

УДК 517.97; 539.376; 539.3; 519.857

doi 10.26089/NumMet.v19r442

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПАНЕЛИ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. Бормотин¹, Вин Аунг²

Рассматриваются задачи моделирования процессов формообразования в режиме ползучести панелей с помощью реконфигурируемого стержневого пуансона. Задача деформирования в ползучести с учетом геометрической нелинейности и контактных условий решается методом конечных элементов. Экспериментальные результаты позволяют отождествить работу рассеяния с параметром поврежденности. В этом случае процессы формообразования позволяют управлять уровнем поврежденности материала и согласовывать с технологическими ограничениями за счет оптимального выбора пути деформирования во времени. Формулируется дискретная задача оптимального управления, которая решается методом динамического программирования с уточнением решения методом локальных вариаций. Показана эффективность предлагаемого метода по сравнению с полным перебором вариантов путей деформирования.

Ключевые слова: обратная задача формообразования, ползучесть, упругость, вариационные принципы, итерационные методы, метод конечных элементов, поврежденность, дискретная задача оптимального управления, метод динамического программирования, метод локальных вариаций.

Введение. Технологические задачи формообразования крупногабаритных изделий в режиме медленного деформирования имеют большое практическое значение в современном отечественном и зарубежном авиастроении [1–4]. В последнее время рассматривается формование изделий из листов и панелей с помощью реконфигурируемого стержневого пуансона (матрицы). Формующая поверхность как пуансона, так и матрицы, образованная двумя системами соосно расположенных стержней, каждый из которых выставляется в индивидуальную позицию посредством числового программного управления, позволяет адаптировать оснастку для изготовления деталей различной конфигурации. В работах [5–9] рассматриваются особенности конструкции стержневых систем и предлагаются основные подходы к определению нагрузок, действующих на каждый стержневой элемент.

Точность формы детали, полученной технологиями обработки материалов давлением при заданных параметрах процесса, зависит от точности вычисленной и изготовленной формы оснастки (стержневого реконфигурируемого пуансона), задающей упреждающую форму панели. Упреждающая форма панели должна обеспечивать заданную остаточную кривизну панели после освобождения ее от силовой оснастки. Задача определения такой упреждающей кривизны является обратной [10–13].

Экспериментальные результаты позволяют отождествить работу рассеяния с параметром поврежденности [4]. В этом случае могут быть сформулированы задачи оптимального управления в процессах формообразования [14, 15].

1. Формулировка обратных задач формообразования. Пусть $V \subset R^3$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей S . Контактная поверхность жестких тел (штампов) с деформируемым телом обозначается через S_c ($S_c \subset S$). В настоящей статье используются пространства Соболева со стандартными обозначениями норм. Обозначим через $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ и $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ векторы текущих и остаточных перемещений деформируемого тела и вектор перемещений контактных тел, где $u, \tilde{u} \in [W_2^1(Q)]^3$, $\bar{u} \in [W_2^1(Q_c)]^3$, $Q = V \times [0 \leq t \leq T]$, $Q_c = S_c \times [0 \leq t \leq T]$. Точкой сверху обозначаются

скорости перемещений $\dot{u}, \dot{\tilde{u}}, \dot{\bar{u}}$. Скалярное произведение в $L_2(S)$ имеет вид $(\cdot, \cdot)_S: (u, v)_S = \int_S \sum_{i=1}^3 u_i v_i dS$. Со-

¹ Комсомольский-на-Амуре государственный университет (ФГБОУ ВО «КнАГУ»), Институт компьютерного проектирования машиностроительных технологий и оборудования, просп. Ленина, 27, 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре; профессор, e-mail: cvmi@knastu.ru

² Комсомольский-на-Амуре государственный университет (ФГБОУ ВО «КнАГУ»), факультет компьютерных технологий, просп. Ленина, 27, 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре; аспирант, e-mail: cvmi@knastu.ru

ответствующая этому скалярному произведению норма имеет вид $\|u\|_S = \sqrt{(u, u)_S} = \left\{ \int_S \sum_{i=1}^3 u_i^2 dS \right\}^{1/2}$.

Рассматривается квазистатическая задача формообразования в условиях ползучести с учетом малых деформаций, но больших перемещений и поворотов (общая лагранжева формулировка) с упругой разгрузкой. Обратная задача кинематического формообразования контактными жесткими штампами формулируется в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом [11]

$$J(\dot{u}, \dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{u}}) = \frac{1}{2\varepsilon_1} \left\| \dot{\tilde{u}} - \dot{\tilde{u}}^* \right\|_{S_c}^2 + W_c + a(\dot{u}, \dot{u}) + a(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{u}}) + \frac{1}{2\varepsilon_2} \left\| \dot{\tilde{u}} - \dot{\tilde{u}}^* \right\|_S^2,$$

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0,$$

где
$$\begin{cases} W_c = - \int_{S_c} [p \cdot (\bar{u} - u) + p \cdot (\dot{\tilde{u}} - \dot{u})] dS & \text{либо} & W_c = \int_{S_c} \left[\frac{1}{\varepsilon_n} g_n \dot{g}_n + \frac{1}{\varepsilon_t} g_t \dot{g}_t \right] dS, \\ \varepsilon_n > 0, \quad \varepsilon_t > 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad \varepsilon_t \rightarrow 0, \end{cases} \quad (1)$$

p — вектор поверхностных контактных сил, действующих на S_c , $g_n = n \cdot (\bar{u} - u)$, $\dot{g}_n = n \cdot (\dot{\tilde{u}} - \dot{u})$ — нормальный перехлест (взаимное проникновение по нормали к границе S_c) контактирующих частиц и его скорость, $g_t = \tau \cdot (\bar{u} - u)$, $\dot{g}_t = \tau \cdot (\dot{\tilde{u}} - \dot{u})$ — касательный перехлест и его скорость, n — единичный вектор нормали к контактной поверхности, τ — единичный касательный вектор к контактной поверхности, $\dot{\tilde{u}}^*$, $\dot{\tilde{u}}^*$ — заданные остаточные скорости перемещений тела и текущие контактные скорости перемещений в момент времени t ; $t \in [0, T]$ — время деформирования тела под нагрузкой; потенциальные формы определяются в виде [17]

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_V \frac{\partial E(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} \dot{v}_{i,j} dV, \quad a(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}}) = \int_V \frac{\partial \tilde{E}(\dot{\tilde{u}}_{i,j})}{\partial \dot{\tilde{u}}_{i,j}} \dot{\tilde{v}}_{i,j} dV,$$

$$E(\dot{u}_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl}^c + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j}, \quad \tilde{E}(\dot{\tilde{u}}_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl}^c + \frac{1}{2} \rho_{ij} \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j},$$

где c_{ijkl} — компоненты симметричного тензора упругих констант, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$ — компоненты скоростей текущих и остаточных деформаций Грина–Лагранжа, $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$ — компоненты скоростей деформаций ползучести при $i, j, k, l = 1, 2, 3$,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} \dot{u}_{k,j}), \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{1}{2} (\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i} + \dot{\tilde{u}}_{k,i} \tilde{u}_{k,j} + \tilde{u}_{k,i} \dot{\tilde{u}}_{k,j}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Закон установившейся ползучести (закон Нортона) [17]: $\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \gamma s_{ij}$, $\gamma = \frac{3}{2} B \bar{\sigma}^{n-1}$, s_{ij} — компоненты диватора тензора напряжений, $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$ — эффективное напряжение (интенсивность напряжений), B, n — константы материала [17].

Условие стационарности функционала приводит к уравнениям равновесия для скоростей текущих и остаточных напряжений в объеме V и граничным условиям на поверхности S .

На основе вариационного неравенства, построенного из функционала (1), формулируется итерационный метод решения обратных задач формообразования [10–12]:

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + \alpha^n (\tilde{u}^* - \tilde{u}^n) + \beta^n (\bar{u}^n - \tilde{u}^n), \quad (2)$$

где $0 < \alpha^n < 2$ и $\beta^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Задача оптимального деформирования формулируется в следующем виде [14]: каким образом следует деформировать элемент среды в течение заданного времени T , чтобы в момент $t = T$ получить заданные значения деформаций ползучести и параметр поврежденности Ω при этом был бы минимальным?

При учете рассеянной энергии параметр поврежденности описывается следующим образом:

$$\dot{\Omega} = \frac{dA}{A^* dt} = \frac{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^c}{A^* dt} = \frac{\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c}{A^*},$$

где A^* — критическая величина работы разрушения истинного напряжения на деформации ползучести (рассеянная энергия к моменту разрушения) [4].

Таким образом, математическая формулировка задачи оптимального управления включает в себя уравнения механики деформируемого твердого тела, полученные из условий стационарности (1) и функционала оптимизации

$$J = \int_0^T \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c dV dt \rightarrow \inf,$$

или

$$J = \max_{x \in V} \int_0^T \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c dt \rightarrow \inf. \quad (3)$$

Для пластин в случае малых прогибов найдено оптимальное деформирование, которое проходит по линейному закону $u_3(t) = \frac{t}{T} u_3^*$; в случае больших прогибов оптимальное деформирование проводится по нелинейному закону $u_3(t) = \sqrt{\frac{t}{T}} u_3^*$, где u_3^* — прогиб в конечный момент времени [14, 15].

2. Дискретная задача оптимального управления и метод решения. С учетом дискретизации вариации функционала (1) и применения пошаговой процедуры интегрирования образуются стандартные конечно-элементные уравнения для решения контактной задачи в приращениях [16–18]:

$${}^{t+\Delta t} K^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t} R^{(i-1)}, \quad (4)$$

$${}^{t+\Delta t} \tilde{K}^{(i-1)} \Delta \hat{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \tilde{R}^{(i-1)}, \quad (5)$$

где ${}^{t+\Delta t} K^{(i-1)}$, ${}^{t+\Delta t} \tilde{K}^{(i-1)}$ — симметричные матрицы касательной жесткости, определенные в момент t (в матрице $K^{(i-1)}$ уже включены дополнительные элементы, образующиеся от контактных ограничений) и ${}^{t+\Delta t} R^{(i-1)}$, ${}^{t+\Delta t} \tilde{R}^{(i-1)}$ — векторы внутренних и внешних сил. Верхние индексы величины $t+\Delta t$ указывают на момент времени, для которого задача решается. Верхние индексы величины $(i-1)$ указывают на номер итерации при уточнении решения методом Ньютона–Рафсона.

Решение следующего шага имеет вид ${}^{t+\Delta t} U = {}^t U + \Delta U$.

Предполагается, что в момент t все искомые величины определены. Шаг Δt по времени достаточно мал. На каждом шаге по времени и на каждой итерации процедуры Ньютона–Рафсона проводится проверка вектора перекреста, определяющего проникновение узла одного тела в другое. Когда определяется контактная поверхность, то для вычисления контактных сил, предотвращающих взаимные проникновения контактирующих тел, в (4) добавляется вариация потенциала W_c . В случае возникновения контакта, например с жестким телом при скольжении, узлы деформируемого тела принимают перемещения узлов жесткого контактного тела [19], т.е. контактные условия преобразуются в кинематические: $\Delta U_{\text{normal}} = \Delta \bar{U} \cdot n$ на S_c . Контактные силы определяются из контактной задачи, сформулированной методом множителей Лагранжа для ограничений, но с известными уже перемещениями. Остаточные узловые перемещения определяются после решения (4), (5) по формуле $\tilde{U} = U + \hat{U}$.

Приращения компонент тензора деформаций ползучести на каждом шаге по времени определяются согласно схеме Эйлера [17]:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^c = \dot{\varepsilon}_{ij}^c \Delta t,$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$ — компоненты скорости тензора деформаций ползучести, определенные в момент времени t через компоненты тензора напряжений σ_{ij} , которые считаются известными в этот момент времени. После определения приращения компонент тензора полных деформаций $\Delta \varepsilon_{ij}$ приращения компонент тензора упругой деформации вычисляются по формуле

$$\Delta \varepsilon_{ij}^e = \Delta \varepsilon_{ij} - \Delta \varepsilon_{ij}^c.$$

Приращения компонент тензора напряжений $\Delta \sigma_{ij}$ связаны с приращениями компонент тензора упругих деформаций $\Delta \varepsilon_{ij}^e$ линейным законом Гука

$$\Delta \sigma_{ij} = c_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^e.$$

Для приближенного решения интервал $[0, T]$ разбивается на N частей $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$. Тогда интеграл (3) заменяется формулой

$$J = \max_{x \in V} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c dt \rightarrow \inf. \tag{6}$$

Учитывая дискретные по времени уравнения пошаговой процедуры интегрирования (4), минимизируемый функционал (6) запишем в следующем виде при условии $\Delta t \leq t_{k+1} - t_k$:

$$J = \max_{x \in V} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{t=t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij}^c \rightarrow \inf. \tag{7}$$

Уравнения (4) и критерий оптимизации (7) образуют дискретную задачу оптимального управления. В такой постановке легко строится функция Беллмана, и задача решается методом динамического программирования [20, 21].

Предположим, что вектор-функции перемещения точек контактных тел на границе S_c заданы в виде $\bar{U}(t) = f(t)\bar{U}^k$, где \bar{U}^k — решение обратной задачи по методу (2) с произвольной функцией $f(t)$.

На множестве $G_k \equiv G(t_k)$ возьмем некоторую дискретную сетку точек $u_{kp} \in G_k$; множество всех точек выбранной сетки будем обозначать через H_k ($k = 0, 1, \dots, N$) [20]. На двух соседних шкалах H_k и H_{k+1} возьмем точки $a \in H_k$ и $b \in H_{k+1}$. Здесь в качестве $u_{kp} \in G_k$ приняты возможные положения контактных тел во времени, которые задают перемещения пластинки. Граница допустимой области записывается в виде $G = \sum_k G_k$.

При решении задачи деформирования пластинки при перемещении контактных тел с положения $a \in H_k$ в $b \in H_{k+1}$ с некоторой функцией $f(t)$ с помощью уравнения (4) определяются на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ перемещения, деформации и напряжения пластинки. Таким образом, задача

$$A(a, b, \bar{U}(t), t_{k+1}) = \max_{x \in V} \left[\sum_{t=t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij}^c \right] \rightarrow \inf, \tag{8}$$

$$a = \bar{U}(t_k), \quad b = \bar{U}(t_{k+1}), \quad \Delta t \leq t_{k+1} - t_k \tag{9}$$

будет определять элементарную операцию, соединяющую точки a и b . Через $\Delta_{k+1}(a, b)$ обозначается множество всех управлений $\bar{U}(t)$, для которых выполняется (4), (9).

Если все точки всех соседних шкал попарно соединены элементарными операциями и (8) выполняется для каждого k , то величина

$$\sum_{k=0}^{N-1} M_{k+1}(u_{kp_k}, u_{k+1,p_{k+1}}) \tag{10}$$

представляет собой значение функции (3) на управлении $\bar{U}(t) = \bar{U}_{k+1}(t)$, $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $\bar{U}(0) = 0$, где $M_{k+1}(a, b) = \inf_{\bar{U} \in \Delta_{k+1}(a, b)} A(a, b, \bar{U}(t), t_{k+1})$.

Таким образом, по всевозможным наборам точек $(u_{0p_0}, u_{1p_1}, \dots, u_{Np_N})$, $u_{kp_k} \in H_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, необходимо отыскать минимум (10).

Пусть

$$C_s(a) = \inf \left[\sum_{k=1}^s M_k(u_{k-1,p_{k-1}}, u_{k,p_k}) \right], \tag{11}$$

где нижняя грань берется по всем наборам точек $(u_{0p_0}, u_{1p_1}, \dots, u_{kp_k})$, $a = u_{sp_s}$. Иначе говоря, $C_s(a)$ выражает собой кратчайшее расстояние между точкой $a = u_{sp_s} \in H_s$ и шкалой H_0 . Функция $C_s(a)$ удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям:

$$C_s(b) = \inf_{a \in H_{s-1}} [M_s(a, b) + C_{s-1}(a)], \quad s = 1, \dots, N, \quad C_0(a) = 0. \tag{12}$$

Доказательство проводится аналогично [20]. Согласно (11), справедливость (12) при $s = 1$ очевидна. Докажем при других s , $1 < s \leq N$. Для этого убедимся в том, что

$$C_s(b) \leq \inf_{a \in H_{s-1}} [M_s(a, b) + C_{s-1}(a)], \quad b \in H_s. \tag{13}$$

По определению $C_{s-1}(a)$, для произвольного $a \in H_{s-1}$ и $\varepsilon > 0$ найдется путь, соединяющий точку a со шкалой H_0 , длина которого не превышает $C_{s-1}(a) + \varepsilon$. Длина пути, соединяющего точку b со шкалой H_0 через точку a , не превышает $M_s(a, b) + C_{s-1}(a) + \varepsilon$. В силу произвольности точки $a \in H_{s-1}$ и величины $\varepsilon > 0$ неравенство (13) справедливо.

По определению $C_s(b)$, с другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется путь, соединяющий точку $b \in H_s$ со шкалой H_0 , длина которого не превышает $C_s(b) + \varepsilon$. Пусть этот путь проходит через точку $a_\varepsilon \in H_{s-1}$. Отрезок этого пути от $a_\varepsilon \in H_{s-1}$ до H_0 не меньше $C_{s-1}(a_\varepsilon)$, поэтому весь путь от b до H_0 не меньше $M_s(a_\varepsilon, b) + C_{s-1}(a_\varepsilon) \leq C_s(b) + \varepsilon$.

Так как $a_\varepsilon \in H_{s-1}$, то $\inf_{a \in H_{s-1}} [M_s(a, b) + C_{s-1}(a)] \leq C_s(b) + \varepsilon$, или в силу произвольности $\varepsilon > 0$: $\inf_{a \in H_{s-1}} [M_s(a, b) + C_{s-1}(a)] \leq C_s(b)$. Сравнивая это неравенство с (13), получаем (12).

Последовательно применяя (12), находим путь $(u_0^*, u_1^*, \dots, u_N^*)$. Пусть этот путь будет наикратчайшим, тогда $C_s(u_s^*) = M_s(u_{s-1}^*, u_s^*) + C_{s-1}(u_{s-1}^*)$, $s = 1, \dots, N$. Для произвольного пути будет выполняться неравенство $C_s(u_s) \leq M_s(u_{s-1}, u_s) + C_{s-1}(u_{s-1})$. Используя данные неравенства, можно записать $0 = M_s(u_{s-1}^*, u_s^*) + C_{s-1}(u_{s-1}^*) - C_s(u_s^*) \leq M_s(u_{s-1}, u_s) + C_{s-1}(u_{s-1}) - C_s(u_s)$. Просуммировав от 1 до N , находим

$$\sum_{s=1}^N M_s(u_{s-1}^*, u_s^*) + C_0(u_0^*) - C_N(u_N^*) \leq \sum_{s=1}^N M_s(u_{s-1}, u_s) + C_0(u_0) - C_N(u_N).$$

Так как $C_N(u_N^*) = \inf_{u \in H_N} C_N(u) \leq C_N(u_N)$ и $C_0(u_0^*) = C_0(u_0) = 0$, то $\sum_{s=1}^N M_s(u_{s-1}^*, u_s^*) \leq \sum_{s=1}^N M_s(u_{s-1}, u_s)$ для любых путей, соединяющих H_0 и H_N , т.е. получаем в действительности кратчайший путь.

Для уточнения решения полученным методом динамического программирования предлагается использовать метод локальных вариаций [20, 21]. В этом случае предполагается, что некоторый путь l_1 , соединяющий шкалы H_0 и H_N , известен. Для определения более короткого пути последовательно просматриваются шкалы H_0, H_1, \dots, H_N . На шкале H_k выбираются несколько точек, ближайших к точке линии l_1 , и сравниваются пути, проходящие через эти точки, а на других участках путь l_1 остается без изменений. Если находится путь с меньшей длиной, то этот путь принимается за l_1 . Далее просматриваются точки следующей шкалы H_{k+1} . Сетку шкалы H_k перед поиском данным алгоритмом необходимо уменьшить.

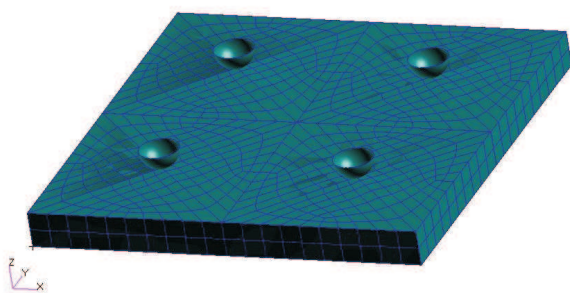


Рис. 1. Модель пластинки

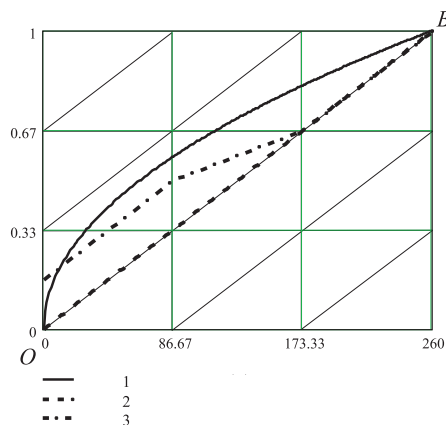


Рис. 2. Законы движения контактных тел

3. Численные результаты решения задач. Задача оптимального деформирования сводится к следующей: среди всех ломаных, соединяющих H_0 и H_N и лежащих в допустимой области, найти линию, длина которой наименьшая. Причем H_N имеет одну точку (полная нагрузка в конечный момент), т.е. имеем задачу с фиксированным концом (в начале возможно мгновенное перемещение, поэтому H_0 может иметь несколько точек).

Решение задачи оптимального управления методом динамического программирования рассматривается на примере формообразования квадратной пластинки в стержневой оснастке (рис. 1).

Материал пластинки изотропен, и его характеристики упругости одинаковы при растяжении и сжатии и равны следующим значениям: модуль Юнга $E = 7000 \text{ кГ/мм}^2$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$. Стадия

установившейся ползучести в экспериментах как при сжатии, так и при растяжении описывается законом Нортона с разными значениями коэффициента B для каждого из этих видов деформирования:

- при сжатии $B_1 = 0.25 \times 10^{-14} (\text{кГ}/\text{мм}^2)^{-n_1} (\text{час})^{-1}$, $n_1 = 8$;
- при растяжении $B_2 = 0.5 \times 10^{-14} (\text{кГ}/\text{мм})^{-n_2} (\text{час})^{-1}$, $n_2 = 8$.

Время деформирования составляет 260 ч.

Движение контактных стержней задается формулой $\bar{u}_{z,l}(t) = f(t)\bar{u}_{z,l}(t)^*$, $l = 1, \dots, 8$. Здесь l — номер контактного тела. Для заданной кривизны пластинки находятся значения перемещений контактных тел $\bar{u}_{z,l}(t)^*$ по методу (2).

Рассмотрим случай, когда $N = 3$ и функция $f(t)$ одинакова для всех стержней. Возможные варианты функций $f(t)$ представляют собой ломаные, проходящие от точки O к точке B (рис. 2). Необходимо найти среди этих ломаных оптимальную. В результате решения задачи методом динамического программирования среди данных возможных вариантов оптимальным будет путь деформирования по линейной функции (линия 2 на рис. 2). Этот путь деформирования — это грубое оптимальное решение, которое совпадает с найденным аналитически оптимальным путем деформирования при бесконечно малых деформациях.

В рассмотренном методе исходная задача сводится к последовательности вспомогательных более простых задач минимизации. Данный метод уменьшает объем вычислений по сравнению с простым перебором всевозможных путей деформирования, так как в процессе расчета неоптимальные траектории исключаются.

С помощью данного алгоритма для $N = 3$ нужно провести $9 \times 3 = 27$ выборов для нахождения оптимального пути. Несложно посчитать, что общее количество путей от начальной точки до конечной по отрезкам будет составлять 63 варианта. Если принять за r ч время расчета задачи по некоторому пути для любого отдельного интервала $[t_k, t_{k+1}]$, то по предложенному алгоритму время перебора вариантов составит $9 \times r + 9 \times 2r + 9 \times 3r = 54r$ ч, а всех полных путей — $63 \times 3r = 189r$ ч. При увеличении рассматриваемых интервалов по представленному алгоритму время расчета оптимального пути значительно сокращается по сравнению с полным перебором вариантов.

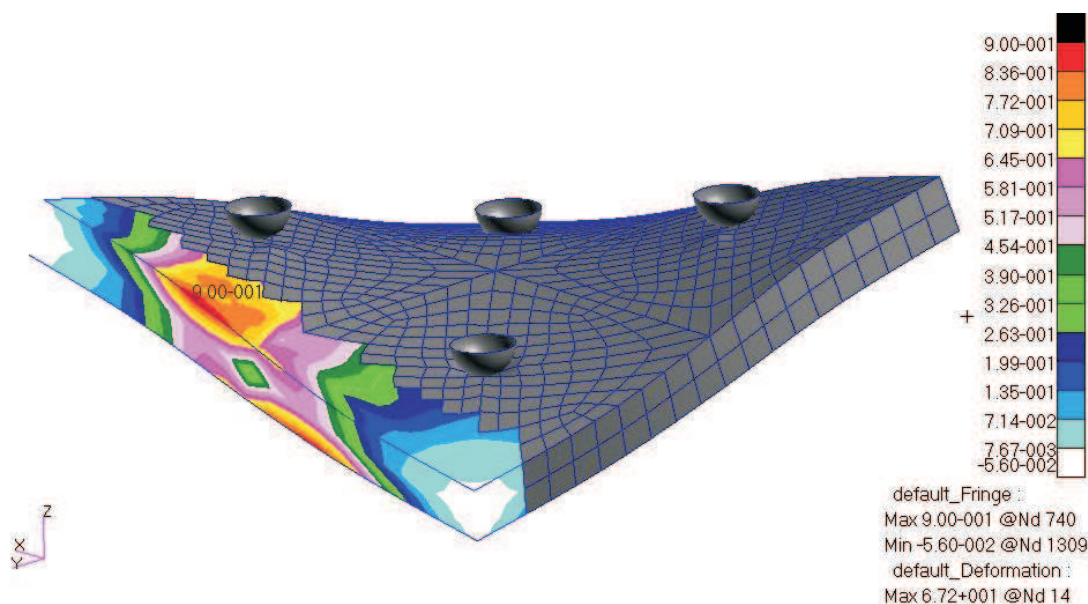


Рис. 3. Деформированная конфигурация пластинки и максимальное значение энергии рассеяния (кГ/мм²)

Для получения более точного решения необходимо брать более густую сетку ($N \rightarrow \infty$) и увеличить варианты связи точек соседних шкал, но это приведет к значительному увеличению рассматриваемых вариантов для каждого момента времени t_k и соответственно к значительному росту времени расчета. Эффективнее будет, если полученное грубое решение методом динамического программирования уточнить методом локальных вариаций [20, 21]. Для этого добавляются точки сверху и снизу от найденной линии на расстоянии $1/6$. Проверяются для каждого t_k варианты полученной ломаной линии. В результате оптимальной ломаной линией будет линия 3 (рис. 2). По данному пути движения контактных тел деформированная конфигурация и максимальное значение энергии рассеяния в пластинке представлены на рис. 3. Как видно из рис. 2, эта линия приближается к линии 1, представляющей функцию $f(t) = \sqrt{\frac{t}{T}}$.

Таким образом, при уменьшении сетки оптимальная ломаная линия, вычисленная предложенным методом, будет приближаться к оптимальной кривой, полученной аналитически.

При вычислении оптимального пути деформирования остаточные деформации могут измениться. В этом случае решается обратная задача формообразования итерационным методом (2).

4. Заключение. Разработанный алгоритм по сравнению с представленным в [13] не зависит от геометрии модели и свойств материала.

Таким образом, рассмотренный выше численный метод позволяет находить рациональные процессы формообразования не только для идеальной пластинки или оболочки, но и для таких деталей, как панели крыла.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-31-60038 мол_а_дк) и Совета по грантам Президента РФ (МД-4117.2018.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Портной В.А., Портной А.В.* К вопросу о рациональном проектировании монолитных панелей // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2006. № 2. 9–13.
2. *Веричев С.Н., Горев Б.В., Банщикова И.А.* Формообразование изгибом в режиме пластичности элементов самолетных конструкций // Обработка металлов. 2014. № 4. 85–93.
3. *Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С.* Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // Прикладная механика и техническая физика. 2010. **51**, № 4. 155–165.
4. *Соснин О.В., Никитенко А.Ф., Горев Б.В.* К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов // Прикладная механика и техническая физика. 2010. **51**, № 4. 188–197.
5. *Walczyk D.F., Lakshmiathan J., Kirk D.R.* Development of a reconfigurable tool for forming aircraft body panels // Journal of Manufacturing Systems. 1998. **17**, N 4. 287–296
6. *Walczyk D.F., Hardt D.E.* Design and analysis of reconfigurable discrete dies for sheet metal forming // Journal of Manufacturing Systems. 1998. **17**, N 6. 436–454.
7. *Haas E., Schwarz R.C., Papazian J.M.* Design and test of a reconfigurable forming die // Journal of Manufacturing Processes. 2002. **4**, N 1. 77–85.
8. *Simon D., Kern L., Reinhart G.* A reconfigurable tooling system for producing plastic shields // Procedia CIRP. 2014. **17**. 853–858.
9. *Su S.Z., Li M.Z., Liu C.G., Ji C.Q., Setchi R., Larkiola J., Pantelev I., Stead I., Lopez R.* Flexible tooling system using reconfigurable multi-point thermoforming technology for manufacturing freeform panels // Key Engineering Materials. 2012. **504–506**. 839–844.
10. *Бормотин К.С.* Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. **53**, № 12. 2091–2099.
11. *Бормотин К.С., Бельх С.В., Вин Аунг.* Математическое моделирование обратных задач многоточечного формообразования в режиме ползучести с помощью реконфигурируемого устройства // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**. 258–267.
12. *Бормотин К.С.* Метод решения обратных задач неупругого деформирования тонкостенных панелей // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 359–370.
13. *Bormotin K.S., Belykh S.V., Win Aung.* Simulation and estimation of parameters in reconfigurable multipoint forming processes of plates in the creep mode // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 129. doi 10.1051/mateconf/201712905004.
14. *Цвелодуб И.Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1991.
15. *Бормотин К.С., Олейников А.И.* Вариационные принципы и оптимальные решения обратных задач изгиба пластин при ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2012. **53**, № 5. 136–146.
16. *Wriggers P.* Computational contact mechanics. Berlin: Springer, 2006.
17. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
18. *Bathe K.-J.* Finite element procedures. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1982.
19. Marc: Advanced Nonlinear Simulation Solution, MSC.Software Corporation. <http://www.mscsoftware.com/product/marc>.
20. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
21. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию
03.09.2018

A Method of Dynamic Programming in the Problems of Optimal Panel Deformation in the Creep Mode

K. S. Bormotin¹, and Win Aung²

¹ *Komsomol'sk-na-Amure State University, Institute for Computer Design of Mechanical Engineering Equipment and Machines; prospekt Lenina 27, Komsomol'sk-na-Amure, 681013, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: cvmi@knastu.ru*

² *Komsomol'sk-na-Amure State University, Faculty of Computer Technologies; prospekt Lenina 27, Komsomol'sk-na-Amure, 681013, Russia; Graduate Student, e-mail: cvmi@knastu.ru*

Received September 3, 2018

Abstract: The problems of modeling the panel forming processes in the creep mode with the aid of a reconfigurable rod punch are considered. The problem of deformation in creep with consideration of geometric nonlinearity and contact conditions is solved by the finite element method. The experimental results allow one to identify the effect of scattering with the damage parameter. In this case, the forming processes allow controlling the level of material damage and coordinating with technological constraints due to the optimal choice of the strain path in time. A discrete optimal control problem is formulated and is solved by the method of dynamic programming with the refinement of the solution by the method of local variations. The efficiency of the proposed method is shown in comparison with a full search of variants for the strain paths.

Keywords: inverse problems of forming, creep, elasticity, variational principles, iterative methods, finite element method, damage, discrete optimal control problem, dynamic programming method, local variation method.

References

1. V. A. Portnoy and A. V. Portnoy, "On Rational Design of Stable Integral Panels," *Vestn. Tupolev Gos. Tekh. Univ.*, No. 2, 9–13 (2006).
2. S. N. Verichev, B. V. Gorev, and I. A. Banshchikova, "The Shaping by Bending of Elements Aircraft Structures at Plasticity Conditions," *Obrabotka Metallov*, No. 4, 85–93 (2014).
3. B. D. Annin, A. I. Oleinikov, and K. S. Bormotin, "Modeling of Forming of Wing Panels of the SSJ-100 Aircraft," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **51** (4), 155–165 (2010) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **51** (4), 579–589 (2010)].
4. O. V. Sosnin, A. F. Nikitenko, and B. V. Gorev, "Justification of the Energy Variant of the Theory of Creep and Long-Term Strength of Metals," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **51** (4), 188–197 (2010) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **51** (4), 608–614 (2010)].
5. D. F. Walczyk, J. Lakshmikanthan, and D. R. Kirk, "Development of a Reconfigurable Tool for Forming Aircraft Body Panels," *J. Manuf. Syst.* **17** (4), 287–296 (1998).
6. D. F. Walczyk and D. E. Hardt, "Design and Analysis of Reconfigurable Discrete Dies for Sheet Metal Forming," *J. Manuf. Syst.* **17** (6), 436–454 (1998).
7. E. Haas, R. C. Schwarz, and J. M. Papazian, "Design and Test of a Reconfigurable Forming Die," *J. Manuf. Process.* **4** (1), 77–85 (2002).
8. D. Simon, L. Kern, J. Wagner, and G. Reinhart, "A Reconfigurable Tooling System for Producing Plastic Shields," *Procedia CIRP* **17**, 853–858 (2014).
9. S. Z. Su, M. Z. Li, C. G. Liu, et al., "Flexible Tooling System Using Reconfigurable Multi-Point Thermoforming Technology for Manufacturing Freeform Panels," *Key Eng. Mater.* **504–506**, 839–844 (2012).
10. K. S. Bormotin, "Iterative Method for Solving Geometrically Nonlinear Inverse Problems of Structural Element Shaping under Creep Conditions," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **53** (12), 2091–2099 (2013) [*Comput. Math. Math. Phys.* **53** (12), 1908–1915 (2013)].
11. K. S. Bormotin, S. V. Belykh, and Win Aung, "Mathematical Modeling of Inverse Multipoint Forming Problems in the Creep Mode Using a Reconfigurable Tool," *Vychisl. Metody Programm.* **17**, 258–267 (2016).
12. K. S. Bormotin, "A Method for Solving Inverse Problems of Inelastic Deformation of Thin-Walled Panels," *Vychisl. Metody Programm.* **18**, 359–370 (2017).

13. K. Bormotin, S. Belykh, and Win Aung, "Simulation and Estimation of Parameters in Reconfigurable Multipoint Forming Processes of Plates in the Creep Mode," MATEC Web Conf. **129** (2017). doi 10.1051/mateconf/201712905004.
14. I. Yu. Tselodub, *A Stability Postulate and Its Applications in the Theory of Creep for Metallic Materials* (Hydrodynamics Inst., Novosibirsk, 1991) [in Russian].
15. K. S. Bormotin and A. I. Oleinikov, "Variational Principles and Optimal Solutions of the Inverse Problems of Creep Bending of Plates," Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **53** (5), 136–146 (2012) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **53** (5), 751–760 (2012)].
16. P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics* (Springer, Berlin, 2006).
17. S. N. Korobeinikov, *Nonlinear Deformation of Solids* (Izd. Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
18. K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures* (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1982).
19. Marc: Advanced Nonlinear Simulation Solution, MSC Software Corporation.
<http://www.mssoftware.com/product/marc>. Cited November 8, 2018.
20. F. P. Vasil'ev, *Methods of Optimization* (Faktorial Press, Moscow, 2002) [in Russian].
21. N. N. Moiseev, *Elements of the Theory of Optimal Systems* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].