com
[3] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; электроник, e-mail: s2110sj@gmail.com

синтезированной апертуры. Таким образом удается частично учесть дифракцию. Такая модель хорошо работает для точечных включений в однородной среде, однако восстановление изображения сплошной неоднородной среды представляет значительные трудности. В работах [11, 5] используется параболическое приближение, которое работает в схеме на прохождение в небольшом диапазоне углов. Разработан макет томографического устройства, в котором используются высокие частоты в диапазоне 1.5 МГц.

Наиболее перспективным является использование волновых (full-wave) моделей, позволяющих учесть дифракцию, рефракцию, переотражение ультразвука и работающих для волн, распространяющихся в любых направлениях, — как на прохождение, так и на отражение [12, 13].

Однако восстановление трехмерного томографического изображения в волновой модели требует решения нелинейных обратных задач большой размерности. Обратная задача в такой постановке рассматривается как коэффициентная обратная задача для волнового уравнения. Существует метод решения таких задач с помощью функции Грина, однако он имеет огромную вычислительную сложность [14, 15] и поэтому применим только для объектов размером в несколько длин волн.

Прорывные результаты в области решения задач ультразвуковой томографии в волновых моделях были получены в последние несколько лет в работах [15–18]. В разных постановках получено точное представление для градиента функционала невязки между экспериментальными данными и смоделированным волновым полем. На основе представления для градиента разработаны эффективные итерационные алгоритмы [19–23].

В существующих прототипах ультразвуковых томографов в основном используются высокие частоты — в диапазоне 1.5 МГц и выше. Зачастую это связано с использованием лучевых моделей, поскольку чем выше частота, тем точнее лучевая модель. Однако высокие частоты сильно поглощаются в тканях [6, 24]. Математические модели, которые описывают процесс поглощения, не являются совершенными, что приводит к значительным ошибкам модели. С этой точки зрения перспективным направлением представляется низкочастотная волновая томография, где используются частоты до 500 кГц. Это направление получило развитие в работах [22, 25–27].

Использование низких частот для акустических томографических исследований было предложено еще в конце 90-х годов [28]. В работе [16] возможности низкочастотной томографии исследуются в двумерной модели без учета эффектов поглощения. В настоящей статье обратная задача рассматривается как трехмерная коэффициентная обратная задача восстановления как скоростного разреза $c(\boldsymbol{r})$, так и коэффициента поглощения $a(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$.

Основная идея низкочастотной акустической томографии состоит в том, что для низких частот проще обеспечить прецизионное измерение волнового фронта рассеянного излучения. При частотах менее 500 кГц для этих целей вполне можно использовать детекторы размером порядка 2 мм, расположенные с шагом тоже порядка 2 мм. Для решения этой задачи на частотах 1.5 МГц необходимо располагать приемники с шагом менее 1 мм либо использовать очень большое число источников.

Одной из основных математических проблем решения обратных задач акустической томографии является их нелинейность, которая приводит к тому, что функционал невязки между измеренным детекторами и смоделированным волновым полем не является выпуклым. Как следствие, использование градиентных методов минимизации функционала гарантирует сходимость лишь к локальному, но не к глобальному минимуму.

Существуют различные подходы построения методов поиска глобального минимума невыпуклых функционалов. К таким задачам можно свести, например, решение нелинейных интегральных уравнений. Этот подход в математике представлен в работе [29] и получил название тензорных поездов. В работах [17, 30] сделана попытка построения глобальных методов (следуя терминологии авторов) решения коэффициентных обратных задач.

В настоящей статье предлагается двухчастотный метод поиска решений 3D коэффициентных обратных задач акустической томографии. Для решения обратной задачи на более высокой частоте f_2 используется градиентный метод минимизации функционала невязки, в котором в качестве начального приближения используются распределения скорости звука и коэффициента поглощения, полученные как результат решения обратной задачи на более низкой частоте f_1. Двухчастотный метод расширяет область сходимости итерационных градиентных методов решения обратной задачи ультразвуковой томографии. В первую очередь данный метод ориентирован на решение задач акустической томографии для диагностики мягких тканей в медицине. Эффективность предложенного метода иллюстрируется решением модельных задач. Разработанные алгоритмы легко распараллеливаются с использованием GPU-кластеров.

2. Постановка и метод решения обратной задачи 3D акустической томографии, схема эксперимента. В задаче акустической томографии нужно восстановить внутреннюю структуру объекта по измерениям акустического давления $u(\boldsymbol{r},t)$ на некоторой поверхности, окружающей объект.

На рис. 1 приведена схема 3D акустической томографии, в которой измерения акустического поля производятся на поверхности цилиндра. Источники зондирующих импульсов располагаются на той же поверхности цилиндра. Такая схема томографического обследования вполне может быть использована для ультразвуковой маммографии. Поскольку на верхней и нижней грани детекторы отсутствуют, эта задача относится к классу задач томографии с неполными данными.

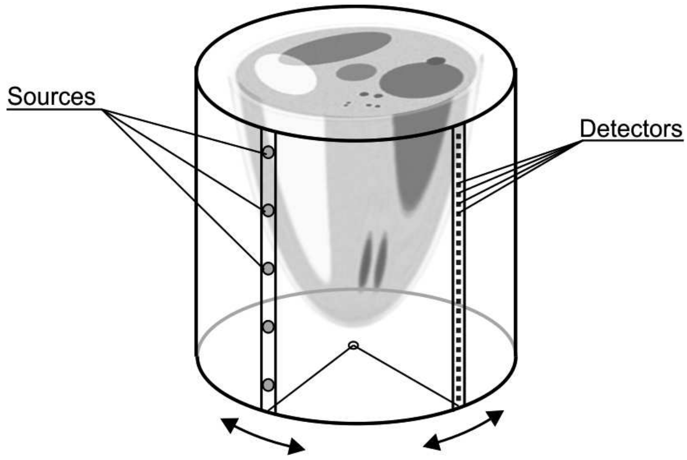


Рис. 1. Схема эксперимента

В настоящей работе используется скалярная волновая модель, которая описывает все волновые эффекты, такие как дифракция ультразвука, рефракция, переотражение и т.п. Важным параметром в скалярной модели является поглощение ультразвука в среде. В скалярной волновой модели акустическое давление $u(\boldsymbol{r},t)$ описывается уравнением гиперболического типа.

В качестве модели поглощения в настоящей работе используется простейшая модель, в которой поглощение не зависит от частоты [21]. В такой модели обратная задача ультразвуковой томографии является коэффициентной обратной задачей, в которой необходимо по данным измерений волнового поля на цилиндрической поверхности S при разных положениях источников восстановить коэффициенты $c(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$ в уравнении

$$c(\boldsymbol{r})u_{tt}(\boldsymbol{r},t) + a(\boldsymbol{r})u_t(\boldsymbol{r},t) - \Delta u(\boldsymbol{r},t) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q})\cdot f(t); \tag{1}$$

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0} = 0, \quad u_t(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0} = 0, \partial_n u(\boldsymbol{r},t)\big|_{ST} = p(\boldsymbol{r},t). \tag{2}$$

Здесь $c(\boldsymbol{r}) = 1/v^2(\boldsymbol{r})$, где $v(\boldsymbol{r})$ — скорость звука в среде и $\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^N$ $(N=2,3)$ — положение точки в пространстве; u — акустическое давление; Δ — оператор Лапласа по переменной $\boldsymbol{r}$. Зондирующий импульс, генерируемый точечным источником в точке $\boldsymbol{q}$, описывается функцией $f(t)$, $\partial_n u(\boldsymbol{r},t)\big|_{ST}$ — производная вдоль нормали к поверхности цилиндра S, где $(\boldsymbol{r},t)\in S\times(0,T)$, T — время измерения, функция $p(\boldsymbol{r},t)$ известна, $a(\boldsymbol{r})$ описывает поглощение в среде. Соотношения (2) представляют собой условия Неймана на границе расчетной области и начальные условия.

Предполагается, что неоднородность среды вызвана изменениями скорости звука и коэффициента поглощения, а вне исследуемой области скорость звука постоянна и равна $c^{-0.5}(\boldsymbol{r}) = v(\boldsymbol{r}) = v_0 = \text{const}$, где значение v_0 известно. Функция $a(\boldsymbol{r})$ вне исследуемой области равна 0. Эта простейшая модель распространения волн с учетом поглощения (1) может использоваться для описания ультразвуковых волн в мягких тканях.

Рассматриваемая коэффициентная обратная задача относится к некорректно поставленным задачам. Методы решения таких задач были разработаны в [31–33].

Поскольку в реальных экспериментах всегда присутствует погрешность измерения, мы формулируем обратную задачу как задачу минимизации функционала невязки $\Phi(c(\boldsymbol{r}),a(\boldsymbol{r}))$ по его аргументу (c,a):

$$\Phi\big(u(c,a)\big) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_S \big(u(\boldsymbol{s},t)-U(\boldsymbol{s},t)\big)^2\,ds\,dt. \tag{3}$$

Здесь $U(\boldsymbol{s},t)$ — экспериментальные данные на поверхности цилиндра S за время $(0,T)$, а $u(\boldsymbol{s},t)$ — решение прямой задачи (1)–(2) при заданных $c(\boldsymbol{r}) = 1/v^2(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$. Заметим, что при использовании нескольких источников зондирующего излучения функционал невязки представляет собой сумму значений невязки (3), полученных для каждого источника.

Представления для градиента $\Phi'(c,a)$ функционала невязки в различных постановках для двух- и трехмерного случая были получены в работах [16, 34, 35]. В строгой математической постановке выражения для градиента функционала невязки для обратной задачи (1)–(2) в модели, учитывающей как дифракционные эффекты, так и поглощение, были получены в работах авторов [18, 19, 25].

Градиент $\Phi'\big(u(c,a)\big) = \big\{\Phi'_c(u), \Phi'_a(u)\big\}$ функционала (3) относительно вариации скорости звука и коэффициента поглощения $\{dc, da\}$ имеет вид

$$\Phi'_c\big(u(c)\big) = \int\limits_0^T w_t(\boldsymbol{r},t)u_t(\boldsymbol{r},t)\,dt, \quad \Phi'_a\big(u(a)\big) = \int\limits_0^T w_t(\boldsymbol{r},t)u(\boldsymbol{r},t)\,dt. \tag{4}$$

Здесь $u(\boldsymbol{r},t)$ — решение основной задачи (1)–(2), а $w(\boldsymbol{r},t)$ — решение "сопряженной" задачи при заданных $c(\boldsymbol{r})$, $a(\boldsymbol{r})$, $u(\boldsymbol{r},t)$:

$$w_{tt}(\boldsymbol{r},t) - a(\boldsymbol{r})w_t(\boldsymbol{r},t) - \Delta w(\boldsymbol{r},t) = 0; \tag{5}$$

$$w(\boldsymbol{r},t=T) = 0, \quad w_t(\boldsymbol{r},t=T) = 0, \quad \partial_n w\big|_{ST} = u\big|_{ST} - U. \tag{6}$$

В тех точках границы S, где экспериментальные данные отсутствуют, ставится граничное условие $\partial_n w\big|_{ST} = 0$. Таким образом, для вычисления градиента (4) необходимо решить прямую задачу (1)–(2) и "сопряженную" задачу (5)–(6).

Имея выражение для градиента (4), можно построить различные итеративные алгоритмы минимизации функционала невязки. Приведем простейший вариант — метод наискорейшего спуска. Будем считать, что найдены коэффициенты $c^{(n)}$ и $a^{(n)}$ на n-й итерации. Для построения следующего итерационного приближения вычислим градиент $\big\{\Phi'_c(u), \Phi'_a(u)\big\}$ в точке $\big\{c^{(n)}, a^{(n)}\big\}$ и решим задачу минимизации одномерного функционала вдоль градиента. В качестве следующего итерационного приближения выберем точку $\big\{c^{(n+1)}, a^{(n+1)}\big\} = \arg\min\limits_{\alpha>0} \Phi\left(c^{(n)} - \alpha\Phi'_c, a^{(n)} - \alpha\Phi'_a\right)$ и т.д. Методы минимизации, основанные на явном представлении градиента, позволяют предложить эффективные численные алгоритмы приближенного решения задач акустической томографии [36, 37].

В реальных задачах, таких как задача дифференциальной диагностики заболеваний молочной железы, типичным случаем является отсутствие экспериментальных данных на верхней границе или на обоих торцах цилиндра. В этом случае для вычисления $w(\boldsymbol{r},t)$ согласно (5)–(6) используется условие $\partial_n w\big|_{ST} = 0$. На модельных расчетах показано, что в такой постановке удается получать приближенное решение задачи как для $c(\boldsymbol{r})$, так и для $a(\boldsymbol{r})$.

3. Численные методы решения обратных задач низкочастотной ультразвуковой томографии. Для решения трехмерной обратной задачи будем использовать метод конечных разностей на равномерных сетках. В такой постановке решение дифференциальных уравнений сводится к решению разностных уравнений. На области изменения аргументов введем равномерную дискретную сетку

$$x_i = ih, \quad 0 \leqslant i < n; \quad y_j = jh, \quad 0 \leqslant j < n; \quad z_l = lh, \quad 0 \leqslant l < n; \quad t_k = k\tau, \quad 0 \leqslant k < m,$$

где h — шаг сетки по пространственным переменным, τ — шаг сетки по времени. Параметры h и τ связаны условием устойчивости Куранта $\sqrt{3}\,c^{-0.5}\tau < h$. Здесь $c^{-0.5} = v$ является скоростью звука. Для аппроксимации уравнения (1) используем следующую разностную схему 2-го порядка:

$$c_{ijl}\,\frac{u^{k+1}_{ijl} - 2u^k_{ijl} + u^{k-1}_{ijl}}{\tau^2} + a_{ijl}\,\frac{u^{k+1}_{ijl} - u^{k-1}_{ijl}}{\tau} - \frac{\Delta u^k_{ijl}}{h^2} = 0. \tag{7}$$

Здесь $u^k_{ijl} = u(x_i, y_j, z_l, t_k)$ — значения $u(\boldsymbol{r},t)$ в точке (i,j,l) в момент времени k; c_{ijl} и a_{ijl} — значения $c(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$ в точке (i,j,l). Первое слагаемое аппроксимирует $c(\boldsymbol{r})u_{tt}(\boldsymbol{r},t)$, второе — $a(\boldsymbol{r})u_t(\boldsymbol{r},t)$. Символом Δ обозначен дискретный лапласиан, который вычисляется по формуле

$$\Delta u^k_{i_0,j_0,l_0} = \sum_{i=i_0-1}^{i_0+1}\,\sum_{j=j_0-1}^{j_0+1}\,\sum_{k=k_0-1}^{k_0+1} b_{ijl}u^k_{ijl}.$$

Коэффициенты b_{ijl} приведены, например, в [38]. Выделяя член u^{k+1}_{ijl} для $(k+1)$-го слоя по времени, получим явную формулу для расчета распространения звуковой волны последовательно по времени. В качестве граничных условий для модельных расчетов в настоящей статье выбиралось условие неотражения на границе [39]:

$$\partial_n u\big|_{ST} = -c^{-0.5}\partial_t u\big|_{ST}.$$

Аналогично выписывается разностная схема для w "в обратном времени". Время T выбирается достаточно большим, чтобы прошедшие и отраженные от объекта волны успевали дойти до приемников. Условие (6) в разностной аппроксимации, например на грани $z = z_n$, записывается в виде

$$\frac{w^k_{ij\,l+1} - w^k_{ij\,l-1}}{2h} = u^k_{ijl} - U^k_{ijl}.$$

В модельных расчетах исследуемая область окружена однородной средой, в которой располагается источник ультразвука. Процесс распространения зондирующего импульса в трехмерной однородной среде для волнового уравнения (1), как известно, описывается функцией

$$u(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\|}\, f\big(t - \|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\| \cdot c_0^{0.5}\big),$$

где $\|\cdot\|$ — расстояние от точки $\boldsymbol{r}$ до положения источника $\boldsymbol{r}_0$. Эта формула позволяет вычислить $u(\boldsymbol{r}, t)$ и $u_t(\boldsymbol{r}, t)$ при некотором t. Типичная форма зондирующего импульса приведена в разделе 5 на рис. 7а.

Градиент (4) функционала невязки вычислялся по разностной формуле

$$\Phi'_c(x_i, y_j, z_l) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\left(u^{k+1}_{ijl} - u^k_{ijl}\right)\left(w^{k+1}_{ijl} - w^k_{ijl}\right)}{\tau}, \quad \Phi'_a(x_i, y_j, z_l) = \sum_{k=0}^{m} \frac{u^k_{ijl}\left(w^{k+1}_{ijl} - w^k_{ijl}\right)}{\tau}. \qquad (8)$$

Для решения обратной задачи используется метод наискорейшего спуска, в котором итерационная последовательность $c^{(n)}$, $a^{(n)}$ для минимизации функционала невязки (3) строится следующим образом.

1. В качестве приближения на начальной итерации ($n = 0$) используется $c^{(0)} = c_0 = \text{const}$, $a^{(0)} = 0$.
2. Для $c^{(n)}$, $a^{(n)}$ решается прямая задача (1)–(2) в разностной аппроксимации. С помощью явной разностной схемы (7) решается прямая задача вычисления значения $u(\boldsymbol{r}, t)$ на каждом из детекторов.
3. Для функции $u(\boldsymbol{r}, t)$, полученной на каждом из детекторов, решается сопряженная задача (5)–(6) в разностной аппроксимации. В результате получаем $w(\boldsymbol{r}, t)$ в каждой точке сетки.
4. Используя полученные значения $u(\boldsymbol{r}, t)$ и $w(\boldsymbol{r}, t)$, вычисляем градиент $\Phi'_c(u)$, $\Phi'_a(u)$ функционала невязки по формуле (8).
5. Зная градиент в точке $\left\{c^{(n)}, a^{(n)}\right\}$, находим минимум функционала $\Phi\left(c^{(n)} - \gamma\Phi'_c,\, a^{(n)} - \gamma\Phi'_a\right)$ по параметру γ в области $\gamma > 0$.
6. Найденная точка минимума функционала принимается за $\left\{c^{(n+1)}, a^{(n+1)}\right\}$. Процесс возвращается к шагу 2.

Число итераций n является параметром регуляризации этого метода [33]. Процесс останавливается, когда значение функционала невязки становится равным априорной оценке погрешности входных данных.

4. Проблема сходимости итерационных алгоритмов решения обратных задач 3D волновой томографии. Обратная задача волновой томографии в предложенной постановке является нелинейной коэффициентной обратной задачей. Типичной ситуацией для нелинейных задач является невыпуклость функционала невязки, или, что то же самое, наличие у него локальных минимумов. В математике существует достаточно большое количество работ, посвященных поиску глобального минимума в такой ситуации. К сожалению, на строгом математическом уровне без наличия дополнительных жестких условий на функционал невязки не существует методов, гарантированно сходящихся к глобальному минимуму. Тем не менее, в силу привлекательности самой задачи такие исследования продолжаются и в конкретных приложениях. Примером таких исследований являются работы [17, 35], посвященные так называемым “C-глобальным” алгоритмам поиска приближенного решения в коэффициентных задачах в уравнениях гиперболического типа.

С точки зрения авторов статьи представляется перспективной попытка исследования поведения функционала невязки в зависимости от физических характеристик, например таких, как длина волны зондирующих импульсов. Конечной целью работы является разработка алгоритмов, позволяющих получить приближенные решения задач волновой томографии с некоторого начального приближения. В качестве начального приближения в задачах ультразвуковой томографической диагностики мягких тканей представляется естественным выбирать начальное приближение c_0, равное скорости распространения ультразвука в воде.

В этом разделе мы попытаемся обозначить круг физических параметров, для которых итерационные алгоритмы поиска приближенного решения сходятся к точке глобального минимума. Попробуем исследовать, как влияет длина волны зондирующего излучения на сходимость градиентных алгоритмов минимизации.

Рассмотрим простейшую одномерную задачу. Ультразвуковой импульс распространяется в одномерной среде, скорость распространения в которой задана соотношениями $c(x) = \bar{c}$ для $|x| \leqslant r$, $c(x) = c_0$ для $|x| > r$. На рис. 2 приведена схема распространения зондирующего импульса от источника S.

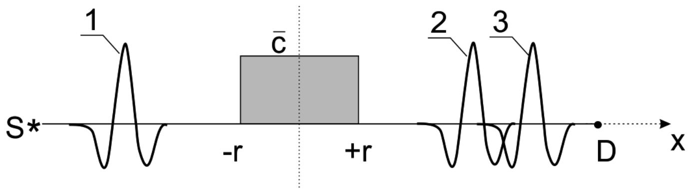


Рис. 2. Схема расположения зондирующих импульсов при наличии и отсутствии неоднородности

Зондирующий импульс 1 на рис. 2 распространяется от источника S со скоростью c_0. В области неоднородности $|x| < r$ зондирующий импульс распространяется со скоростью $\bar{c}$. Будем считать, что при прохождении неоднородности форма зондирующего импульса не меняется. Если бы неоднородность отсутствовала,то зондирующий импульс на рис. 2 в некоторый момент времени T занял бы положение 2. Разница скоростей распространения ультразвука $\bar{c}$ и c_0 в области неоднородности приводит к тому, что зондирующий импульс после прохождения неоднородности сдвигается и занимает некоторое положение 3 в момент времени T. Детектор D регистрирует амплитуду импульса как функцию от времени $U(t)$. Будем считать, что положение неоднородности задано, а точное значение $\bar{c}$ неизвестно. Обратная задача состоит в определении неизвестной скорости звука $\bar{c}$ в области неоднородности $|x| < r$ по регистрируемой детектором функции $U(t)$.

Введем функционал невязки $\Phi(c) = \left\|U(t) - u(c,t)\right\|^2$, где $U(t)$ — зарегистрированный детектором импульс, а $u(c,t)$ — смоделированный импульс в точке D при скорости распространения волны в области неоднородности, равной c. Точка глобального минимума функционала $\Phi(c)$ является точным решением обратной задачи. Значение функционала в этой точке равно 0. Обозначим разницу во времени прихода импульса при скоростях распространения c и c_0 как $\Delta t(c) = 2(r/c_0 - r/c)$. Поскольку скорость звука c и задержка Δt связаны взаимно однозначно, вместо функционала $\Phi(c)$ будем рассматривать функционал $\Phi(\Delta t)$.

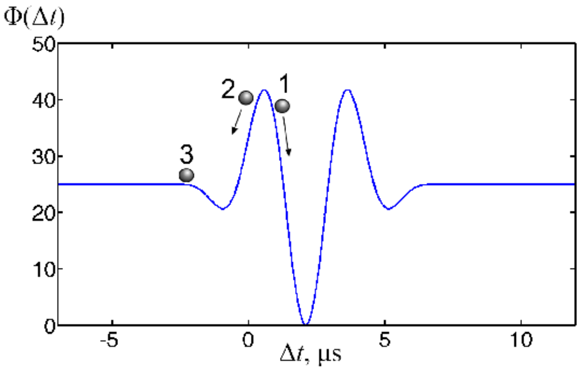


Рис. 3. График функционала невязки как функции от Δt для одномерной задачи

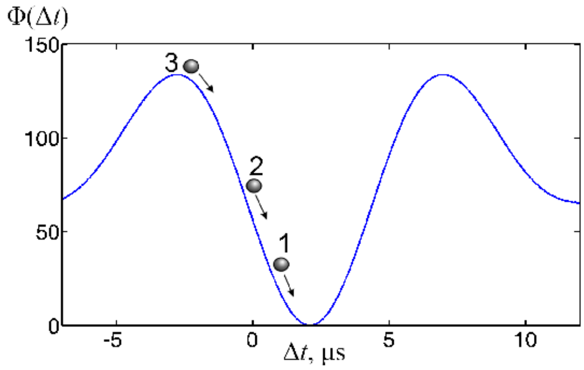


Рис. 4. Сходимость градиентного метода с различных начальных приближений для увеличенной ширины импульса

На рис. 3 изображен график функционала невязки $\Phi(\Delta t) = \left\|U(t) - u\big(c(\Delta t), t\big)\right\|^2$ в зависимости от разницы во времени прихода импульсов Δt. Здесь $\left\|U(t) - u\big(c(\Delta t), t\big)\right\|^2 = \int\limits_{t=0}^{T} \Big(U(t) - u\big(c(\Delta t), t\big)\Big)^2\, dt$.

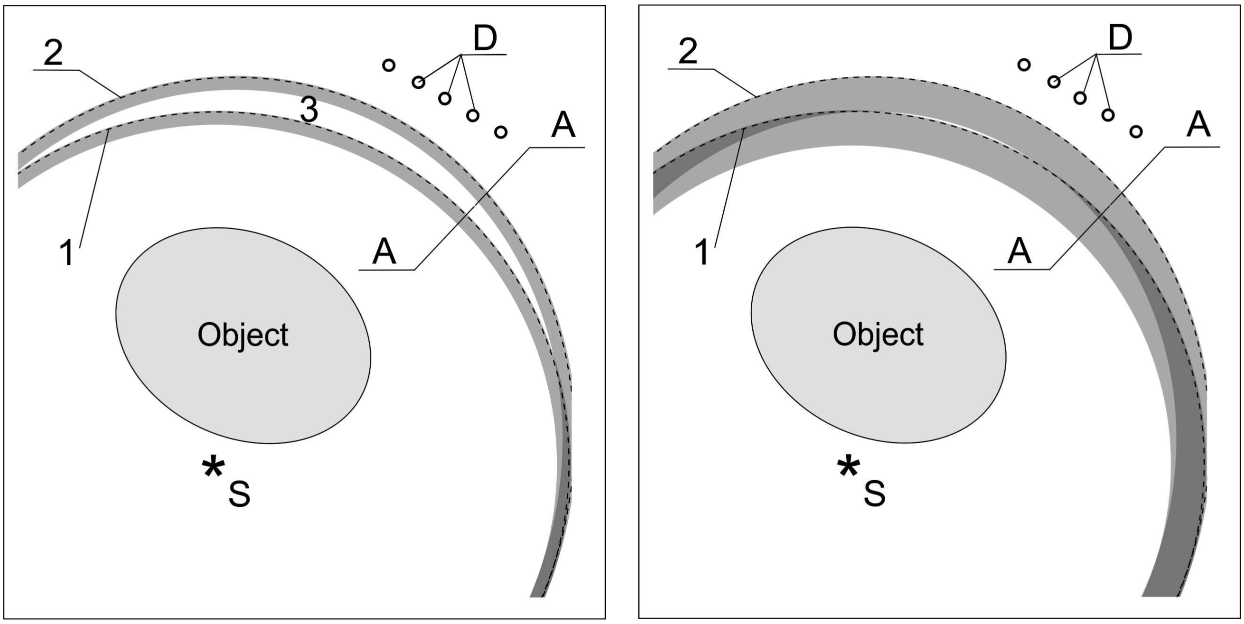
Как видно из рис. 3, форма графика функционала невязки примерно повторяет форму зондирующего импульса. Для решения обратной задачи поиска неизвестной скорости звука в области неоднородности будем использовать градиентную итерационную процедуру минимизации функционала $\Phi(\Delta t)$.

Поскольку функционал $\Phi(\Delta t)$ не является выпуклым, то такой метод минимизации, очевидно, сходится не со всякого начального приближения, что продемонстрировано на рис. 3. С начального приближения 1 градиентный метод сходится к глобальному минимуму. С начального приближения 2 градиентный метод сходится к локальному минимуму функционала. В точке 3 значение $\Phi' = 0$, поэтому градиентный метод с этого начального приближения тоже не сходится. Заметим, что если смоделированный и принятый импульсы на рис. 2 не пересекаются, то градиент функционала невязки равен нулю.

Ширина области сходимости к глобальному минимуму функционала невязки $\Phi(\Delta t)$ пропорциональна ширине зондирующего импульса. Увеличивая длину волны, мы расширяем область сходимости итерационного процесса минимизации функционала невязки. Это проиллюстрировано на рис. 4. При увеличенной ширине импульса все начальные приближения 1–3 попадают в область глобального минимума.

Отсюда следует, что с точки зрения сходимости итерационных методов представляется перспективным использование зондирующих импульсов как минимум двух длин волн λ_1 и λ_2. Пусть для определенности $\lambda_1 > \lambda_2$. Сделаем несколько итераций градиентного метода минимизации функционала невязки на длине волны λ_1, для того чтобы попасть в область сходимости итерационного процесса для длины волны λ_2. Эта идея заложена в основу предлагаемого двухчастотного метода решения обратных задач ультразвуковой томографии.

В реальности мы имеем дело с трехмерной задачей. Исследуемый объект расположен в трехмерном пространстве и характеризуется в простейшем случае скоростным разрезом $c(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$. Вне исследуемого объекта скорость звука $c(\boldsymbol{r}) = \text{const} = c_0$. Объект зондируется импульсами, излучаемыми источниками S. Детекторы D регистрируют волновое поле $U(t)$ как функцию от времени. Оказывается, что и в трехмерном случае ситуация аналогична описанной выше в одномерном примере. На рис. 5 представлены схемы расположения волновых фронтов при зондировании исследуемого объекта короткими импульсами, излучаемыми источником, расположенным в точке S. Длина волны импульсов равна $\lambda = 5$ мм для рис. 5а и $\lambda = 12$ мм для рис. 5б.



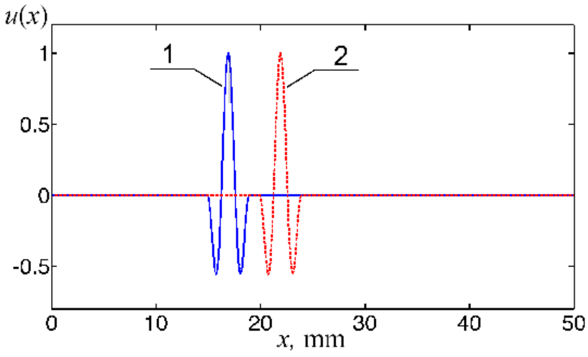
а) б)

Рис. 5. Схема расположения волновых фронтов зондирующих импульсов при наличии и отсутствии объекта: а) $\lambda = 5$ мм, б) $\lambda = 12$ мм

Будем считать, что используются импульсы той же формы, что и в одномерном случае (рис. 2).

Пунктирная линия 1 на рис. 5а и 5б показывает расположение волнового фронта от источника при отсутствии объекта в некоторый момент времени T. Пунктирная линия 2 показывает расположение волнового фронта волны, прошедшей через исследуемый объект. Серая область на рис. 5а и 5б соответствует ширине импульса (pulse width). В этой области сосредоточена максимальная энергия волны в момент времени T. Если взять сечение волнового фронта по линии A–A, то получится картина, аналогичная одномерному случаю.

На рис. 6 показана схема расположения импульсов при наличии и отсутствии объекта в сечении A–A соответственно для $\lambda = 5$ мм (рис. 6а) и для $\lambda = 12$ мм (рис. 6б). Цифрой 1 показано положение смоделированного импульса $u(\boldsymbol{r}, t)$, распространяющегося в однородной среде со скоростью c_0. Цифрой 2 показано положение импульса U, прошедшего через объект. Видно, что импульсы при $\lambda = 5$ мм не пересекаются, и между волновыми фронтами есть область 3, в которой $u \approx 0$ и $U \approx 0$. Наличие этой зоны приводит к тому, что градиент функционала невязки между зарегистрированным импульсом 2 и смоделированным импульсом 1 равен нулю аналогично одномерному случаю. При этом итерационный процесс градиентной минимизации функционала невязки не сходится. Для $\lambda = 12$ мм импульсы 1 и 2 пересекаются. Тогда начальное приближение c_0 попадает в область глобального минимума и итерационный процесс сходится.



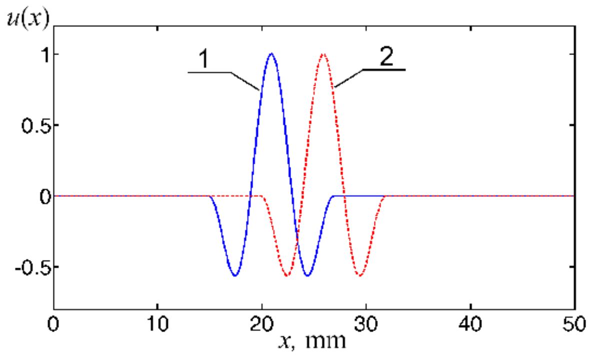


Рис. 6. Схема расположения зондирующих импульсов при наличии и отсутствии объекта в сечении А–А: а) $\lambda = 5$ мм, б) $\lambda = 12$ мм

Ситуация в трехмерном случае в принципе аналогична той, которая была показана в одномерном случае. Разница между одномерным и трехмерным случаем в том, что в одномерном варианте используется только один источник и один приемник. В реальных задачах акустической томографии используются десятки положений источников и тысячи детекторов, которые окружают исследуемую область. Функционал невязки (3) суммируется как по всем источникам, так и по всем детекторам.

Как было показано в этом разделе, для сходимости итерационного процесса важной проблемой является выбор начального приближения. Если априорная информация о структуре неоднородности отсутствует, то представляется естественным в качестве начального приближения использовать скорость звука c_0 в однородной среде, окружающей исследуемый объект. Такой подход является вполне естественным для диагностики мягких тканей в медицине, где отличие скорости звука в мягких тканях от скорости звука в воде составляет не более 10%.

Рассмотренные примеры позволяют сделать следующие выводы.

1) Функционал невязки в задаче акустической томографии не является выпуклым, поэтому градиентный метод сходится к глобальному минимуму не с любого начального приближения.

2) Чем больше длина волны зондирующих импульсов, тем шире область начальных приближений, с которых градиентные методы начинают работать.

3) Представляется целесообразным предложить двухчастотный метод решения обратных задач акустической томографии. В этом методе эксперимент осуществляется на двух разных частотах f_1 и f_2, $f_1 < f_2$, причем частоты f_1 и f_2 отличаются в 2–3 раза. Приближенное решение получается в результате минимизации функционала невязки на частоте f_2, при этом в качестве начального приближения выбирается приближенное решение, полученное в результате минимизации функционала невязки на частоте f_1.

5. Модельные расчеты. Схема модельного эксперимента для трехмерной задачи ультразвуковой томографии приведена на рис. 1. В модельной задаче использовалось 24 источника, что соответствует схеме эксперимента, в котором вращающаяся штанга с 4 закрепленными на ней источниками занимает 6 положений с шагом 60 градусов. Приемники располагались с шагом 2 мм на цилиндрической поверхности диаметром и высотой 130 мм. Разностная сетка содержит $448 \times 448 \times 448$ точек. Длительность зондирующих импульсов была выбрана 5 мкс и 12 мкс, что соответствует средним длинам волн $\lambda = 5$ и 12 мм.

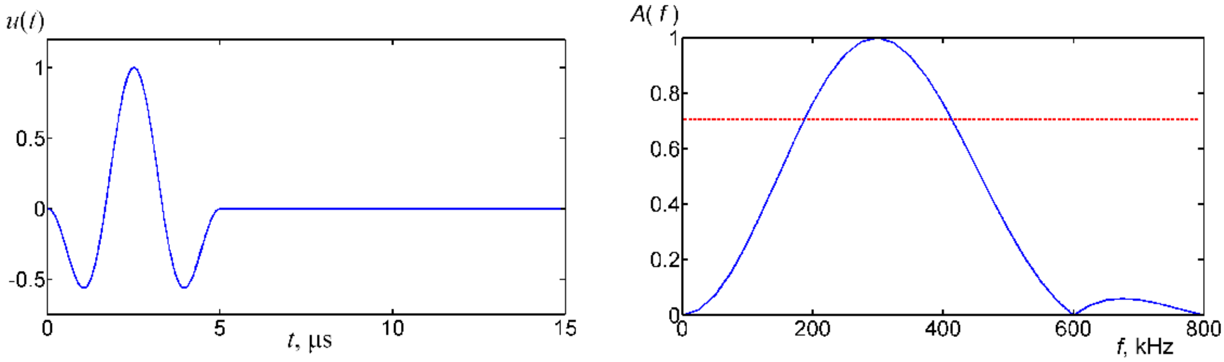
Начальный импульс, излучаемый точечным источником, вычислялся по формуле

$$u(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{3\lambda}\right) \sin\left(\frac{6\pi x}{3\lambda}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.5\lambda.$$

Форма импульса с длиной волны 5 мм представлена на рис. 7а, а его спектр — на рис. 7б. Форма импульса с длиной волны 12 мм представлена на рис. 8а, а его спектр — на рис. 8б.

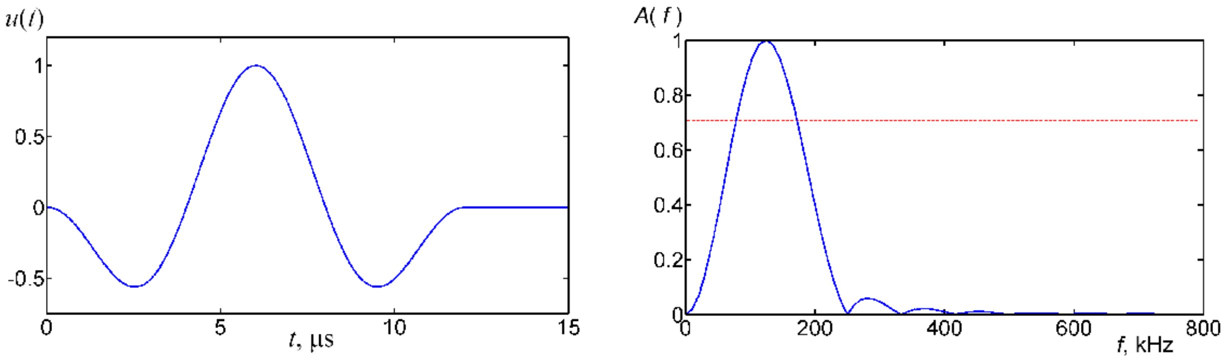
Вычислительный эксперимент состоял в решении прямой задачи распространения ультразвуковых волн и получения сигналов $U(\boldsymbol{s}, t)$ на детекторах, расположенных в точках $\boldsymbol{s}$ цилиндрической поверхности.

Затем полученные данные $U(\boldsymbol{s}, t)$ использовались для решения обратной задачи восстановления скорости звука $c(\boldsymbol{r})$ и коэффициента поглощения $a(\boldsymbol{r})$.



а) б)

Рис. 7. Зондирующий импульс для $\lambda = 5$ мм: а) форма импульса, б) спектр импульса



а) б)

Рис. 8. Зондирующий импульс для $\lambda = 12$ мм: а) форма импульса, б) спектр импульса

Фантом скорости звука и поглощения, для которого решалась прямая задача, приведен на рис. 9. Параметры фантома выбирались близкими к параметрам мягких тканей: диапазон изменения скорости звука $c(\boldsymbol{r})$ составляет 1400–1600 м/с, диапазон изменения коэффициента поглощения $a(\boldsymbol{r})$ — 0–1.2 дБ/см. Скорость звука в окружающей среде c_0 равна 1500 м/с. В используемой модели распространения волн (1)–(2) поглощение не зависит от частоты.

На рис. 9а приведено вертикальное сечение скорости звука $c(\boldsymbol{r})$ фантома, на рис. 9б — горизонтальное сечение. На рис. 9в приведено вертикальное сечение коэффициента поглощения $a(\boldsymbol{r})$ фантома, на рис.9г — горизонтальное сечение. Фантом содержит неоднородности размером от 2 мм с различными значениями параметров c и a и область, заполненную мелкой текстурой с размерами элементов от 0.3 до 2 мм. Будем обозначать распределение скорости звука $c(\boldsymbol{r})$ и поглощения $a(\boldsymbol{r})$ в фантоме как $\{\bar{c}, \bar{a}\}$. Результаты модельных расчетов восстановления скоростного разреза $c(\boldsymbol{r})$ и коэффициента поглощение $a(\boldsymbol{r})$ приведены на рис. 10–12.

Попытаемся восстановить распределения $c(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$ внутри объекта с помощью градиентного метода, используя начальное приближение $c_0 = \mathrm{const}$, $a_0 = 0$ и зондирующие импульсы с длиной волны 5 мм. Результат расчетов приведен на рис. 10. Изображения на рис. 10 получены на 100-й итерации градиентного метода, после чего итерационный процесс остановился в точке локального минимума функционала $\Phi(c, a)$. Будем обозначать полученные распределения скорости звука и поглощения как $\{c, a\}_{\mathrm{loc}}$. Точке глобального минимума соответствует изображение $\{\bar{c}, \bar{a}\}$, представленное на рис. 9. Значение функционала $\Phi(\bar{c}, \bar{a}) = 0$.

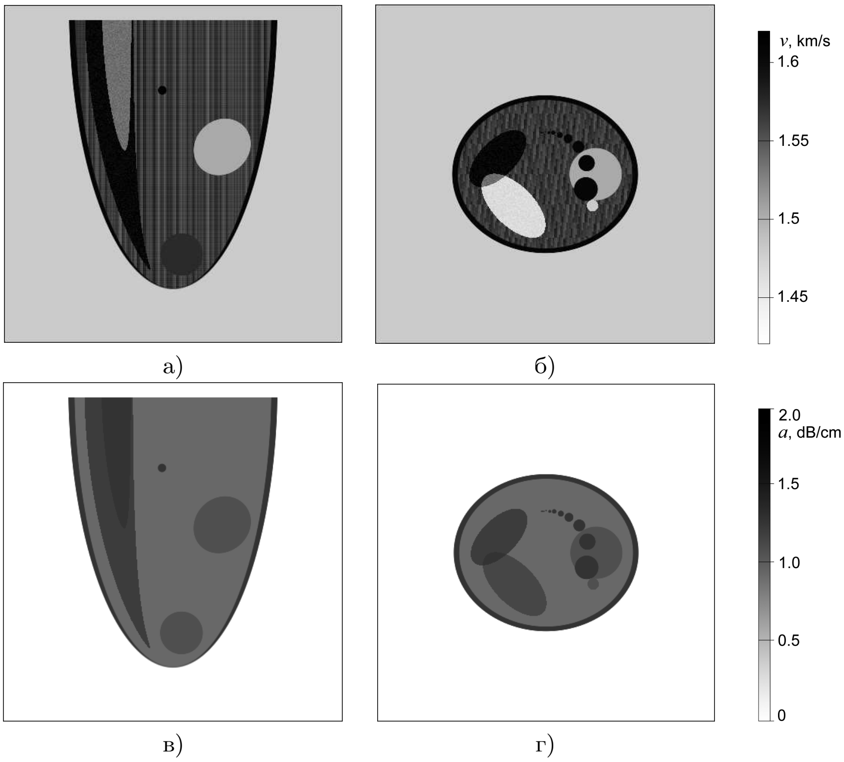


Рис. 9. Вертикальное (а) и горизонтальное (б) сечение фантома скорости звука $c(\boldsymbol{r})$; вертикальное (в) и горизонтальное (г) сечение фантома коэффициента поглощения $a(\boldsymbol{r})$

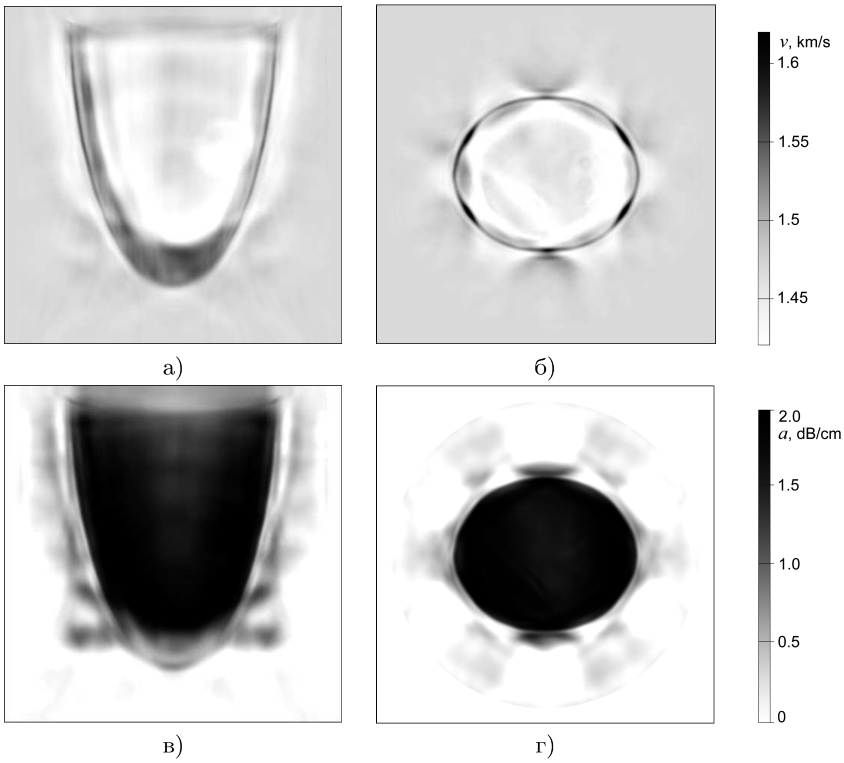


Рис. 10. Вертикальное (а) и горизонтальное (б) сечение восстановленной скорости звука $c(\boldsymbol{r})$; вертикальное (в) и горизонтальное (г) сечение коэффициента поглощения $a(\boldsymbol{r})$: $\lambda = 5$ мм, начальное приближение $c_0 = \mathrm{const}$, $a_0 = 0$

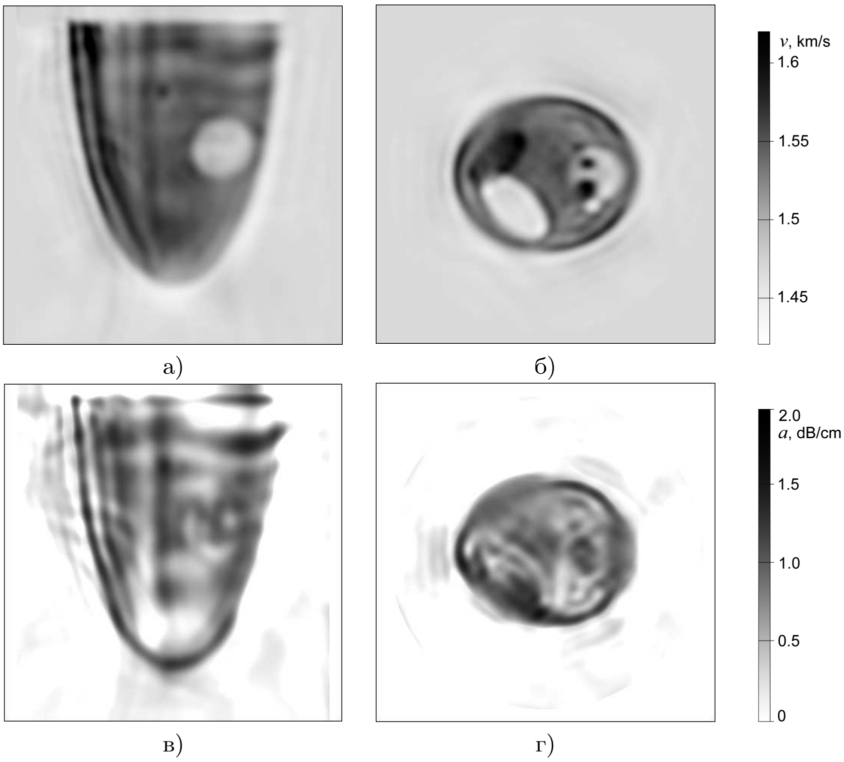


Рис. 11. Вертикальное (а) и горизонтальное (б) сечение восстановленной скорости звука $c(\boldsymbol{r})$; вертикальное (в) и горизонтальное (г) сечение фантома коэффициента поглощения $a(\boldsymbol{r})$: $\lambda = 12$ мм, начальное приближение $c_0 = \text{const}$, $a_0 = 0$

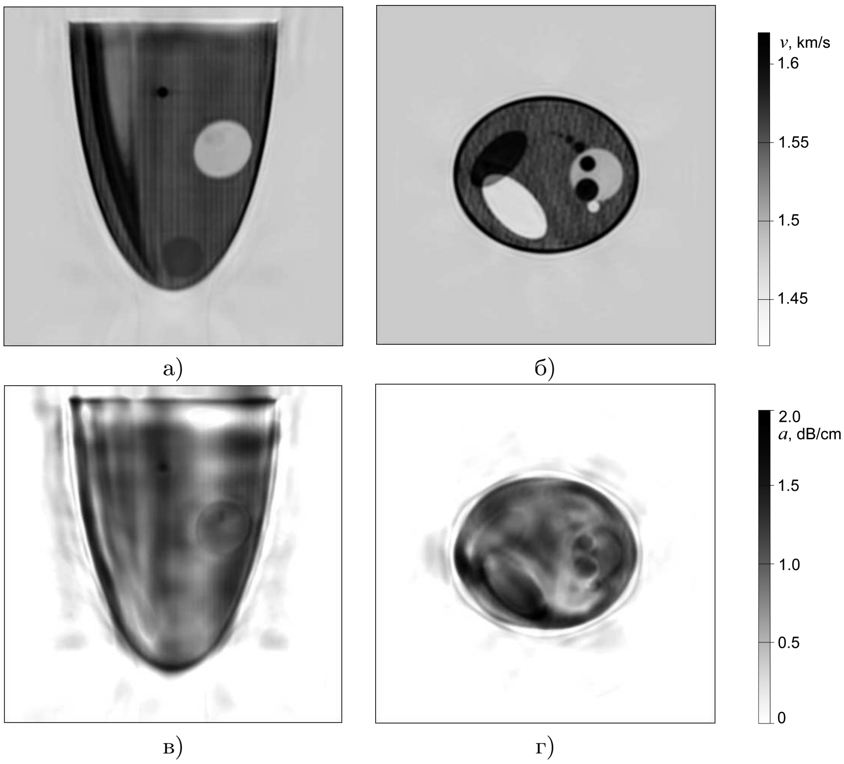


Рис. 12. Вертикальное (а) и горизонтальное (б) сечение восстановленной скорости звука $c_2(\boldsymbol{r})$; вертикальное (в) и горизонтальное (г) сечение коэффициента поглощения $a_2(\boldsymbol{r})$: $\lambda = 5$ мм, начальное приближение $c_1(\boldsymbol{r})$, $a_1(\boldsymbol{r})$, полученное из решения обратной задачи для $\lambda = 12$ мм

Покажем теперь, что, как и в одномерном случае, в трехмерном случае форма функционала невязки связана с формой импульса и функционал имеет локальные минимумы. Для этого проведем прямую между точным решением $\{\bar{c}, \bar{a}\}$ и найденным приближенным решением $\{c, a\}_{\rm loc}$. Эта прямая состоит из элементов $X_\alpha = (1-\alpha)\cdot\{c, a\}_{\rm loc} + \alpha\cdot\{\bar{c}, \bar{a}\}$ и проходит при $\alpha = 1$ через точное решение $\{\bar{c}, \bar{a}\}$, а при $\alpha = 0$ — через найденное приближенное решение $\{c, a\}_{\rm loc}$. Построим график функционала невязки $\Phi(\alpha)$. Этот график приведен на рис. 13. Видно, что и в трехмерном варианте график функционала невязки примерно соответствует форме импульса, а найденное приближенное решение в данном случае является локальным минимумом.

Увеличим длину волны зондирующего излучения, чтобы начальное приближение попало в область глобального минимума. На рис. 11 приведено изображение $c(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$, восстановленное градиентным методом с начального приближения $c_0 = \text{const}$, $a_0 = 0$ при длине волны $\lambda = 12$ мм. Полученное изображение имеет низкое разрешение. Обозначим приближенное решение $c(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$, полученное при $\lambda = 12$ мм, как $\{c_1, a_1\}$.

Мы будем использовать решение $\{c_1, a_1\}$ в качестве начального приближения для итерационного процесса при $\lambda = 5$ мм. На рис. 12 приведено приближенное решение $\{c_2, a_2\}$, восстановленное при $\lambda = 5$ мм градиентным методом с начального приближения $\{c_1, a_1\}$. Восстановленный скоростной разрез близок к скоростному разрезу фантома (рис. 9). На восстановленном изображении скорости звука $c_2(\boldsymbol{r})$ можно различить неоднородности размером от 2 мм. Разрешающая способность восстановления коэффициента поглощения $a_2(\boldsymbol{r})$ намного хуже. Это связано с тем, что $a(\boldsymbol{r})$ является коэффициентом при первой производной u_t, а $c(\boldsymbol{r})$ — при второй производной u_{tt} в уравнении (1).

Замечание 1. Рассматриваемая задача ориентирована на диагностику мягких тканей в медицине, поэтому поглощение является значимым фактором, поскольку даже для низких частот оно достигает 10–15 dB. Поэтому, даже если мы пытаемся восстановить только скорость звука $c(\boldsymbol{r})$, необходимо учитывать поглощение в модели распространения волн.

В модели, не учитывающей поглощение, разница между измеренным и смоделированным волновым полем всегда будет оставаться очень большой, т.е. математическая модель будет плохо описывать физические процессы распространения ультразвуковых волн.

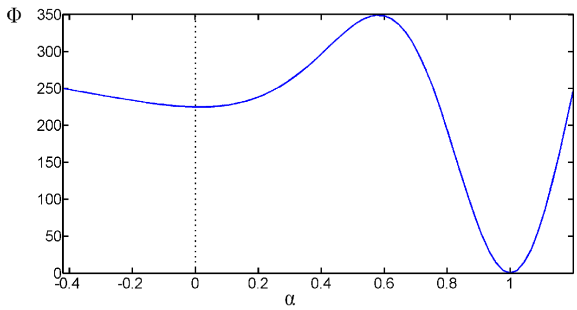


Рис. 13. График функционала невязки $\Phi(\alpha)$, $\lambda = 5$ мм

Замечание 2. Рассматриваемая задача относится к задачам томографии с неполными данными. В ультразвуковой маммографии разместить источники и приемники с верхней стороны невозможно. Отсутствие данных на части поверхности приводит к наличию артефактов около верхней границы расчетной области. Для того чтобы улучшить качество изображения, нужно располагать источники и приемники ближе к верхней границе, как показано в статье [22]. Тем не менее, как видно из рис. 12, даже в простой схеме эксперимента (рис. 1) удается достаточно хорошо восстановить скоростной разрез практически во всем исследуемом объеме.

Замечание 3. Как показывают рисунки, двухэтапный метод восстановления томографического изображения позволяет расширить область сходимости градиентного метода и восстанавливать изображение скорости звука с высоким разрешением с нулевого начального приближения. На первом этапе с начального приближения $c(\boldsymbol{r}) = c_0$, $a(\boldsymbol{r}) = 0$ строится приближенное решение $\{c_1, a_1\}$ на низкой частоте, а на втором этапе это решение $\{c_1, a_1\}$ используется как начальное приближение для итерационного градиентного метода на более высокой частоте.

Заключение и результаты. Статья ориентирована на ультразвуковые томографические исследования мягких тканей в медицине и биологии.

Обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача для гиперболического уравнения. Математическая модель описывает такие явления, как дифракция, рефракция, переотражение и поглощение ультразвуковых волн в мягких тканях. Особенностью рассматриваемых задач диагностики является то, что разница скоростей распространения акустических волн в мягких тканях и в воде составляет не более 10%. Это означает, что контраст изображения по скорости является очень низким. Задачей является восстановление неоднородностей в исследуемом объекте при таком низком контрасте. Наиболее адекватной постановкой обратной задачи является трехмерная обратная задача, в которой искомые функции $c(\boldsymbol{r})$, $a(\boldsymbol{r})$ являются функциями трех координат. В томографической схеме используются низкочастотные ультразвуковые волны в диапазоне до 500 кГц.

Важнейшей проблемой интерпретации данных ультразвуковой томографии является нелинейность обратной коэффициентной задачи. Как показано в настоящей статье, нелинейность обратной задачи приводит к тому, что функционал невязки между экспериментальным и смоделированным волновым полем не является выпуклым. Как следствие, градиентные методы минимизации функционала не могут обеспечить сходимость к глобальному минимуму.

В нашей работе предложен подход, который базируется на использовании нескольких диапазонов частот. Наиболее просто это подход можно применить, используя две центральные частоты f_1 и $f_2 > f_1$. Выбор частоты f_2 определяется разрешением, которое необходимо достичь в задаче восстановления томографического изображения. Эксперимент на более низкой частоте f_1 необходим для того, чтобы "запустить" итерационный процесс на более высокой частоте. В результате в задачах, ориентированных на диагностику мягких тканей, при контрасте около 10% и длине волны порядка 5 мм можно достичь разрешения ультразвукового томографического комплекса порядка 2 мм. Итерационный процесс сходится, если в качестве начального приближения использовать изображение, восстановленное на частоте f_1, которая меньше частоты f_2 в 2–3 раза. Разработанные методы устойчивы к погрешности в экспериментальных данных.

Модельные расчеты проводились в схеме эксперимента, включающей регистрацию экспериментальных данных на цилиндрической поверхности. Такая схема легко реализуется с использованием вращающейся вертикальной линейки детекторов с расстоянием между детекторами порядка 2 мм. Количество источников в томографической схеме может быть сравнительно небольшим (порядка 20–30).

Разработанные методы могут быть использованы для дифференциальной диагностики рака молочной железы. Итерационные алгоритмы решения обратных задач волновой томографии легко распараллеливаются на GPU-кластерах [40, 41]. Производительность современных GPU-кластеров постоянно растет, что позволяет уже в ближайшее время включать GPU-кластеры в состав разрабатываемых ультразвуковых томографов. Кроме медицины, двухчастотный метод томографической диагностики может найти применение в задачах неразрушающего контроля и сейсмики.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17–11–01065). Работа выполнена в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chang C.H., Huang S.W., Yang H.C., Chou Y.H., Li P.C.* Reconstruction of ultrasonic sound velocity and attenuation coefficient using linear arrays: clinical assessment // Ultrasound Med. Biol. 2007. **33**, N 11. 1681–1687.
2. *Duric N., Littrup P., Li C., et al.* Breast ultrasound tomography: bridging the gap to clinical practice // Proc. SPIE Vol. 8320, Medical Imaging 2012: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. doi 10.1117/12.910988.
3. *Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д.* Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в фантомах мягких биотканей по экспериментальным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн. 2015. **61**, № 2. 254–273.
4. *Jiřík R., Peterlík I., Ruiter N., et al.* Sound-speed image reconstruction in sparse-aperture 3-D ultrasound transmission tomography // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2012. **59**, N 2. 254–264.
5. *Wiskin J., Borup D., Andre M., et al.* Three-dimensional nonlinear inverse scattering: quantitative transmission algorithms, refraction corrected reflection, scanner design, and clinical results // The Journal of the Acoustical Society of America. 2013. **133**. doi: 10.1121/1.4805138.
6. *Mamou J., Oelze M. L. (Eds.).* Quantitative ultrasound in soft tissues. Dordrecht: Springer, 2013.
7. *Saha R.K., Sharma S.K.* Validity of a modified Born approximation for a pulsed plane wave in acoustic scattering problems // Physics in Medicine and Biology. 2005. **50**. 2823–2836.
8. *Zeqiri B., Baker C., Alosa G., et al.* Quantitative ultrasonic computed tomography using phase-insensitive pyroelectric detectors // Physics in Medicine and Biology. 2013. **58**. 5237–5268.
9. *Sak M., Duric N., Littrup P., et al.* Using speed of sound imaging to characterize breast density // Ultrasound in Medicine & Biology. 2017. **43**, N 1. 91–103.
10. *Stotzka R., Ruiter N.V., Mueller T.O., et al.* High resolution image reconstruction in ultrasound computer tomography using deconvolution // Proc. SPIE Vol. 5750. Medical Imaging 2005: Ultrasonic Imaging and Signal Processing. doi: 10.1117/12.595149.
11. *Wiskin J., Borup D.T., Johnson S.A., Berggren M.* Non-linear inverse scattering: high resolution quantitative breast tissue tomography // The Journal of the Acoustical Society of America. 2012. **131**, N 5. 3802–3813.
12. *Pérez-Liva M., Herraiz J.L., Udías J.M., et al.* Time domain reconstruction of sound speed and attenuation in ultrasound computed tomography using full wave inversion // The Journal of the Acoustical Society of America. 2017. **141**, N 3. 1595–1604.
13. *Natterer F.* An algorithm for 3D ultrasound tomography // Lecture Notes in Physics. Vol. 486. Berlin: Springer, 1997. 216–225.

14. *Lavarello R.J., Oelze M.L.* Tomographic reconstruction of three-dimensional volumes using the distorted Born iterative method // IEEE Transactions on Medical Imaging. 2009. **28**, N 10. 1643–1653.
15. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* О двух подходах к решению коэффициентных обратных задач для волновых уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. **52**, № 2. 263–269.
16. *Natterer F.* Possibilities and limitations of time domain wave equation imaging // Contemporary Mathematics. Vol. 559. Providence: American Mathematical Society, 2011. 151–162.
17. *Бейлина Л., Клибанов М.В., Кокурин М.Ю.* Адаптивность и релаксация для некорректных задач и глобальная сходимость для коэффициентной обратной задачи // Проблемы математического анализа. 2010. № 46. 3–44.
18. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography // Inverse Problems. 2013. **29**, N 7. doi: 10.1088/0266-5611/29/7/075004.
19. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* A computer simulation study of soft tissue characterization using low-frequency ultrasonic tomography // Ultrasonics. 2016. **67**. 136–150.
20. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* Supercomputer technologies in tomographic imaging applications // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2016. **3**, N 1. 41–66.
21. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Inverse problems of ultrasound tomography in models with attenuation // Physics in Medicine and Biology. 2014. **59**, N 8. 1979–2004.
22. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data // Wave Motion. 2014. **51**, N 3. 389–404.
23. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* О проблеме выбора начального приближения в обратных задачах ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 312–321.
24. *Chen W., Holm S.* Fractional Laplacian time-space models for linear and nonlinear lossy media exhibiting arbitrary frequency power-law dependency // The Journal of the Acoustical Society of America. 2004. **115**, N 4. 1424–1430.
25. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Низкочастотная трехмерная ультразвуковая томография // Доклады Российской Академии наук. 2016. **468**, № 3. 268–271.
26. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Iterative methods for solving coefficient inverse problems of wave tomography in models with attenuation // Inverse Problems. 2017. **33**, N 2. doi: 10.1088/1361-6420/33/2/025003.
27. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Обратные задачи формирования зондирующих импульсов в ультразвуковой томографии: модельные расчеты и эксперимент // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 150–157.
28. *Chen Y.* Inverse scattering via Heisenberg's uncertainty principle // Inverse Problems. 1997. **13**, N 2. 253–282.
29. *Matveev S.A., Zheltkov D.A., Tyrtyshnikov E.E., Smirnov A.P.* Tensor train versus Monte Carlo for the multicomponent Smoluchowski coagulation equation // Journal of Computational Physics. 2016. **316**. 164–179.
30. *Kuzhuget A.V., Beilina L., Klibanov M.V., et al.* Blind backscattering experimental data collected in the field and an approximately globally convergent inverse algorithm // Inverse Problems. 2012. **28**, N 9. doi: 10.1088/0266-5611/28/9/095007.
31. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. **151**, № 3. 501–504.
32. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-posed problems: theory and applications. Dordrecht: Springer, 1994.
33. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
34. *Natterer F.* Sonic imaging // Handbook of Mathematical Methods in Imaging. New York: Springer, 2015. 1253–1278.
35. *Beilina L., Klibanov M.V.* Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems. New York: Springer, 2012.
36. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Обратные задачи послойной ультразвуковой томографии с данными на цилиндрической поверхности // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 267–276.
37. *Romanov S.* Optimization of numerical algorithms for solving inverse problems of ultrasonic tomography on a supercomputer // Communications in Computer and Information Science. Vol. 793. Cham: Springer, 2017. 67–79.
38. *Mu S.-Y., Chang H.-W.* Dispersion and local-error analysis of compact LFE-27 formula for obtaining sixth-order accurate numerical solutions of 3D Helmholtz equation // Progress in Electromagnetics Research. 2013. **143**. 285–314.
39. *Engquist B., Majda A.* Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // Mathematics of Computation. 1977. **31**. 629–651.
40. *Goncharsky A., Seryozhnikov S.* The architecture of specialized GPU clusters used for solving the inverse problems of 3D low-frequency ultrasonic tomography // Communications in Computer and Information Science. Vol. 793. Cham: Springer, 2017. 363–375.
41. *Bazulin E.G., Goncharsky A.V., Romanov S.Y., and Seryozhnikov S.Y.* Parallel CPU- and GPU-algorithms for inverse problems in nondestructive testing // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. **39**, N 4. 486–493.

Поступила в редакцию
1.10.2018

Low-Frequency 3D Ultrasound Tomography: Dual-Frequency Method

A. V. Goncharsky [1], S. Yu. Romanov [2], and S. Yu. Seryozhnikov [3]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru*

[2] *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: romanov60@gmail.com*

[3] *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Electronic Engineer, e-mail: s2110sj@gmail.com*

Received October 1, 2018

Abstract: This paper is devoted to the development of efficient methods for 3D acoustic tomography. The inverse problem of acoustic tomography is formulated as a coefficient inverse problem for a hyperbolic equation where the sound speed and the absorption factor are unknown in three-dimensional space. The mathematical model describes the effects of diffraction, refraction, multiple scattering, and the ultrasound absorption. Substantial difficulties in solving this inverse problem are due to its nonlinear nature. A method of low-frequency 3D acoustic tomography based on using short sounding pulses of two different central frequencies not exceeding 500 kHz is proposed. The method employs an iterative gradient-based minimization algorithm at the higher frequency with the initial approximation of unknown coefficients obtained by solving the inverse problem at the lower frequency. The efficiency of the proposed method is illustrated by solving a model problem with acoustic parameters close to those of soft tissues. The proposed method makes it possible to obtain a spatial resolution of 2–3 mm while the sound speed contrast does not exceed 10%. The developed algorithms can be efficiently parallelized using GPU clusters.

Keywords: ultrasound tomography, wave equation, nonlinear coefficient inverse problem, iterative algorithms.

References

1. C. H. Chang, S. W. Huang, H. C. Yang, et al., "Reconstruction of Ultrasonic Sound Velocity and Attenuation Coefficient Using Linear Arrays: Clinical Assessment," Ultrasound Med. Biol. **33** (11), 1681–1687 (2007).

2. N. Duric, P. Littrup, C. Li, et al., "Breast Ultrasound Tomography: Bridging the Gap to Clinical Practice," in *Proc. SPIE Vol. 8320, Medical Imaging 2012: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy* (2012). doi 10.1117/12.910988

3. V. A. Burov, D. I. Zotov, and O. D. Rumyantseva, "Reconstruction of the Sound Velocity and Absorption Spatial Distributions in Soft Biological Tissue Phantoms from Experimental Ultrasound Tomography Data," Akust. Zh. **61** (2), 254–273 (2015) [Acoust. Phys. **61** (2), 231–248 (2015)].

4. R. Jiřík, I. Peterlík, N. Ruiter, et al., "Sound-Speed Image Reconstruction in Sparse-Aperture 3-D Ultrasound Transmission Tomography," IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control **59** (2), 254–264 (2012).

5. J. Wiskin, D. Borup, M. Andre, et al., "Three-Dimensional Nonlinear Inverse Scattering: Quantitative Transmission Algorithms, Refraction Corrected Reflection, Scanner Design, and Clinical Results," J. Acoust. Soc. Am. **133** (2013). doi 10.1121/1.4805138

6. J. Mamou and M. L. Oelze (Eds.), *Quantitative Ultrasound in Soft Tissues* (Springer, Dordrecht, 2013).

7. R. K. Saha and S. K. Sharma, "Validity of a Modified Born Approximation for a Pulsed Plane Wave in Acoustic Scattering Problems," Phys. Med. Biol. **50**, 2823–2836 (2005).

8. B. Zeqiri, C. Baker, G. Alosa, et al., "Quantitative Ultrasonic Computed Tomography Using Phase-Insensitive Pyroelectric Detectors," Phys. Med. Biol. **58**, 5237–5268 (2013).

9. M. Sak, N. Duric, P. Littrup, et al., "Using Speed of Sound Imaging to Characterize Breast Density," Ultrasound Med. Biol. **43** (1), 91–103 (2017).

10. R. Stotzka, N. V. Ruiter, T. O. Mueller, et al., "High Resolution Image Reconstruction in Ultrasound Computer Tomography Using Deconvolution," in *Proc. SPIE Vol. 5750, Medical Imaging 2005: Ultrasonic Imaging and Signal Processing* (2005). doi 10.1117/12.595149.

11. J. Wiskin, D. T. Borup, S. A. Johnson, and M. Berggren, "Non-Linear Inverse Scattering: High Resolution Quantitative Breast Tissue Tomography," J. Acoust. Soc. Am. **131** (5), 3802–3813 (2012).

12. M. Pérez-Liva, J. L. Herraiz, J. M. Udías, et al., "Time Domain Reconstruction of Sound Speed and Attenuation in Ultrasound Computed Tomography Using Full Wave Inversion," J. Acoust. Soc. Am. **141** (3), 1595–1604 (2017).

13. F. Natterer, "An Algorithm for 3D Ultrasound Tomography," in *Lecture Notes in Physics* (Springer, Berlin, 1997), Vol. 486, pp. 216–225.

14. R. J. Lavarello and M. L. Oelze, "Tomographic Reconstruction of Three-Dimensional Volumes Using the Distorted Born Iterative Method," IEEE Trans. Med. Imaging **28** (10), 1643–1653 (2009).

15. A. V. Goncharskii and S. Yu. Romanov, "Two Approaches to the Solution of Coefficient Inverse Problems for Wave Equations," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **52** (2), 263–269 (2012) [Comput. Math. Math. Phys. **52** (2), 245–251 (2012)].

16. F. Natterer, "Possibilities and Limitations of Time Domain Wave Equation Imaging," in *Contemporary Mathematics* (Am. Math. Soc. Press, Providence, 2011), Vol. 559, pp. 151–162.

17. L. Beilina, M. V. Klibanov, and M. Yu. Kokurin, "Adaptivity with Relaxation for Ill-Posed Problems and Global Convergence for a Coefficient Inverse Problem," J. Math. Sci. **167** (3), 279–325 (2010).

18. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "Supercomputer Technologies in Inverse Problems of Ultrasound Tomography," Inverse Probl. **29** (7) (2013). doi 10.1088/0266-5611/29/7/075004

19. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "A Computer Simulation Study of Soft Tissue Characterization Using Low-Frequency Ultrasonic Tomography," Ultrasonics **67**, 136–150 (2016).

20. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "Supercomputer Technologies in Tomographic Imaging Applications," Supercomput. Frontiers Innov. **3** (1), 41–66 (2016).

21. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "Inverse Problems of Ultrasound Tomography in Models with Attenuation," Phys. Med. Biol. **59** (8), 1979–2004 (2014).

22. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "Inverse Problems of 3D Ultrasonic Tomography with Complete and Incomplete Range Data," Wave Motion **51** (3), 389–404 (2014).

23. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "The Problem of Choosing Initial Approximations in Inverse Problems of Ultrasound Tomography," Vychisl. Metody Programm. **18**, 312–321 (2017).

24. W. Chen and S. Holm, "Fractional Laplacian Time–Space Models for Linear and Nonlinear Lossy Media Exhibiting Arbitrary Frequency Power-Law Dependency," J. Acoust. Soc. Am. **115** (4), 1424–1430.

25. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov and S. Yu. Seryozhnikov, "Low-Frequency Three-Dimensional Ultrasonic Tomography," Dokl. Akad. Nauk **468** (3), 268–271 (2016) [Dokl. Phys. **61** (5), 211–214 (2016)].

26. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "Iterative Methods for Solving Coefficient Inverse Problems of Wave Tomography in Models with Attenuation," Inverse Probl. **33** (2) (2017). doi 10.1088/1361-6420/33/2/025003

27. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, "Inverse Problems of Sounding Pulse Formation in Ultrasound Tomography: Mathematical Modeling and Experiments," Vychisl. Metody Programm. **19**, 150–157 (2018).

28. Y. Chen, "Inverse Scattering via Heisenberg's Uncertainty Principle," Inverse Probl. **13** (2), 253–282 (1997).

29. S. A. Matveev, D. A. Zheltkov, E. E. Tyrtyshnikov, and A. P. Smirnov, "Tensor Train Versus Monte Carlo for the Multicomponent Smoluchowski Coagulation Equation," J. Comput. Phys. **316**, 164–179 (2016).

30. A. V. Kuzhuget, L. Beilina, M. V. Klibanov, et al., "Blind Backscattering Experimental Data Collected in the Field and an Approximately Globally Convergent Inverse Algorithm," Inverse Probl. **28** (9) (2012). doi 10.1088/0266-5611/28/9/095007

31. A. N. Tikhonov, "Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method," Dokl. Akad. Nauk SSSR **151** (3), 501–504 (1963) [Sov. Math. Dokl. **5** (4), 1035–1038 (1963)].

32. A. Bakushinsky and A. Goncharsky, *Ill-Posed Problems: Theory and Applications* (Kluwer, Dordrecht, 1994).

33. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems* (Springer, Dordrecht, 1995; Nauka, Moscow, 1990).

34. F. Natterer, "Sonic Imaging," in *Handbook of Mathematical Methods in Imaging* (Springer, New York, 2015), pp. 1253–1278.

35. L. Beilina and M. V. Klibanov, *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems* (Springer, New York, 2012).

36. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, "Inverse Problems of Layer-by-Layer Ultrasonic Tomography with the Data Measured on a Cylindrical Surface," Vychisl. Metody Programm. **18**, 267–276 (2017).

37. S. Romanov, "Optimization of Numerical Algorithms for Solving Inverse Problems of Ultrasonic Tomography on a Supercomputer," in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2017), Vol. 793, pp. 67–79.

38. S.-Y. Mu and H.-W. Chang, "Dispersion and Local-Error Analysis of Compact LFE-27 Formula for Obtaining Sixth-order Accurate Numerical Solutions of 3D Helmholtz Equation," Prog. Electromagn. Res. **143**, 285–314 (2013).

39. B. Engquist and A. Majda, "Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves," Math Comp. **31**, 629–651 (1977).

40. A. Goncharsky and S. Seryozhnikov, "The Architecture of Specialized GPU Clusters Used for Solving the Inverse Problems of 3D Low-Frequency Ultrasonic Tomography," in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2017), Vol. 793, pp. 363–375.

41. E. G. Bazulin, A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "Parallel CPU- and GPU-Algorithms for Inverse Problems in Nondestructive Testing," Lobachevskii J. Math. **39** (4), 486–493 (2018).