

УДК 519.61; 517.977.1

doi 10.26089/NumMet.v19r438

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА АЛГОРИТМОВ СТАБИЛИЗАЦИИ

А. А. Корнев¹

Теоретически и численно исследуется оператор проектирования $Q[a]$, действующий из линейного пространства функций $a(x) \in \text{span}\{\sin ix, i \geq 1\}$, заданных на отрезке $[0, \pi]$, на подпространство функций вида $\tilde{a}(x) \in \text{span}\{\sin ix, i > i_0\}$. Соответствующая проекция выполняется вдоль подпространства $l(x) \in \text{span}\{\overline{\sin} ix, i = 1, \dots, i_0\}$, где $\overline{\sin} ix = \chi_\delta(x) \sin ix$, $\chi_\delta(x)$ — характеристическая функция интервала $[0, \delta)$. Полученные результаты применяются при решении задач стабилизации по начальным данным решений модельных нестационарных уравнений.

Ключевые слова: численные методы, операторы проектирования, стабилизация.

Рассмотрим гильбертово пространство H функций $u(x)$, заданных на отрезке $[0, \pi]$ и равных нулю на границе, т.е. $u(0) = u(\pi) = 0$, образованное ортонормированными функциями $\xi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ix)$, $x \in [0; \pi]$, $(\xi_i, \xi_j) = \int_0^\pi \xi_i(x)\xi_j(x) dx = \delta_{ij}$. Будем считать, что исходное пространство H представлено в виде прямой суммы $H = H_+ \oplus H_-$, где

$$H_+ = \text{span}\{\xi_i(x), i = 1, \dots, i_0\}, \quad H_- = \text{span}\{\xi_i(x), i = i_0 + 1, i_0 + 2, \dots\},$$

т.е. подпространство H_+ является линейной оболочкой первых i_0 функций $\sin ix$, H_- — ортогональное к нему дополнение.

Выберем некоторое $0 < \delta \leq \pi$, представим отрезок $\omega = [0, \pi]$ в виде объединения $\omega_\delta = [0, \delta)$ и $\bar{\omega} = [\delta, \pi]$ и определим подпространство $\mathcal{L} = \text{span}\{l_i(x), i = 1, \dots, i_0\}$ как линейную оболочку следующих функций:

$$l_i(x) = d_i \overline{\sin}(ix) = \begin{cases} 0, & x \in \bar{\omega}; \\ d_i \sin(ix), & x \in \omega_\delta, \quad d_i = (l_i, l_i)^{-1/2}. \end{cases}$$

Каждая функция $l_i(x)$ является нормированным (в интегральной норме) следом на ω_δ соответствующей функции $\xi_i(x)$. Зададим оператор проектирования $Q[\cdot]$, действующий из пространства H в подпространство H_- вдоль подпространства допустимых смещений \mathcal{L} стандартным образом:

для произвольной функции $a(x) \in H$ проекция $Q[a(x)] \in H_-$ имеет вид $Q[a] = \tilde{a}(x) = a(x) + l(x)$, где

$l(x) = \sum_{i=1}^{i_0} c_i l_i(x)$, а вектор коэффициентов $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_{i_0}]$ определяется из условия $\tilde{a}(x) \in H_-$, т.е. из соотношений $(a(x) + l(x), \xi_i) = 0$, $i = 1, \dots, i_0$.

Сформулированная задача вычисления проекции $Q[a]$ является базовой для методов стабилизации по начальным данным, правой части и краевым условиям широкого класса линейных и нелинейных одномерных нестационарных задач [1, 4–8].

При этом условие $l(x)|_{\bar{\omega}} \equiv 0$ означает, что функция $a(x)$ не изменяется на подобласти $\bar{\omega}$, условие $\tilde{a}(x) \in H_-$ гарантирует, что асимптотическая скорость убывания решения с начальными данными $\tilde{a}(x)$ будет выше, чем с начальными данными $a(x)$, а совпадение \mathcal{L} и H_+ на подобласти ω_δ обеспечивает в некотором смысле минимальность поправки $l(x)$.

Для поиска коэффициентов \mathbf{c} вектора поправки $l(x)$ достаточно решить систему уравнений $A\mathbf{c} = -\mathbf{a}$ с проекционной матрицей $(A)_{ij} = (l_j, \xi_i) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} d_j (\sin jx, \sin ix)_{\omega_\delta}$ и с правой частью, имеющей вид $-(\mathbf{a})_i = -(a, \xi_i)$. Отметим, что при указанном выборе функций $\xi_i(x)$ и $l_j(x)$ матрица A несимметрична, а ее коэффициенты $(A)_{ij}$ равны косинусу угла θ_{ij} между векторами ξ_i и l_j .

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; профессор, e-mail: kornev@mech.math.msu.su

Качество полученной проекции $\tilde{a}(x) = Q[a(x)]$ и, как следствие, успешность дальнейшего решения задачи стабилизации зависит от точности решения системы $A\mathbf{c} = -\mathbf{a}$, от C -нормы полученной проекции $\tilde{a}(x)$ и от значений ненулевых коэффициентов $\{\tilde{a}_{i_0+1}, \tilde{a}_{i_0+2}, \dots\}$. Следовательно, при фиксированных δ и i_0 важнейшими характеристиками оператора $Q[a]$ (с точки зрения задач стабилизации) являются величины

$$\text{cond}_\infty(A), \quad \sup_{\|\mathbf{a}\|_\infty=1} \max_{i=1, \dots, i_0} |c_i| \|l_i\|_C, \quad \sup_{\|\mathbf{a}\|_2=1} (\tilde{a}, \xi_{j_0})^2 = \phi^2(j_0), \quad j_0 > i_0.$$

При этом число обусловленности $\text{cond}_\infty(A)$ характеризует вычислительную устойчивость задачи нахождения проекции $\tilde{a}(x)$; значения $c_i \|l_i\|_C$ отвечают за C -норму функции поправки $l(x)$ и характеризуют сложность реализации найденного управления; величина $\phi(i_0 + 1) = |\tilde{a}_{i_0+1}|$ является наибольшей из возможных констант в оценке асимптотической скорости стабилизации, а наибольшие значения коэффициентов $|\tilde{a}_{j_0}| = \phi(j_0)$, где $j_0 \geq i_0 + 1$, позволяют оценить L_2 -норму функции $\tilde{a}(x)$ и скорость реальной стабилизации на начальном временном отрезке. Отдельный интерес представляет асимптотика указанных параметров при уменьшении размера области стабилизации (т.е. от величины δ) и при увеличении размерности i_0 подпространства \mathcal{L} . Отметим, что в работе [4] для подобной задачи доказана экспоненциальная оценка скорости роста $\text{cond}_2(A)$ по параметру i_0 , что по сути приводит к ограничению i_0 заведомо меньше ста. Для такой размерности две первые величины не сложно явно оценить в терминах коэффициентов a_{ij} исходной матрицы A и коэффициентов \bar{a}_{ij} обратной матрицы A^{-1} :

$$\text{cond}_\infty(A) = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty, \quad \sup_{\|\mathbf{a}\|_\infty=1} \max_{i=1, \dots, i_0} |c_i| \|l_i\|_C \leq \|A^{-1}\|_\infty \max_{i=1, \dots, i_0} \|l_i\|_C = \varphi.$$

Для определения величины $\phi(j_0)$ при $j_0 > i_0$ требуется решить следующую задачу квадратичной минимизации с ограничениями типа равенств:

при фиксированных δ , i_0 и выбранном j_0 найти такую функцию $a(x)$ с единичной L_2 -нормой, что в результате решения задачи проектирования $a(x)$ на подпространство H_- вдоль подпространства \mathcal{L} коэффициент \tilde{a}_{j_0} максимален.

Далее будем считать, что $a(x) \in H_+$. В этом случае для заданного $j_0 > i_0$ требуется найти такие коэффициенты $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{i_0})^T$, определяющие начальную функцию $a(x) = \sum_{i=1}^{i_0} a_i \xi_i(x)$, и коэффициенты

$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{i_0})^T$ соответствующей поправки $l(x) = \sum_{i=1}^{i_0} c_i l_i(x)$, что

$$\phi^2(a, j_0) = \left(\sum_{i=1}^{i_0} a_i \xi_i + \sum_{i=1}^{i_0} c_i l_i, \xi_{j_0} \right)^2 \rightarrow \sup, \quad (1.1)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{i_0} a_i \xi_i + \sum_{i=1}^{i_0} c_i l_i, \xi_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, i_0, \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^{i_0} a_i^2 - 1 = 0. \quad (1.3)$$

Данная задача является стандартной задачей квадратичной минимизации, и ее решение может быть получено хорошо известными методами типа явной подстановки, QR-разложения и GSVD-разложения. В том числе, верна следующая

Лемма. *Для указанных функций $\{l_i(x), \xi_i(x)\}$ оператор $Q[a]$ корректно определен при всех $0 < \delta \leq \pi$, т.е. существует обратная матрица $(A^{-1})_{ij} = \bar{a}_{ij}$. При этом решение задачи (1.1)–(1.3) существует, единственно и имеет следующий вид:*

$$a_i = \gamma_i p, \quad \text{где} \quad p = \left(\sum_{i=1}^{i_0} \gamma_i^2 \right)^{-1/2}, \quad \gamma_j = \sum_{i=1}^{i_0} \beta_i \bar{a}_{ij}, \quad \beta_i = (l_i, \xi_{j_0}).$$

Доказательство. Запишем условие (1.2) в матричном виде $A\mathbf{c} = -\mathbf{a}$, $(A)_{ij} = (l_j, \xi_i)$, $i, j = 1, \dots, i_0$. Так как система векторов $\{l_i, i = 1, \dots, i_0\}$ линейно независима на отрезке ω_δ (что несложно доказать по

индукции методом от противного, дважды дифференцируя соответствующую линейную комбинацию), а матрица A является матрицей типа Грама, то из невырожденности A для произвольного $i_0 \geq 1$ формально имеем $\mathbf{c} = -A^{-1}\mathbf{a}$, т.е. $c_i = -\sum_{j=1}^{i_0} \bar{a}_{ij}a_j$, где $\bar{a}_{ij} = (A^{-1})_{ij}$. Введем обозначение $\beta_i = (l_i, \xi_{j_0})$ и перепишем выражение для функции $\phi(a, j_0)$ с учетом $(\xi_i, \xi_{j_0}) = 0, i < j_0$ и полученного представления c_i , в виде

$$\phi^2(a, j_0) = \left(\sum_{i=1}^{i_0} c_i \beta_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{i_0} \beta_i \sum_{j=1}^{i_0} \bar{a}_{ij} a_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{i_0} \gamma_j a_j \right)^2,$$

где $\gamma_j = \sum_{i=1}^{i_0} \beta_i \bar{a}_{ij}$. В результате (при известных γ_j) задачу (1.1)–(1.3) запишем в канонической форме:

$$\begin{cases} \phi^2(a, j_0) = \left(\sum_{j=1}^{i_0} \gamma_j a_j \right)^2 \rightarrow \sup, \\ \varphi(a) = \sum_{i=1}^{i_0} a_i^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Ее решение не сложно выписать в терминах функции Лагранжа $L = \phi^2(a, j_0) + \lambda\varphi(a)$. Действительно, из условий $\frac{\partial L}{\partial a_i} = 0$ имеем $\gamma_i \left(\sum_{j=1}^{i_0} \gamma_j a_j \right) + \lambda a_i = 0$, т.е. $a_i = \gamma_i p, p = -\lambda^{-1} \sum_{j=1}^{i_0} \gamma_j a_j$. Подставляя данное соот-

ношение в $\varphi(a) = 0$, находим $p^2 \sum_{i=1}^{i_0} \gamma_i^2 = 1$, т.е. $p = \left(\sum_{i=1}^{i_0} \gamma_i^2 \right)^{-1/2}$. Это приводит к искомым соотношениям.

Лемма доказана.

Замечание. Общий случай $a(x) \in H$ сводится, как указал М.А. Ложников, к начальным функциям вида $\sum_{i=1}^{i_0} a_i \xi_i + a_{j_0} \xi_{j_0}$ и может быть исследован аналогично.

Как отмечалось ранее, нас интересует поведение функций $\text{cond}_\infty(A), \varphi, \phi(j_0)$ при увеличении i_0 и малых δ . Из соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \sin^2 mx \, dx &= \frac{\delta}{2} - \frac{\sin 2\delta m}{4m}, \\ \int_0^\delta \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{n \cos(n\delta) \sin(m\delta) - m \cos(m\delta) \sin(n\delta)}{m^2 - n^2} = \\ &= \frac{\delta^3 mn}{3} - \frac{\delta^5 mn(m^2 + n^2)}{30} + \frac{\delta^7 (3m^5 n + 10m^3 n^3 + 3mn^5)}{2520} + O(\delta^8) \end{aligned}$$

и условия нормировки $1 = d_i^2 (\overline{\sin ix}, \overline{\sin ix})$ находим асимптотику для нормировочного коэффициента и элементов матрицы:

$$d_i = \frac{\sqrt{3}}{i} \delta^{-3/2} + \frac{i\sqrt{3}}{10} \delta^{1/2} + O(\delta^{5/2}), \quad (A)_{ij} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} d_j \int_0^\delta \sin(jx) \sin(ix) \, dx = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} i \delta^{3/2} + O(\delta^{7/2}).$$

Отсюда получаем, что при $\delta \rightarrow 0$ косинус угла $\cos \theta_{ij} = (A)_{ij}$ между векторами l_j, ξ_i стремится к нулю, т.е. подпространства \mathcal{L} и P_+ становятся ортогональными. Это влечет вырождение оператора проектирования и увеличение нормы соответствующего вектора поправки.

При $i_0 = 1$ для величин $\text{cond}_\infty(A), \varphi, \phi(j_0)$ не сложно выписать аналитические формулы. В этом случае для начальной функции $a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x)$ соответствующая проекция ищется в виде

$$\tilde{a}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x) + c_1 d_1 \overline{\sin x}$$

из условия $\left(\tilde{a}(x), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x)\right) = 0$. Отсюда получаем

$$c_1 = - \left[d_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\overline{\sin} x, \sin x) \right]^{-1} = -\sqrt{\frac{3\pi}{2}} \delta^{-3/2} + O(\delta^{1/2}), \quad \text{cond}_\infty(A) = 1,$$

$$\varphi = |c_1| d_1 \|\overline{\sin} x\|_{C[0,\delta]} = 3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta^{-2} + O(1),$$

$$\phi(j_0) = |c_1| d_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\overline{\sin} x, \sin j_0 x) = \frac{(\overline{\sin} x, \sin j_0 x)}{(\overline{\sin} x, \sin x)} = j_0 + O(\delta^2),$$

$$\|l\|_{L_2[0,\pi]} = |c_1| = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \delta^{-3/2} + O(\delta^{1/2}).$$

Таким образом, при $\delta \rightarrow 0$ имеем, что C -норма функции поправки $l(x)$ увеличивается квадратично, L_2 -норма растет как $O(\delta^{-3/2})$, однако величина проекции $\left(l(x), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin j_0 x\right) \sim j_0$, т.е. остается ограниченной по δ и растет линейно по j_0 . Отметим, что в данном случае для получения требуемых асимптотик достаточно взять первый член в разложении $\sin mx \sim mx$.

Аналогично при $i_0 = 2$ имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}} d_1 \left(\frac{2x^7}{315} - \frac{x^5}{15} + \frac{x^3}{3} \right) & \sqrt{\frac{2}{\pi}} d_2 \left(\frac{13x^7}{180} - \frac{x^5}{3} + \frac{2x^3}{3} \right) \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} d_1 \left(\frac{13x^7}{180} - \frac{x^5}{3} + \frac{2x^3}{3} \right) & \sqrt{\frac{2}{\pi}} d_2 \left(\frac{128x^7}{315} - \frac{16x^5}{15} + \frac{4x^3}{3} \right) \end{pmatrix},$$

$$\det(A) \sim \frac{\delta^{10}(448 + 840\delta^2 - 155\delta^4)}{58800} \frac{2}{\pi} d_1 d_2 = \frac{12}{525\pi} \delta^7 + O(\delta^9).$$

$$A^{-1} \sim C_2 \begin{pmatrix} -\frac{16}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} d_1} (32\delta^4 - 84\delta^2 + 105) & \frac{7}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} d_1} (13\delta^4 - 60\delta^2 + 120) \\ \frac{7}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} d_2} (13\delta^4 - 60\delta^2 + 120) & -\frac{4}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} d_2} (2\delta^4 - 21\delta^2 + 105) \end{pmatrix},$$

где $C_2 = 140 / \left(3x^7(155x^4 - 840x^2 - 448)\right)$.

Отметим, что в данном случае асимптотическое разложение необходимо выписывать до $O(\delta^7)$, так как при меньшей точности матрица A является вырожденной.

Приведем результаты расчетов для $i_0 = 1 \div 15$, полученные с использованием пакета GMP/mpfr в рамках 1024-битной арифметики. Согласно [4], при фиксированном δ обусловленность проекционной матрицы растет экспоненциально по размерности i_0 подпространства \mathcal{L} , т.е.

$$\ln(\text{cond}_\infty(A)) = \ln \|A\|_\infty + \ln \|A^{-1}\|_\infty \sim k_1(\delta) i_0 + l_1(\delta).$$

На рис. 1 и 2 приведены графики функций $\ln(\text{cond}_\infty(A))$ в зависимости от i_0 . Указанный номер графика n определяет величину δ следующим образом: $\delta = n\pi \times 10^{-2}$, т.е. при $n = 100$ управление реализуется на всем отрезке, а при $n = 1$ на 1% его длины. Отметим, что семейство функций $\ln \|A^{-1}\|_\infty \sim k_2(\delta) i_0 + l_2(\delta)$ имеет близкую структуру.

На рис. 3 приведены графики $k_{1,2}(n)$ и $l_{1,2}(n)$. При этом искомое линейное приближение (т.е. коэффициенты $k_{1,2}$ и $l_{1,2}$) для каждого фиксированного δ вычислялись в результате линейной интерполяции по крайним точкам $i_0 = 1$ и $i_0 = 15$. В данном случае $\text{cond}_\infty(A)|_{i_0=1} = 1$, т.е. $l_1 \equiv 0$, а коэффициенты $k_{1,2}$, l_2 неограниченно растут при $\delta \rightarrow 0$. Коэффициенты $k_{1,2}$, найденные по точкам $i_0 = 10$ и $i_0 = 15$, имеют близкие значения. Отметим, что $\varphi = \|A^{-1}\|_\infty \max_{i=1,\dots,i_0} \|l_i\|_C$, следовательно, $\varphi \sim \|A^{-1}\|_\infty \sqrt{3} \delta^{-1/2}$.

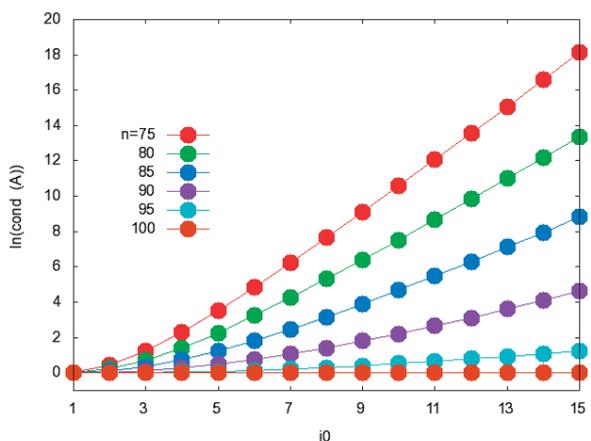


Рис. 1

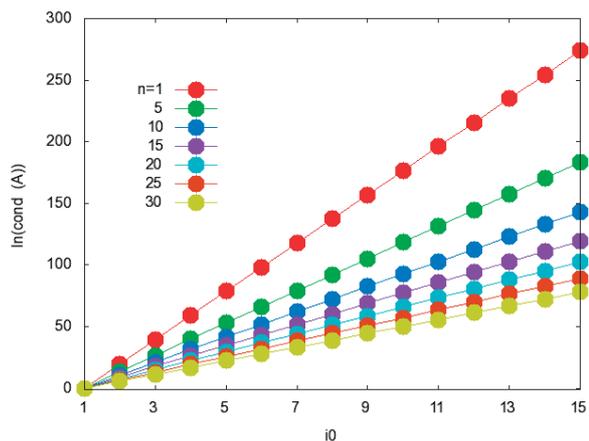


Рис. 2

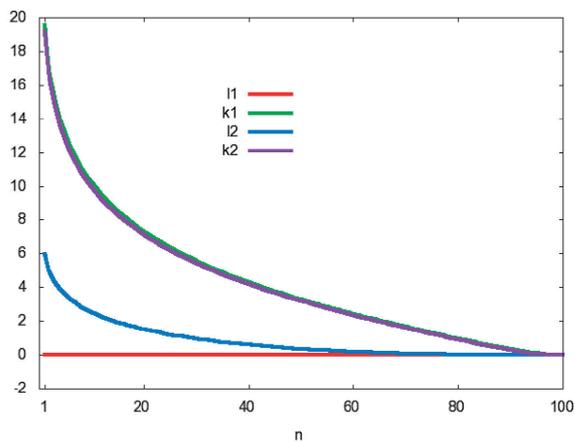


Рис. 3

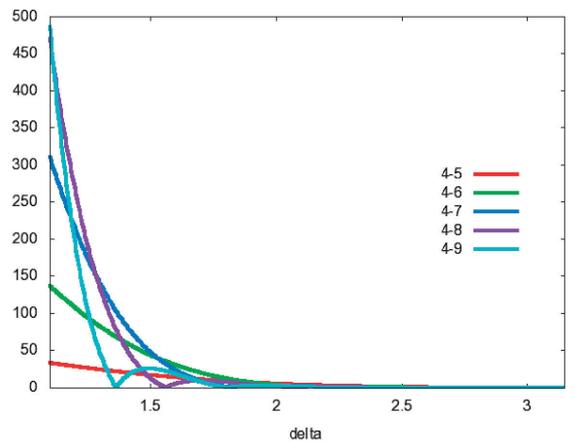


Рис. 4

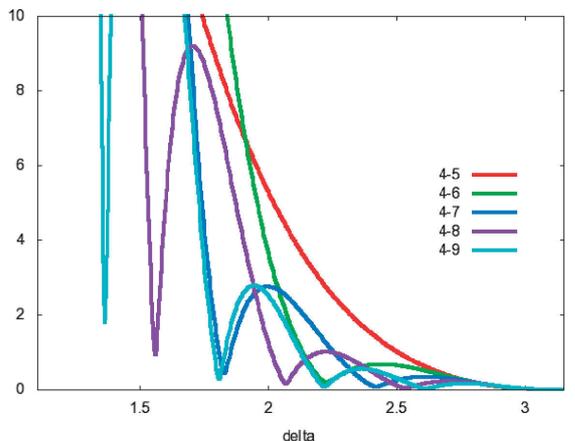


Рис. 5

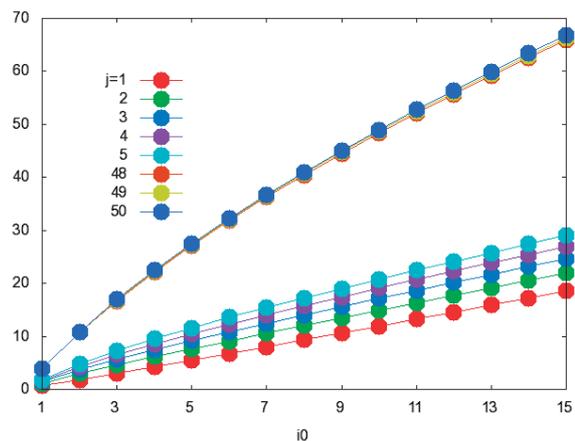


Рис. 6

Численно получено, что функция ϕ имеет иную структуру, в том числе существует ограниченный предел $\phi(\delta, i_0, j_0)$ при $\delta \rightarrow 0$. Подобное свойство, как указал автору Н.Л. Замарашкин, не является типичным. Еще одним важным моментом является поведение $\phi(\delta, i_0 = \text{const}, j_0)$. На рис. 4 и 5 представлено семейство графиков при $i_0 = 4, j_0 = 5, \dots, 15, 0 < \delta \leq \pi$ (отметим, что аналогичная структура сохранялась для всех рассмотренных в процессе исследования значениях i_0). В данном случае величина $\phi(\delta, i_0, j_0 + 1)$ монотонно и ограниченно растет при $\delta \rightarrow 0$, однако при $j_0 > i_0 + 1$ функция $\phi(\delta)$ имеет несколько локальных минимумов. Формально это может означать, что при реализации процесса стабилизации на коротком отрезке времени область стабилизации не обязательно должна быть максимально большой. При этом существенное значение имеет расположение ω_δ относительно исходной области ω (в случае, когда допустимо размещение управляющей подобласти во внутренней части ω).

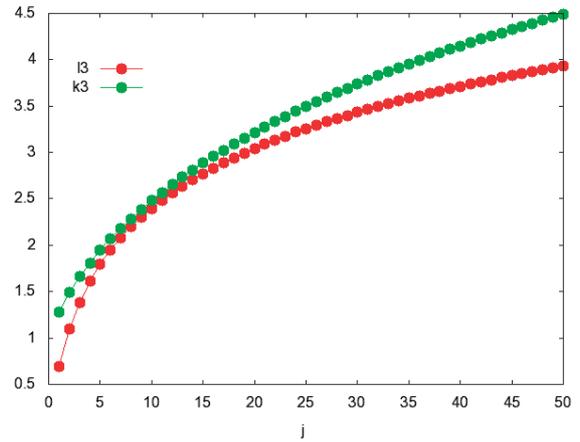


Рис. 7

Рассмотрение предельной поверхности $\phi(\delta, i_0, j_0)|_{\delta \rightarrow 0} = \phi^0(i_0, j_0)$ также удобно провести в терминах линейной аппроксимации $\ln(\phi^0(i_0, j_0)) \sim k_3(i_0)j + l_3(i_0)$. На рис. 6 изображено семейство функций $\ln(\phi^0(i_0, j_0 = i_0 + j))$ в зависимости от $i_0 = 1, \dots, 15$ при $j = 1, 2, 3, 4, 5, 48, 49, 50$; графики соответствующих коэффициентов $k_3(j), l_3(j)$ при $j = 1, 2, \dots, 50$ изображены на рис. 7. Здесь $l_3(j) = \ln(j + 1)$, а коэффициент $k_3(j)$ растет не быстрее линейной функции.

Замечание. Существование ограниченного предела $\phi(\delta, i_0, j_0)$ при $\delta \rightarrow 0$ означает ограниченность коэффициентов $\{\tilde{a}_i\}$ разложения полученной проекции $\tilde{u}(x)$ по базису $\{\xi_i(x)\}$ при всех δ . С точки зрения задач стабилизации данный результат имеет важное значение, в том числе прямым его следствием является

Утверждение. Для линейных (а также квазилинейных) одномерных задач типа теплопроводности асимптотическая скорость процесса стабилизации решения $u(t, x)$ по начальным данным и краевым условиям посредством проектирования на H_- вдоль \mathcal{L} не зависит от величины $\delta > 0$, т.е. верна оценка

$$\|\tilde{u}(t, x)\|_{L_2[0, \pi]} \leq C e^{-\lambda(i_0)t} \|\tilde{u}(0, x)\|_{L_2[0, \pi]}.$$

В качестве демонстрации полученного эффекта рассмотрим решение задачи стабилизации по начальным данным для одномерного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & u = u(t, x), \\ t \geq 0, & x \in \omega = [0, \pi], \\ u(0, x) = a(x) = e^x \sin(x), & u(t, 0) = u(t, \pi) = 0. \end{cases}$$

Хорошо известно, что для начальной функции $u(0, x) = a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i(x)$ решение имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t} \xi_i(x), \quad \lambda_i = i^2.$$

Отсюда, в том числе, следует асимптотика для интегральной нормы решения при больших временах:

$$\|u(t, x)\|_{L_2[0, \pi]} \sim a_1 e^{-t}, \quad t \gg 1.$$

Выберем некоторые δ и i_0 и изменим $a(x)$ на подобласти ω_δ так, что $\tilde{u}(0, x) = \tilde{a}(x) = \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \tilde{a}_i \xi_i(x)$.

Это гарантирует оценку

$$\|\tilde{a}(t, x)\| \sim \tilde{a}_{i_0+1} e^{-(i_0+1)^2 t}, \quad t \gg 1.$$

Пусть $i_0 = 3$. Тогда при $\delta = \pi/10$ имеем

$$\|\tilde{a}(0, x)\| \sim 1.e + 5, \quad \|\tilde{a}(1., x)\| \sim 2.e - 6;$$

при $\delta = \pi/100$ имеем

$$\|\tilde{a}(0, x)\| \sim 4.e + 10, \quad \|\tilde{a}(1., x)\| \sim 2.e - 6,$$

что показывает согласованность численных расчетов и теоретических оценок.

Заключение. Предложенная в настоящей статье методика исследования оператора проектирования $Q[a]$, а также постановка задачи (1.1)–(1.3) и найденное для нее аналитическое решение могут применяться при априорном анализе широкого класса задач стабилизации нелинейных нестационарных многомерных уравнений математической физики методом проектирования на устойчивое многообразие, в том числе в случае построения непрерывной проекции $Q[a]$ [5].

Автор искренне признателен Сальникову Д.Е. за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фурсиков А.В. Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Матем. сб. 2001. **192**, № 4. 115–160.
2. Fursikov A. V. Stabilizability of two-dimensional Navier–Stokes equations with help of boundary feedback control // J. Math. Fluid Mech. 2001. **3**, № 3. 259–301.
3. Фурсиков А.В. Реальные процессы и реализуемость метода стабилизации системы Навье–Стокса посредством управления с обратной связью с границы области // Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. Т. 2. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2002. 127–164.
4. Chizhonkov E. V. Numerical aspects of one stabilization method // Russ. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 2003. **18**, N 5. 363–376.
5. Чижонков Е.В. Об операторах проектирования для численной стабилизации // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**. 161–169.
6. Корнев А.А. Об итерационном методе построения “усов Адамара” // ЖВМиМФ. 2004. **44**, № 8. 1346–1355.
7. Корнев А.А., Озерницкий А.В. О приближенном проектировании на устойчивое многообразие // ЖВМиМФ. 2005. **45**, № 9. 1580–1586.
8. Ведерникова Э.Ю., Корнев А.А. К задаче о нагреве стержня // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2014. № 6. 10–16.
9. Корнев А.А. Моделирование процесса стабилизации по краевым условиям квазидвумерного течения четырехвихревой структуры // Математическое моделирование. 2017. **29**, № 11. 99–110.
10. Kornev A. A. The structure and stabilization by boundary conditions of an annular flow of Kolmogorov type // Russ. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 2017. **32**, N 4. 245–251.

Поступила в редакцию
31.08.2018

On Some Properties of the Projection Operator for a Class of Stabilization Algorithms

A. A. Kornev¹

¹ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics;
Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: Kornev@mech.math.msu.su*

Received August 31, 2018

Abstract: The projection operator $Q[a]$ acting from the linear space of the functions $a(x) \in \text{span}\{\sin ix, i \geq 1\}$ given on the segment $[0, \pi]$ onto the subspace of the functions $\tilde{a}(x) \in \text{span}\{\sin ix, i > i_0\}$ is studied theoretically and numerically. The corresponding projection is performed along the subspace of the functions $l(x) \in \text{span}\{\overline{\sin ix}, i = 1, \dots, i_0\}$, where $\overline{\sin ix} = \chi_{\delta}(x) \sin ix$ is the characteristic function $\chi_{\delta}(x)$ of the interval $[0, \delta)$. The obtained results are used to solve the problem of stabilization with respect to the initial data of solutions to the model nonstationary equations.

Keywords: numerical methods, projection operator, stabilization.

References

1. A. V. Fursikov, "Stabilizability of a Quasi-Linear Parabolic Equation by Means of a Boundary Control with Feedback," *Mat. Sb.* **192** (4), 115–160 (2001) [*Sb. Math.* **192** (4), 593–639 (2001)].
2. A. V. Fursikov, "Stabilizability of Two-Dimensional Navier–Stokes Equations with Help of a Boundary Feedback Control," *J. Math. Fluid Mech.* **3** (3), 259–301 (2001).
3. A. V. Fursikov, "Real Processes and Realizability of a Stabilization Method for Navier–Stokes Equations by Boundary Feedback Control," in *Nonlinear Problems of Mathematical Physics and Related Topics* (Tamara Rozhkovskaya, Novosibirsk, 2002), Vol. 2, pp. 127–164.
4. E. V. Chizhonkov, "Numerical Aspects of One Stabilization Method," *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **18** (5), 363–376 (2003).
5. E. V. Chizhonkov, "On Projection Operators for Numerical Stabilization," *Vychisl. Metody Programm.* **5**, 161–169 (2004).
6. A. A. Kornev, "On an Iterative Method for the Construction of Hadamard Mustaches," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **44** (8), 1346–1355 (2004) [*Comput. Math. Math. Phys.* **44** (8), 1274–1283 (2004)].
7. A. A. Kornev and A. V. Ozeritzkii, "On Approximate Projecting on a Stable Manifold," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **45** (9), 1580–1586 (2005) [*Comput. Math. Math. Phys.* **45** (9), 1525–1530 (2005)].
8. E. Yu. Vedernikova and A. A. Kornev, "To the Problem of Rod Heating," *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh.*, No. 6, 10–16 (2014) [*Moscow Univ. Math. Bull.* **69** (6), 237–241 (2014)].
9. A. A. Kornev, "Simulating the Stabilization Process by Boundary Conditions of a Quasi-Two-Dimensional Flow with a Four-Vortex Structure," *Mat. Model.* **29** (11), 99–110 (2017) [*Math. Models Comput. Simul.* **10** (3), 363–372 (2018)].
10. A. A. Kornev, "The Structure and Stabilization by Boundary Conditions of an Annular Flow of Kolmogorov Type," *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **32** (4), 245–251 (2017).