УДК 519.635.1 doi 10.26089/NumMet.v19r431

РЕШЕНИЕ С ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТЬЮ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЯХ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В. П. Шапеев[1], В. А. Беляев[2]

Предложен и реализован новый вариант метода коллокации и наименьших квадратов (КНК) повышенной точности для численного решения неоднородного бигармонического уравнения. Дифференциальная задача методом КНК проектируется в пространство полиномов четвертой и восьмой степеней. Реализованный алгоритм применяется в нерегулярных областях, границы которых заданы аналитическими кривыми, в частности сплайнами. Исходная нерегулярная область включается в прямоугольник, который покрывается регулярной сеткой с прямоугольными ячейками. На границе области используется "одинарный" слой нерегулярных ячеек (н-ячеек), отсеченных границей от прямоугольных граничных ячеек начальной регулярной сетки. Все н-ячейки разбиваются на два класса: самостоятельные, в которых находится центр содержащих их граничных ячеек, и несамостоятельные, центр содержащих их граничных ячеек которых расположен вне области. Вытянутые несамостоятельные граничные н-ячейки присоединяются к соседним самостоятельным ячейкам, и в объединенных ячейках строится свой отдельный кусок аналитического решения. При этом в граничных ячейках, которые пересекла граница, для аппроксимации дифференциальных уравнений использованы "законтурные" (расположенные вне расчетной области) точки коллокации и точки согласования решения задачи. Эти два приема позволили существенно уменьшить обусловленность системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) приближенной задачи по сравнению со случаем, когда несамостоятельные н-ячейки использовались как самостоятельные для построения приближенного решения задачи и не была использована "законтурная" часть граничных ячеек. В численных экспериментах по сходимости приближенного решения различных задач на последовательности сеток установлено, что решение сходится с повышенным порядком и с высокой точностью совпадает с аналитическим решением задачи в случае, когда решение известно. Приведено сравнение полученных результатов с известными результатами других авторов, которые использовали конечно-разностный метод (FDM, Finite Difference Method) повышенного порядка аппроксимации. В качестве приложения решение неоднородного бигармонического уравнения использовано для моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) изотропных тонких пластин нерегулярных форм.

Ключевые слова: метод коллокации и наименьших квадратов, неоднородные бигармонические уравнения, повышенный порядок аппроксимации, нерегулярные области, двойные сплайны.

1. Введение. Бигармонические уравнения играют важную роль во многих областях науки и техники. К их решению сводится моделирование задач линейной теории упругости, гидродинамики при малых числах Рейнольдса, теории тонких пластин и др. Решение бигармонического уравнения, например в линейной теории упругости, используется для представления функции напряжений Эйри, а в теории тонких пластин для моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) изотропных пластин. Последней уделяется особое внимание в настоящей работе. Как отмечают ведущие специалисты, численное решение бигармонического уравнения, несмотря на его линейный характер, вызывает трудности из-за наличия производных четвертого порядка в дифференциальном уравнении. Кроме того, имеет место плохая обусловленность исходной дифференциальной задачи и соответственно приближенных задач, полученных тем или иным способом ее аппроксимации, если в краевых условиях заданы производные второго и третьего порядков искомого решения. Существенно большие трудности имеют место при решении задач численными методами в нерегулярных областях.

[1] Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; главный науч. сотр., e-mail: shapeev.vasily@mail.ru
[2] Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; старший лаборант, e-mail: belyaevasily@mail.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

В настоящее время большинство численных решений краевых задач для бигармонического уравнения получены с помощью FDM (Finite Difference Method) [1–9], главным преимуществом которого является простота построения расчетной сетки и скорость решения различных задач. Другим применяемым методом является метод конечных элементов (FEM, Finite Element Method) [10–13] с использованием неструктурированных сеток. Существуют и другие подходы к решению бигармонического уравнения, более подробное описание которых можно найти в работе [14]. Однако многие методы находят свое применение только для канонических областей. Здесь также следует отметить, что популярна идея решения краевых задач для уравнений с частными производными (PDE, Partial Differential Equations) в нерегулярных областях путем отображения области со сложной границей в каноническую область, для которой затем уже применяется численный метод [15, 16]. О недостатках такого подхода указано в работе [17].

В настоящей статье делается акцент на решении с повышенной точностью краевых задач для неоднородного бигармонического уравнения в нерегулярных областях методом коллокации и наименьших квадратов (КНК) [17, 19–23]. Актуальность данного направления очевидна, поскольку многие явления в природе, которые моделируются с помощью численных методов, происходят в областях со сложной геометрической формой. Как уже было отмечено выше, многие численные методы, которые обеспечивают высокую точность решения краевых задач для PDE в прямоугольных областях, не имеют своих аналогов в случае иных областей. Цель представленной работы — показать, как можно справиться с этой проблемой. Естественно, предложенные здесь подходы тоже применимы и в канонических областях.

Проекционно-сеточный метод КНК [16–33] возник относительно недавно и сочетает в себе свойства метода коллокации и метода наименьших квадратов (МНК). В методе КНК путем проектирования задачи для PDE в конечномерное линейное функциональное пространство ставится в соответствие приближенная задача, решение которой сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение последней определяет приближенное решение дифференциальной задачи. Поскольку в данной работе в методе КНК приближенное решение является кусочно-полиномиальным, в нем относительно просто реализуются варианты метода в областях различной формы и на сетках с различной формой ячеек [17–24], в том числе варианты повышенной точности и на адаптивных сетках [18]. Ранее было показано, что метод КНК обладает рядом достоинств. В нем достаточно легко можно повышать порядок аппроксимации дифференциальной задачи. Он легко распараллеливается и применим к решению различного типа уравнений [32]. Метод КНК позволяет реализовать варианты метода с применением подпространств Крылова [33, 34], многосеточных комплексов [33, 35] и др.

Идея сочетания МНК с FEM развивается независимо за рубежом другими исследователями. В методе LSFEM (Least Squares Finite Element Method) [36–38], как и в методе КНК, отмечается, что применяемая в них минимизация функционала невязки уравнений приближенной задачи положительно сказывается на свойствах численных решений задач, получаемых двумя указанными комбинированными методами. Однако в FEM возникает ряд проблем, связанных с построением неструктурированных сеток. Например, из-за произвольности области при ее триангуляции не всегда удается избежать появления сильно вытянутых ячеек, что является одной из причин плохой обусловленности СЛАУ приближенной задачи. В работах [20, 21] показано, что появление сильно вытянутых ячеек и/или значительно меньших по сравнению с соседними ячейками в случае плохо обусловленных дифференциальных задач и СЛАУ, аппроксимирующих их приближенных задач и наследующих их плохую обусловленность, дополнительно существенно ухудшает обусловленность СЛАУ и препятствует достижению высокой точности численного решения. Кроме того, нерегулярность сетки внутри области существенно усложняет программную реализацию решения приближенной задачи, например, в сравнении со случаем, когда нужно запрограммировать и реализовать для каждой ячейки поиск соседних ячеек на регулярной сетке. Эта задача в первом случае приводит к увеличению размеров программы и времени решения задачи на ЭВМ. Например, в работах [6, 39] указано на недостаток использования представления структурных данных о пространственной дискретизации в виде квадродеревьев и октодеревьев.

В настоящей статье впервые предложен и реализован новый вариант метода КНК для решения бигармонического уравнения в нерегулярных областях, граница которых задана аналитическими кривыми, в частности сплайнами. Внутри нерегулярных областей применяется регулярная сетка с прямоугольными ячейками, а около границы области “одинарный” слой, отсеченных границей частей от расположенных на ней прямоугольных ячеек. Все н-ячейки разбиваются на два класса: самостоятельные, в которых находится центр прямоугольной ячейки, частью которой они являются, и несамостоятельные, центр соответствующей прямоугольной ячейки которых расположен вне области. Несамостоятельные н-ячейки, отсеченные границей области от прямоугольных ячеек начальной регулярной сетки, присоединялись к соседним самостоятельным ячейкам [17, 19–24]. Этот прием позволяет существенно уменьшить обусловленность

СЛАУ приближенной задачи [20–22] и, как следствие, в сходящемся итерационном процессе сократить число итераций, необходимых для достижения заданной точности решения по сравнению со случаем, когда несамостоятельные н-ячейки наряду с другими ячейками использовались как самостоятельные для построения приближенного решения задачи. В целях достижения аппроксимации повышенной точности дифференциальной задачи применялись “законтурные” [17, 19–24], не принадлежащие области решения дифференциальной задачи части граничных прямоугольных ячеек, отсеченных границей области. Чтобы такой подход с использованием “законтурных” частей граничных ячеек был применим, как и в случае других численных методов [40, 41], предполагается, что решаемое уравнение справедливо не только в расчетной области, но и в малой окрестности ее границы.

В данной работе сначала возможности предложенного подхода были проверены на решении задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения в нерегулярных областях. Было проведено сравнение результатов численных экспериментов с другими доступными высокоточными результатами [5–7, 9]. При этом в цитируемых работах решение исходного бигармонического уравнения сводилось к решению двух уравнений Пуассона. Предложенный здесь вариант метода КНК позволяет решить эту задачу с повышенной точностью без перехода к системе дифференциальных уравнений более низкого порядка. Затем метод КНК применялся для расчета НДС изотропных тонких пластин различных форм, находящихся под различными нагрузками. Ранее в серии работ, продолжением которой является данная работа, были предложены и реализованы различные подходы построения вариантов метода КНК для расчета НДС изотропных пластин с криволинейной границей [19], выпуклых четырехугольных пластин [20, 21], треугольных пластин [17] и прямоугольных пластин из изотропных и анизотропных композиционных материалов [30, 31]. Моделирование НДС пластин различной формы и конструкций из них имеет важное прикладное значение в разных отраслях промышленности.

Показано, что предложенный здесь вариант метода КНК применим для достаточно широкого класса областей, граница которых может состоять из кусков линий различной формы, в том числе состыкованных с отрезками прямых. Излагаемый подход может быть использован при решении краевых задач для других уравнений.

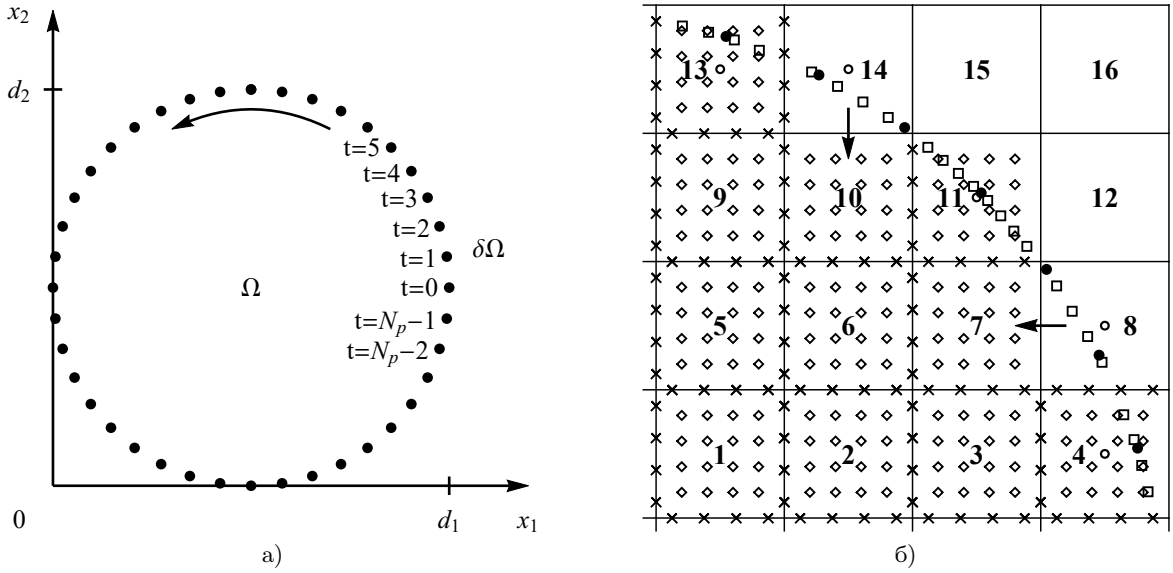

Рис. 1. Область решения задачи, где t — номера точек, которые возрастают в направлении против хода часовой стрелки (а). Значок • обозначает точки, расположенные на границе области (а) и (б), ◇ — точки записи уравнений коллокации; × — точки записи условий согласования; □ — точки записи краевых условий; ○ — центры н-ячеек (б). Несамостоятельные н-ячейки 8 и 14 присоединяется к самостоятельным ячейкам 7, 10 соответственно (б)

2. Метод КНК для решения неоднородного бигармонического уравнения.

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Дирихле [42] для неоднородного бигармонического уравнения

$$\triangle^2 u = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad u\big|_{\delta\Omega} = g_1(x_1, x_2), \quad u_n\big|_{\delta\Omega} = g_2(x_1, x_2), \tag{1}$$

в замкнутой нерегулярной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Пусть граница $\delta\Omega$ задана кусками гладких кривых, которые, в частности, могут быть сплайнами. На практике (например в геофизике) могут иметь место за-

дачи, граница которых полностью или частично задана дискретным набором точек. В данной работе предлагается в этом случае восполнить границу области сплайнами по входным дискретным данным (рис. 1а). Здесь $u(x_1, x_2)$ — искомая функция, $f(x_1, x_2)$, $g_1(x_1, x_2)$ и $g_2(x_1, x_2)$ — заданные функции, $\triangle^2 = \dfrac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\dfrac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial x_2^4}$, $u_n = \dfrac{\partial u}{\partial n}$, $\overrightarrow{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе $\delta\Omega$. В классической литературе уравнение $\triangle^2 u = 0$ называется бигармоническим, а его решения, имеющие производные до четвертого порядка включительно, называются бигармоническими функциями [43]. Реализация рассматриваемого метода решения других краевых задач для неоднородного бигармонического уравнения осуществляется аналогично алгоритму, описанному далее.

2.2. Построение расчетной сетки. Пусть расстояние между заданными точками на границе имеет порядок малой величины h_s. Если из этих данных или других каких-то соображений известно, что некоторые точки являются точками излома границы (например, кривая на рис. 2б — граница круга с “вырезом” имеет три точки излома), то разобьем ее на несколько участков так, чтобы концами этих участков были точки излома. Предположим, что между точками излома граница области имеет достаточную гладкость. Затем на каждом таком участке построим двойные сплайны $\big(X_{1_i}(t), X_{2_i}(t)\big)$. Здесь индекс i — номер участка в случае разбиения границы. Компоненты двойного сплайна $\big(X_{1_i}(t), X_{2_i}(t)\big)$ — два кубических сплайна, являющиеся функциями параметра t, монотонно меняющегося при монотонном движении точки вдоль замкнутой границы. Пронумеруем все точки в возрастающей последовательности $0, \ldots, N_p - 1$ (рис. 1а), где N_p — количество заданных точек. Во многих случаях в качестве параметра t для наших целей удобно взять номер точки. Если известно, что входные данные соответствуют достаточно гладкой границе на всем ее протяжении, то далее для аппроксимации границы может быть достаточно построения единого двойного сплайна с использованием всех заданных точек. В этом случае точки начала и конца сплайна совпадают. С целью получения “краевых условий” для построения сплайнов можно на концах каждого участка по координатам трех (или четырех) заданных точек построить интерполяционные полиномы Лагранжа (или Ньютона) для каждой компоненты двойного сплайна. Теперь для однозначного построения компонент двойных сплайнов достаточно положить, что их вторые производные на концах участков границы равны вторым производным от соответствующих интерполяционных полиномов. Известно, что в случае дискретных данных, соответствующих достаточно гладким кривым, построенные таким способом сплайны будут иметь четвертый порядок аппроксимации и сходимости при $h_s \to 0$ [44].

Впишем расчетную область Ω в прямоугольник, две стороны которого параллельны оси x_1, равны d_1 и проходят через принадлежащие $\delta\Omega$ точки с минимальной и максимальной координатами по оси x_2, а две другие стороны, параллельные оси x_2, равны d_2 и проходят через принадлежащие $\delta\Omega$ точки с минимальной и максимальной координатами по оси x_1. Полученную прямоугольную область размера $d_1 \times d_2$ покроем регулярной сеткой с прямоугольными ячейками Ω_j размера $2h_1 \times 2h_2$, $j = 1, \ldots, N$, где $N = N_1 \times N_2$ — количество ячеек. Прямоугольные ячейки сетки, которые полностью расположены внутри области назовем внутренними (рис. 1б, ячейки 1–3, 5–7, 9, 10). Прямоугольные ячейки, пересеченные границей области, для краткости здесь назовем граничными (рис. 1б, ячейки 4, 8, 11, 13, 14). Часть граничной ячейки, отсеченную границей и лежащую внутри области, назовем н-ячейкой. На рис. 1б номерами 8, 11, 14 обозначены треугольные н-ячейки и номерами 4, 13 — четырехугольные н-ячейки. Далее считаем, что на рис. 1б номера граничных ячеек совпадают с номерами их внутренних н-ячеек. Часть граничной ячейки, расположенную вне области, назовем законтурной. Прямоугольную ячейку сетки, от которой границей области отсечена н-ячейка, назовем коротко материнской. Назовем условно внешней стороной н-ячейки часть границы $\delta\Omega$ области Ω, которая оказалась внутри граничной ячейки. Стороны любых ячеек, расположенные внутри области, назовем внутренними сторонами ячеек. Решение в прямоугольных ячейках, которые целиком лежат вне области Ω, естественно, не строим (рис. 1б, ячейки 12, 15, 16).

2.3. Описание алгоритма метода КНК при решении PDE в нерегулярной области. Для удобства реализации метода в каждой ячейке области введем локальные координаты

$$y_1 = \frac{(x_1 - x_{1j})}{h_1}, \quad y_2 = \frac{(x_2 - x_{2j})}{h_2}, \tag{2}$$

где (x_{1j}, x_{2j}) — центр j-й прямоугольной ячейки, $h_1 = \dfrac{d_1}{2N_1}$, $h_2 = \dfrac{d_2}{2N_2}$, $v(y_1, y_2) = u\big(x_1(y_1), x_2(y_2)\big)$. Координаты центра ячейки в данном случае определяются как средние арифметические величины от соответствующих координат вершин ее углов. Задача (1) после замены (2) в локальных переменных примет

вид

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1^4}\frac{\partial^4 v}{\partial {y_1}^4}+\frac{2}{h_1^2h_2^2}\frac{\partial^4 v}{\partial {y_1}^2\partial {y_2}^2}+\frac{1}{h_2^4}\frac{\partial^4 v}{\partial {y_2}^4}=f\big(x_1(y_1),x_2(y_2)\big),\quad (y_1,y_2)\in\Omega_j\subset\Omega,\\
&v\big|_{\delta\Omega}=g_1\big(x_1(y_1),x_2(y_2)\big),\quad (y_1,y_2)\in\delta\Omega\cap\delta\Omega_j,\\
&\frac{n_1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial y_1}+\frac{n_2}{h_2}\frac{\partial v}{\partial y_2}\bigg|_{\delta\Omega}=g_2\big(x_1(y_1),x_2(y_2)\big),\quad (y_1,y_2)\in\delta\Omega\cap\delta\Omega_j,
\end{aligned}\tag{3}$$

где (n_1,n_2) — компоненты внешней единичной нормали $\overrightarrow{n}$ к границе $\delta\Omega$ в точке (x_1,x_2), $j=1,\ldots,N$.

В каждой j-й ячейке сетки приближенное решение v_{hj} задачи (3) ищем в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами базисных элементов пространства полиномов четвертой степени от двух переменных. Здесь в качестве базисных элементов $\phi_i(y_1,y_2)$ $(i=1,\ldots,15)$ взяты мономы:

$$\begin{aligned}
v_{hj}(y_1,y_2)=\sum_{i=1}^{15}b_{ij}\phi_i=b_{1j}+b_{2j}y_1+b_{3j}y_2+b_{4j}{y_1}^2+b_{5j}{y_2}^2+\\
+b_{6j}y_1y_2+b_{7j}{y_1}^2y_2+b_{8j}y_1{y_2}^2+b_{9j}{y_1}^2{y_2}^2+b_{10j}{y_1}^3+\\
+b_{11j}{y_2}^3+b_{12j}{y_1}^3y_2+b_{13j}y_1{y_2}^3+b_{14j}{y_1}^4+b_{15j}{y_2}^4.
\end{aligned}\tag{4}$$

Глобальное приближенное решение будет состоять из “локальных” аналитических “кусков”, связанных с центром соответствующей ячейки. Для определения неизвестных коэффициентов b_{ij} в (4) в каждой ячейке выписывается переопределенная “локальная” (частичная) СЛАУ. Она состоит из переопределенной системы уравнений, состоящей в каждой ячейке из уравнений коллокации, условий согласования на общих сторонах, принадлежащих двум соседним ячейкам, и краевых условий на $\delta\Omega$, если ячейка является граничной. Объединение всех частичных СЛАУ определяет глобальное решение. При реализации представленного в этой работе варианта метода КНК число точек записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий в каждой ячейке в сумме было равно 32.

Если в расчетной сетке имеется или появилась после измельчения шагов сетки маленькая и/или вытянутая н-ячейка (рис. 1б, ячейки 8, 14), то глобальная СЛАУ задачи, как правило, становится хуже обусловленной. Такие ячейки могут быть причиной понижения точности приближенного решения задачи на содержащей их сетке. Чтобы избежать эту неприятность здесь используется идея присоединения таких н-ячеек к соседним ячейкам. Назовем несамостоятельными н-ячейки, расположенные в таких граничных ячейках, в которых начало локальной системы координат находится вне расчетной области (рис. 1б, ячейки 8, 14). Все остальные ячейки, включая внутренние, по определению считаются самостоятельными. Предлагается несамостоятельную н-ячейку присоединять к той соседней самостоятельной ячейке, с которой она имеет наибольшей длины сторону среди ее сторон, общих с другими соседними самостоятельными ячейками. Если несамостоятельная н-ячейка имеет одинаковую длину с двумя общими сторонами соседних с ней ячеек, то ее присоединяем к ячейке с наименьшим индексом j. Через эту сторону в присоединенную н-ячейку(ки) продолжается решение из ячейки, к которой ее (их) присоединили. При этом, согласно сформулированному правилу, к ячейке могут быть присоединены несколько малых несамостоятельных н-ячеек. В этом случае внешняя сторона объединенной ячейки состоит из внешних сторон всех объединенных в ней ячеек. На этой внешней стороне расставляется столько точек для записи краевых условий, чтобы в сумме число точек записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий в объединенной ячейке было равно 32. Эти краевые условия включаются в переопределенную систему уравнений объединенной ячейки. Для простоты реализации варианта полагаем, что начало локальной системы координат в объединенной ячейке совпадает с началом координат в исходной ячейке, к которой присоединяли ячейку(ки). Объединенную ячейку также считаем граничной н-ячейкой.

В реализованном здесь варианте метода КНК несамостоятельные н-ячейки, имеющие в качестве соседних ячеек только несамостоятельные н-ячейки, не присоединяются к соседним несамостоятельным н-ячейкам и считаются условно самостоятельными. В них тоже по изложенному в данной работе алгоритму выписывается локальная СЛАУ из 32 уравнений и строится решение, согласованное с локальными решениями в соседних ячейках. Кроме того, при написании компьютерной программы устанавливалось следующее ограничение на присоединение ячеек. К самостоятельной ячейке, которая имеет N_q $(q=1,\ldots,4)$ прямолинейных сторон, максимум можно присоединить N_q-1 несамостоятельных н-ячеек. Случай, когда возникает необходимость присоединить к самостоятельной ячейке (имеющей N_q прямолинейных сторон) N_q несамостоятельных н-ячеек, маловероятен на практике. При возникновении такой исключительной ситуации компьютерная программа выдает соответствующее сообщение пользователю. В проделанных авторами различных экспериментах такой случай не возникал.

Определим по следующему алгоритму расстановку точек коллокации и записи условий согласования в любой ячейке или краевых условий для граничной ячейки. В каждой ячейке для точек коллокации возьмем следующие локальные координаты: $(\pm 1/5, \pm 1/5)$, $(\pm 1/5, \pm 3/5)$, $(\pm 3/5, \pm 1/5)$, $(\pm 3/5, \pm 3/5)$ (рис. 1б).

Если у ячейки есть соседняя ячейка, то их общую сторону (в случае граничных ячеек — общую сторону материнской ячейки) поделим на четыре равных отрезка. В середине каждого отрезка запишем условия согласования (рис. 1б). Очевидно, что в некоторых граничных н-ячейках точки для записи уравнений коллокации или условий согласования могут быть вне области Ω (рис. 1б, ячейки 4, 11 и 13).

Пусть на внешней криволинейной стороне н-ячейки требуется расположить s точек $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ для записи краевых условий. Зная вершины прямоугольной материнской ячейки в прямоугольной системе координат (x_1, x_2), находим соответствующие значения начала и конца внешней стороны ячейки t^*, t^{**} $(t^{**} > t^*)$ пересечением сторон прямоугольной материнской ячейки (а в случае объединения н-ячеек пересечением продолжения сторон материнской прямоугольной ячейки, содержащейся в ней) с соответствующим участком сплайна. На стороне прямоугольной ячейки либо $x_1 = \mathrm{const}$, либо $x_2 = \mathrm{const}$. Вычисление координат точки пересечения такой прямой с соответствующим участком кубического сплайна сводится к поиску значения одного действительного корня t уравнения третьей степени на отрезке $t^* \leqslant t \leqslant t^{**}$. Для ее решения в данном варианте построения расчетной сетки использовался метод бисекций (метод деления отрезка пополам). Затем каждой точке p_j ставим в соответствие число $a_j = t^* + \dfrac{(2j-1)(t^{**} - t^*)}{2s}$, где $j = 1, \ldots, s$. Для каждого числа a_j находим, какому куску двойного сплайна $\big(X_{1_i}(t), X_{2_i}(t)\big)$ соответствующая точка p_j принадлежит, где i — номер участка границы. Пусть она принадлежит k-му куску двойного сплайна: $k - 1 < a_j < k$, $(k = 0, \ldots, Np)$. Тогда точка p_j для записи краевых условий будет иметь следующие координаты в прямоугольной системе координат (x_1, x_2): $\big(X_{1_k}(a_j), X_{2_k}(a_j)\big)$. Такой способ расстановки точек для записи краевых условий в случае прямолинейной внешней стороны н-ячейки эквивалентен делению этой стороны на s равных отрезков для записи в серединах этих отрезков краевых условий, как это было описано выше. Если самостоятельная н-ячейка имеет три, две или одну соседнюю ячейку, тогда на внешней ее стороне расставляем четыре, восемь или двенадцать точек соответственно для записи краевых условий по правилу, описанному выше. На рис. 1б изображена расчетная область, покрытая регулярной сеткой с прямоугольными ячейками, в которых по описанному выше правилу расставлены точки записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий.

Уравнения коллокации, умноженные на $h_1^2 h_2^2$, в каждой j-й ячейке выписываются в 16 точках коллокации и имеют вид

$$\frac{k_c}{h_1^4}\,\frac{\partial^4 v_{hj}(y_{1c}, y_{2c})}{\partial y_1^4} + \frac{2k_c}{h_1^2 h_2^2}\,\frac{\partial^4 v_{hj}(y_{1c}, y_{2c})}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} + \frac{k_c}{h_2^4}\,\frac{\partial^4 v_{hj}(y_{1c}, y_{2c})}{\partial y_2^4} = k_c f\big(x_1(y_{1c}), x_2(y_{1c})\big), \tag{5}$$

где (y_{1c}, y_{2c}) — точки коллокации, $c = 1, \ldots, 16$, k_c — положительный весовой параметр уравнения коллокации.

В качестве условия согласования решения в четырех указанных выше точках согласования на каждой общей стороне между соседними ячейками требуем непрерывность линейной комбинации с весами значений искомого решения и его производных:

$$k_{m_0} v_{hj}^+ + \frac{k_{m_1}}{h_{n_j}}\,\frac{\partial v_{hj}^+}{\partial n_j} = k_{m_0} v_{hj}^- + \frac{k_{m_1}}{h_{n_j}}\,\frac{\partial v_{hj}^-}{\partial n_j}\,, \tag{6}$$

$$k_{m_2}\,\frac{\partial^2 v_{hj}^+}{\partial {n_j}^2} + \frac{k_{m_3}}{h_{n_j}}\,\frac{\partial^3 v_{hj}^+}{\partial {n_j}^3} = k_{m_2}\,\frac{\partial^2 v_{hj}^-}{\partial {n_j}^2} + \frac{k_{m_3}}{h_{n_j}}\,\frac{\partial^3 v_{hj}^-}{\partial {n_j}^3}\,, \tag{7}$$

где n_j — внешняя нормаль к границе j-й ячейки; $h_{n_j} = h_1$, если направление n_j совпадает с направлением оси y_1, и $h_{n_j} = h_2$, если направление n_j совпадает с направлением оси y_2; v_{hj}^+ и v_{hj}^- — пределы функции при стремлении изнутри и извне к границе j-й ячейки, соответственно; $k_{m_0}, k_{m_1}, k_{m_2}, k_{m_3}$ — положительные весовые параметры условий согласования в переопределенной СЛАУ. Если внешняя сторона граничной j-й ячейки совпадает с некоторым куском границы области, то в указанных выше точках на ней выпишем краевые условия

$$k_{b_0} v_{hj} = k_{b_0} g_1(x_1, x_2), \tag{8}$$

$$k_{b_1}\left(\frac{n_1}{h_1}\,\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{n_2}{h_2}\,\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = k_{b_1} g_2(x_1, x_2), \tag{9}$$

где k_{b_0}, k_{b_1} — положительные весовые параметры краевых условий Дирихле.

В каждой ячейке, объединяя уравнения коллокации (5), условия согласования (6) и (7) и краевые условия (8) и (9) (в случае граничных ячеек), относительно неизвестных коэффициентов b_{rj} получим переопределенную локальную СЛАУ вида

$$\sum_{r=1}^{15} B_{lr} b_{ir} = F_l, \quad l = 1, \ldots, 48, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{10}$$

определяющую приближенно локальное решение в окрестности начала локальной системы координат в ячейке. Для того чтобы определить, что понимается под решением этой системы, рассмотрим функционал

$$\Phi = \sum_{l=1}^{48} \sum_{r=1}^{15} (B_{lr} b_{rj} - F_l)^2. \tag{11}$$

Он представляет собой сумму квадратов невязок всех уравнений в ячейке на приближенном решении задачи. Решение системы (10) на каждой итерации находится из условия минимума функционала Φ (11) по коэффициентам b_{rj}, $r = 1, \ldots, 15$. Система уравнений, полученная объединением уравнений во всех ячейках расчетной области (глобальная СЛАУ), решается итерационным процессом Гаусса–Зейделя. В ней одна “глобальная итерация” состоит из последовательного решения локальных СЛАУ (10) во всех ячейках области. При построении решения в каждой ячейке матрица системы приводится к верхнетреугольному виду ортогональным методом вращений Гивенса с выбором главного элемента в столбце.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{rj} \left| {b_{rj}}^{n+1} - {b_{rj}}^{n} \right| < \epsilon, \tag{12}$$

где b_{rj}^n — r-й ($r = 1, \ldots, 15$) коэффициент полинома, аппроксимирующего решение в ячейке с номером j на n-й итерации. В (12) величина ϵ — малая константа [16–33].

3. Численные эксперименты и результаты расчетов.

3.1. Задача Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения. В численных экспериментах на сходимость приближенного решения на последовательности сеток при измельчении шагов сетки вдвое рассматривалась задача (1) в нерегулярный областях. В качестве тестовых решений здесь брались аналитические функции, подстановкой которых в уравнения подбиралась их правая часть для того, чтобы эти функции удовлетворяли рассматриваемым дифференциальным уравнениям. Краевые условия брались из значений тестовых функций и их производных на $\delta\Omega$. Во всех представленных ниже таблицах в пунктах 3.1 и 3.2 приведены значения погрешности приближенного решения в равномерной норме

$$\| u - u_h \|_C = \max_{j=1,\ldots,N} \left(\max_{m=1,\ldots,L_j} \left| u(x_{1m}, x_{2m}) - u_{hj}(x_{1m}, x_{2m}) \right| \right), \tag{13}$$

где $N = N_1 \times N_2$ — количество расчетных ячеек в области; L_j — количество равномерно распределенных точек (x_{1m}, x_{2m}), взятых в j-й ячейке для подсчета в них погрешности; u — точное решение задачи (1); u_h — приближенное решение в области Ω; u_{hj} — приближенное решение в j-й ячейке. В данной работе взято $L_j = 100$. Порядок сходимости численного решения определяется следующим образом:

$$\nu_C = \log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}, \tag{14}$$

где E_{N_1, N_2} — значение ее абсолютной погрешности (13) на сетке размера $N = N_1 \times N_2$, $E_{N_1/2, N_2/2}$ — значение ее абсолютной погрешности на сетке $N_1/2 \times N_2/2$. На самом деле порядок сходимости численного решения вычислялся по формуле (14) формально, так как в случае нерегулярной сетки, строго говоря, определение порядка сходимости отсутствует. Тем не менее величина (14) показывает порядок малости погрешности решения относительно малой величины шага сетки.

Во всех численных экспериментах здесь в начальном приближении решения на самой грубой сетки взяты $b_{rj} = 0.4$, где $r = 1, \ldots, 15$, $j = 1, \ldots, N$. В расчетах использовано комбинированное применение операции продолжения на многосеточном комплексе в методе Федоренко [35] и на промежуточных сетках комплекса метода ускорения сходимости итерационного процесса, основанного на подпространствах Крылова [34]. Такой прием ускорения итерационного процесса [33] дал значительное сокращение времени решения задачи по сравнению со случаем без его применения.

Известно, что значения весовых параметров перед уравнениями в переопределенной СЛАУ существенно влияют на ее обусловленность, скорость сходимости итераций и величину погрешности приближенного решения [27]. В случае задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения в расчетах были взяты следующие параметры: $k_c = k_{m_0} = k_{m_2} = k_{b_0} = k_{b_1} = 1$, $k_{m_1} = 0.01$, $k_{m_3} = 0.015$.

Для достижения требуемой высокой точности приближенного решения необходимо задавать во входных данных задачи достаточное количество точек на границе расчетной области, т.е. достаточно точно аппроксимировать границу области. Необходимое количество точек должно быть таким, чтобы погрешность интерполяции границы сплайнами не превышала погрешность аппроксимации дифференциальной задачи методом КНК. Результаты численных экспериментов на последовательности сеток приведены в табл. 1 при $\epsilon = 10^{-10}$. Во всех ниже представленных таблицах запись $3.2(-4)$ условно обозначает 3.2×10^{-4}. В круглых скобках табл. 1 за аббревиатурой КНК указано количество точек, которое задавалось во входных данных для задания границ соответствующих областей. В данных примерах было установлено, что при значительном увеличении точек для описания границы области величины погрешностей приближенных решений практически не изменяются. В работе [6] задача решалась в полярных координатах. При этом в численных экспериментах фиксировался размер сетки в азимутальном направлении, а сетка в радиальном направлении подвергалась измельчению.

Таблица 1

Результаты численных экспериментов с различными тестовыми решениями

$u(x_1,x_2) = e^{x_1+x_2}$ в круге $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$							
	Работа [6]			КНК (80)		Работа [9]	
$N_1 \times N_2$	E_{N_1,N_2}	ν_C	$N_1 \times N_2$	E_{N_1,N_2}	ν_C	E_{N_1,N_2}	ν_C
64×32	$3.2(-4)$	—	8×8	$4.03(-5)$	—	$8.4(-6)$	—
64×64	$8.1(-5)$	1.98	16×16	$5.10(-6)$	2.98	$1.4(-6)$	2.6
64×128	$2.0(-5)$	1.99	32×32	$3.39(-7)$	3.91	$1.4(-8)$	6.6
64×256	$5.1(-6)$	1.99	64×64	$1.54(-8)$	4.46	—	—
$u(x_1,x_2) = x_1^3 \ln(1+x_2) + \dfrac{x_2}{1+x_1}$ в эллипсе $\dfrac{x_1^2}{0.5^2} + \dfrac{x_2^2}{0.15^2} \leqslant 1$							
	Работа [7]			КНК (60)		Работа [9]	
$N_1 \times N_2$	E_{N_1,N_2}	ν_C	$N_1 \times N_2$	E_{N_1,N_2}	ν_C	E_{N_1,N_2}	ν_C
64×32	$3.65(-4)$	—	8×4	$1.97(-5)$	—	—	—
128×64	$9.54(-5)$	1.9	16×8	$1.56(-6)$	3.65	$3.0(-6)$	—
256×128	$2.08(-5)$	2.2	32×16	$1.52(-7)$	3.35	$1.1(-7)$	4.8
512×256	$4.98(-6)$	2.1	64×32	$1.24(-8)$	3.61	$1.5(-9)$	6.2

Из табл. 1 следует, что результаты настоящей работы уступают по точности решения только результатам работы [9] всего лишь на один десятичный порядок. Конечно-разностная схема, предложенная в работе [9], имеет порядок сходимости погрешности численного решения выше, чем предложенный здесь вариант метода КНК. Кроме того, необходимо учитывать, что в нашей работе граница области для демонстрации возможностей предложенного здесь подхода задана двойными параметрическими сплайнами, а не аналитически, как это было сделано в других работах. Более того, в работах, с которыми было проведено сравнение, исходное бигармоническое уравнение четвертого порядка сводилось к двум уравнениям Пуассона второго порядка. Авторы этих работ подчеркивают сложность решения бигармонического уравнения в виду производных четвертого порядка и необходимости перехода к системе уравнений Пуассона в целях возможности применения своих предложенных FDM для решения задачи Дирихле. Известно, что задача Дирихле для уравнения Пуассона является хорошо обусловленной задачей, с решением которой прекрасно справляются многие численные методы. В данной работе показаны численные результаты с повышенной точностью решения неоднородного бигармонического уравнение без его сведения к двум уравнениям Пуассона. Тем не менее, авторы данной работы не исключают, что применение метода КНК для решения двух уравнений Пуассона с соответствующими краевыми условиями существенно повысят точность расчетов.

3.2. Аппроксимация задачи в пространстве полиномов восьмой степени. Чтобы достичь более высоких точности решения и порядка его сходимости, необходимо повысить степень базисных полиномов используемого пространства. Не представляет собой существенной трудности повысить на два

порядка аппроксимацию рассматриваемой здесь задачи. В данной работе для демонстрации такой возможности покажем точности расчетов в случае канонической области.

Рассмотрим задачу Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения (1) в единичном квадрате $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ с тестовым решением $u(x_1, x_2) = x_1^3 \ln(1 + x_2) + \dfrac{x_2}{1 + x_1}$. Для решения этой задачи здесь используется пространство полиномов восьмой степени. В этом случае число уравнений превосходит число неизвестных примерно в три раза аналогично варианту метода КНК с применением пространства полиномов четвертой степени. Следует отметить, что повышение степени полиномов рассматриваемого пространства сужает область выбора оптимальных значений весовых параметров в уравнениях коллокации, условиях согласования и краевых условий. Прежде всего это связано с тем, что СЛАУ при повышении их размера становятся хуже обусловленными. Зависимость обусловленности СЛАУ от выбора весовых параметров становится существенней. В данном случае были получены хорошие численные результаты при следующих параметрах: $k_c = 1/168$, $k_{m_0} = 3.3$, $k_{m_1} = 0.09$, $k_{m_2} = 0.11$, $k_{m_3} = 0.033$, $k_{b_0} = 2.5$, $k_{b_1} = 1$. В табл. 2 представлены результаты численного эксперимента при $\epsilon = 10^{-14}$. Из этой таблицы видно, что порядок сходимости и точность приближенного решения, построенного с помощью метода КНК, существенно выше по сравнению с методами FDM, использованными в цитируемых здесь работах.

Таблица 2

Результаты численных экспериментов в единичном квадрате

	Работа [5]		Работа [9]			КНК	
$N_1 \times N_2$	E_{N_1,N_2}	ν_C	E_{N_1,N_2}	ν_C	$N_1 \times N_2$	E_{N_1,N_2}	ν_C
16×16	8.9(−8)	—	4.9(−7)	—	4×4	5.22(−8)	—
32×32	5.8(−9)	3.9	3.1(−8)	4.0	8×8	9.26(−10)	5.81
64×64	4.1(−10)	3.8	1.8(−9)	4.1	16×16	1.47(−11)	5.97

3.3. Расчет НДС изотропных пластин. В работах, с которыми здесь было проведено сравнение результатов решения задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения, по каким-то причинам не приводятся результаты численных экспериментов решения неоднородного бигармонического уравнения с другими краевыми условиями. Показательным является демонстрация возможностей метода при решении более сложных задач. Известно, что наличие в краевых условиях производных первого и высоких порядков ухудшает обусловленности исходной дифференциальной задачи и СЛАУ соответствующей приближенной задачи независимо от примененного при ее построении способа аппроксимации и, как следствие, сказывается на численном решении задачи. Далее покажем возможности метода при решении прикладной задачи в нерегулярных областях, которая сводится к решению неоднородного бигармонического уравнения с более сложными краевыми условиями с применением предложенного здесь подхода.

Пусть требуется определить НДС упругой изотропной пластины нерегулярной формы, закрепленной на краях и находящейся под действием поперечных нагрузок произвольного вида. При этом нагрузки такие, что материал деформированной пластины остается упругим. Пластина предполагается тонкой, что позволяет свести трехмерную задачу теории упругости к двумерной задаче теории тонких пластин. Следуя Тимошенко [45], разрешающую систему уравнений запишем в перемещениях, определив которые можно будет полностью восстановить НДС пластины. В этом случае величины прогибов пластины определяются из решения неоднородного бигармонического уравнения

$$\triangle^2 w = \frac{q(x_1, x_2)}{D}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \tag{15}$$

В уравнении (15) $w(x_1, x_2)$ — прогиб срединной поверхности пластины, $q(x_1, x_2)$ — поперечная нагрузка, $D = Eh^3/12\big(1 - \nu^2\big)$ — жесткость пластины при изгибе, h — толщина пластины, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропного материала пластины, нерегулярная область Ω — проекция срединной поверхности пластины на плоскость (x_1, x_2). Уравнение (15) называется уравнением Софи Жермен–Лагранжа [45]. На каждом куске границы (крае) пластины может быть задано одно из следующих условий закрепления:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ — защемленный край,} \tag{16}$$

$$w = 0, \quad M_n w = 0 \text{ — шарнирно закрепленный край,} \tag{17}$$

$$M_n w = 0, \quad V_n w = 0 \text{ — свободный край,} \tag{18}$$

где $\overrightarrow{n}$ — внешняя нормаль к границе области $\partial\Omega$, M_n — дифференциальный оператор второго порядка, V_n — дифференциальный оператор третьего порядка. Здесь дифференциальные операторы M_n, V_n взяты из [45].

3.3.1. Прямоугольная пластина под специальной нагрузкой. Рассмотрим шарнирно закрепленную на краях прямоугольную пластину размера $d_1 \times d_2$, находящуюся под действием поперечной нагрузки $q = 10^5 \sin(\pi x_1/d_1)\sin(\pi x_2/d_2)$, размерность которой берется в Па. В этом случае задача имеет точное аналитическое решение [45]

$$w(x_1, x_2) = \frac{q d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D\left(d_1^2 + d_2^2\right)^2}\,. \tag{19}$$

В расчетах использовались следующие параметры: $d_1 = 10$ м, $d_2 = 10$ м, $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$. Относительная погрешность численного решения в любой точке в области вычислялась по формуле

$$E_{N_1,N_2} = \frac{\max\limits_{(x_1,x_2)\in\mathfrak{M}} \left|w(x_1,x_2) - w_h(x_1,x_2)\right|}{\max\limits_{(x_1,x_2)\in\mathfrak{M}} \left|w(x_1,x_2)\right|}\,. \tag{20}$$

В (20) $w_h(x_1, x_2)$ — приближенное решение, полученное методом КНК, $N = N_1 \times N_2$ — размер сетки, $\mathfrak{M}$ — множество всех заданных в области контрольных точек. Формальный порядок сходимости решения ν_r в данной работе вычислялся по формуле (14). В табл. 3 приведены результаты численного эксперимента в случае квадратной пластины, граница которой задана аналитически. В численных экспериментах в случае применения пространства полиномов четвертой степени были взяты следующие весовые параметры: $k_c = k_{m_0} = k_{m_2} = k_{b_0} = k_{b_2} = 1$, $k_{m_1} = 0.12$, $k_{m_3} = 0.125$, где k_{b_2} — весовой множитель перед вторым уравнением в (17). В случае применения пространства полиномов восьмой степени $k_c = 1/168$, $k_{m_0} = 3.3$, $k_{m_1} = 0.9$, $k_{m_2} = 0.11$, $k_{m_3} = 0.033$, $k_{b_0} = 2.5$, $k_{b_2} = 0.002$. Ранее эта задача была решена с использованием пространства полиномов четвертой степени при $k_{m_1} = 0.1$ и $k_{m_3} = 0.12$ в работе [30], в которой несколько иным способом были расставлены точки согласования и точки записи краевых условий.

Таблица 3

Результаты численных экспериментов в квадратной области $\Omega = [0, 10] \times [0, 10]$. Здесь deg обозначает степень полиномов рассматриваемого пространства, CPU time — время расчета в секундах на одном процессоре персонального компьютера с тактовой частотой 2.80 ГГц

	Работа [30], deg = 4			Наша работа, deg = 4					Наша работа, deg = 8		
$N_1 \times N_2$	E_{N_1,N_2}	ν_r	N_{iter}	E_{N_1,N_2}	ν_r	N_{iter}	CPU time	$N_1 \times N_2$	E_{N_1,N_2}	ν_C	N_{iter}
10×10	1.82(−2)	—	129	1.48(−3)	—	161	3.54	5×5	5.59(−7)	—	306
20×20	2.83(−3)	2.68	282	1.41(−4)	3.39	259	19.29	10×10	9.83(−9)	5.83	513
40×40	4.56(−4)	2.63	593	1.24(−5)	3.50	355	106.36	20×20	2.65(−11)	8.53	1138

Таблица 4

Результаты численных экспериментов в нерегулярных областях

	Рис. 1а		Рис. 2а		Рис. 2б		Рис. 2в	
$N_1 \times N_2$	E_{N_1,N_2}	ν_r	E_{N_1,N_2}	ν_r	E_{N_1,N_2}	ν_r	E_{N_1,N_2}	ν_r
10×10	1.08(−2)	—	6.48(−3)	—	2.34(−3)	—	2.57(−2)	—
20×20	9.23(−4)	3.54	9.71(−4)	2.73	2.82(−4)	3.05	2.19(−4)	6.87
40×40	1.97(−5)	5.55	7.75(−5)	3.64	2.32(−5)	3.60	1.51(−5)	3.85

3.3.2. Пластины нерегулярных форм под специальной нагрузкой. Пусть проекции срединных поверхностей пластин на плоскость (x_1, x_2) имеют формы нерегулярных областей Ω, изображенных на рис. 1а и 2а–2в. В подписях к рис. 2а–2в в скобках указано количество двойных сплайнов, которые строились для описания границ соответствующих областей. Для того чтобы воспользоваться приведенным выше аналитическим решением (19) в качестве теста, в численных экспериментах зададим на границе $\delta\Omega$ точные значения функции w (19) и изгибающего момента $M_n w$. В расчетах применялся вариант метода КНК с использованием пространства полиномов четвертой степени. В табл. 4 приведены результаты численных экспериментов.

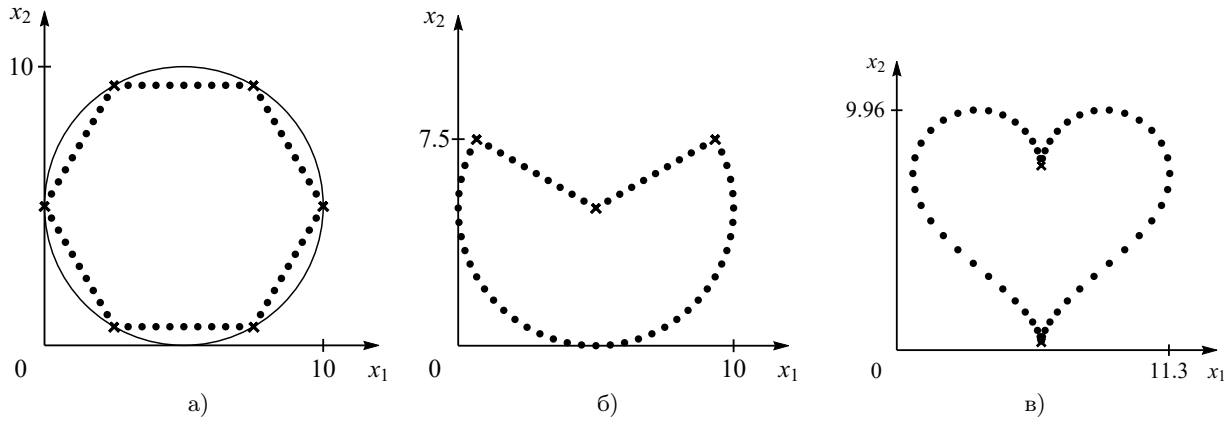

Рис. 2. Расчетные области, границы которых заданы двойными параметрическими сплайнами: граница шестиугольника описана шестью сплайнами (а), граница круга с “вырезом” — тремя сплайнами (б), “сердце” — двумя сплайнами (в)

3.3.3. Шестиугольная пластина с разными условиями закрепления. Рассмотрим задачу, точное решение которой не известно. Пусть изотропная шестиугольная пластина (рис. 2а) находится под действием равномерной поперечной нагрузки $q = \mathrm{const}$. Для описания напряженного состояния пластины используем функцию распределения интенсивности напряжений

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6{\sigma_{xy}}^2}\,, \tag{21}$$

где $\sigma_x = -\overline{E}(w_{xx} + \nu w_{yy})$, $\sigma_y = -\overline{E}(w_{yy} + \nu w_{xx})$, $\sigma_{xy} = -\overline{E}(w_{xy})$, $\overline{E} = E/\big(1-\nu^2\big)$. Отметим, что одним из важных преимуществ метода КНК является то, что без особого труда можно вычислить любые производные полученного численного решения, так как это решения является кусочно-полиномиальным.

В первом случае все края пластины защемлены (16). Во втором случае рассмотрим плохо обусловленную задачу с четырьмя защемленными (16) и двумя свободными краями (18). В обоих случаях использовались следующие параметры задачи: $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $q = 250$ КПа, $\epsilon = 10^{-10}$. На рис. 3 показана форма прогиба w (а) и интенсивность напряжений I (21) (б) для второго случая. Для наглядности на рис. 3а по вертикальной оси взят увеличенный масштаб.

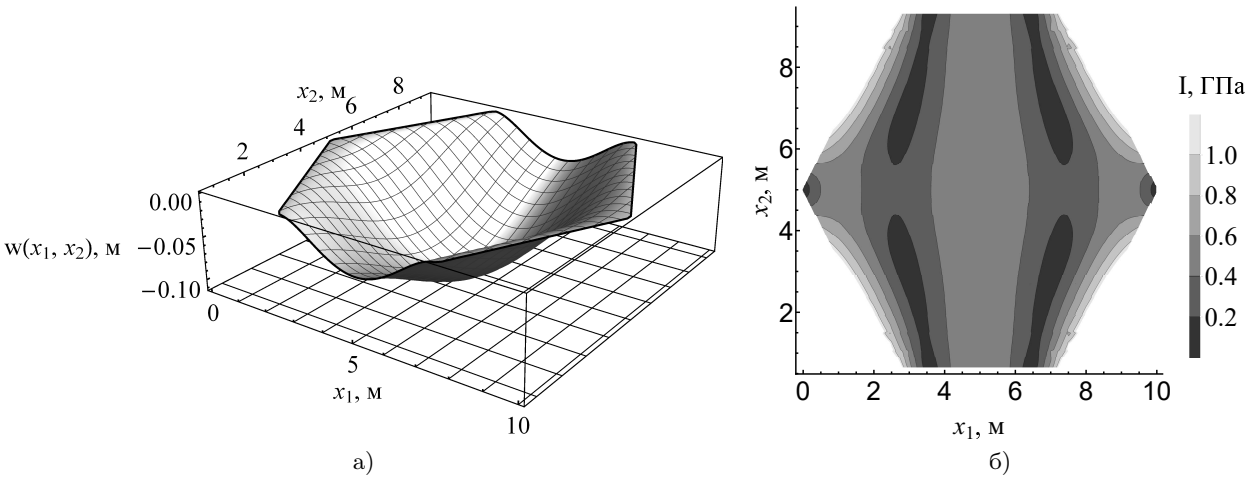

Рис. 3. Величина прогиба w (а) деформированной пластины (четыре края защемлены, другие два края свободны) и интенсивность напряжений I (б)

Для оценки порядка сходимости численного решения в равномерной норме на последовательности сеток вычислялась величина

$$\widetilde{E} = \| w_{N_1,N_2} - w_{N_1/2,N_2/2} \|_C = \max_{i=1,\ldots,Q} \big| w_{N_1,N_2}(x_{1i}, x_{2i}) - w_{N_1/2,N_2/2}(x_{1i}, x_{2i}) \big|. \tag{22}$$

В (22) Q — количество равномерно распределенных точек (x_{1i}, x_{2i}), взятых для простоты подсчета в прямоугольнике, включающем рассматриваемую треугольную область (в точках, лежащих вне исходной

треугольной области, погрешность полагалась равной нулю); w_{N_1,N_2} — численное решение, полученное на сетке $N_1 \times N_2$, $w_{N_1/2,N_2/2}$ — численное решение на сетке $N_1/2 \times N_2/2$. В данном примере $Q = 90\,000$ (табл. 5). Порядок сходимости решения формально определялся по формуле

$$\nu_C = \log_2 \frac{\| w_{N_1,N_2} - w_{N_1/2,N_2/2} \|_C}{\| w_{N_1/2,N_2/2} - w_{N_1/4,N_2/4} \|_C},$$

где $w_{N_1/4,N_2/4}$ — численное решение на сетке $N_1/4 \times N_2/4$.

Таблица 5

	Случай 1		Случай 2	
$\| w_{N_1,N_2} - w_{N_1/2,N_2/2} \|_C$	$\widetilde{E}$	ν_C	$\widetilde{E}$	ν_C
$\| w_{10,10} - w_{5,5} \|_C$	1.32(−2)	—	4.28(−2)	—
$\| w_{20,20} - w_{10,10} \|_C$	1.90(−3)	2.79	4.44(−3)	3.26
$\| w_{40,40} - w_{20,20} \|_C$	4.93(−4)	1.94	1.21(−3)	1.08
$\| w_{80,80} - w_{40,40} \|_C$	6.46(−5)	2.93	6.07(−4)	1.00

4. Заключение. Предложен и реализован новый вариант метода КНК с повышенной точностью для численного решения неоднородного бигармонического уравнения в областях, граница которых задана дискретно. Метод верифицирован прежде всего на решении тестовых задач путем вычисления погрешности и порядка сходимости решения. Кроме того, показан повышенный порядок сходимости численного решения, когда точное решение задачи не известно. Показано, что предложенный вариант метода КНК во многих случаях не уступает по точности высокоточным известным результатам других авторов, полученных методами FDM, а в некоторых случаях превосходит их.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ehrlich L.W., Gupta M.M.* Some difference schemes for the biharmonic equation // SIAM J. Numer. Anal. 1975. **12**, N 5. 773–790.
2. *Mayo A.* The fast solution of Poisson's and the biharmonic equations on irregular regions // SIAM J. Numer. Anal. 1984. **21**, N 2. 285–299.
3. *Stephenson J.W.* Single cell discretizations of order two and four for biharmonic problems // Comput. Phys. 1984. **55**, N 1. 65–80.
4. *Shen J.* Efficient spectral-Galerkin method II. Direct solvers of second- and fourth-order equations by using Chebyshev polynomials // SIAM J. Sci. Comput. 1995. **16**, N 1. 74–87.
5. *Altas I., Dym J., Gupta M.M., Manohar R.P.* Multigrid solution of automatically generated high-order discretizations for the biharmonic equation // SIAM J. Sci. Comput. 1998. **19**, N 5. 1575–1585.
6. *Lai M.-C., Liu H.-C.* Fast direct solver for the biharmonic equation on a disk and its application to incompressible flows // Applied Mathematics and Computation. 2005. **164**, N 3. 679–695.
7. *Chen G., Li Z., Lin P.* A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow // Advances in Computational Mathematics. 2008. **29**, N 2. 113–133.
8. *Ben-Artzi M., Croisille J.-P., Fishelov D.* A fast direct solver for the biharmonic problem in a rectangular grid // SIAM J. Sci. Comput. 2008. **31**, N 1. 303–333.
9. *Ben-Artzi M., Chorev I., Croisille J.-P., Fishelov D.* A compact difference scheme for the biharmonic equation in planar irregular domains // SIAM J. Numer. Anal. 2009. **47**, N 4. 3087–3108.
10. *Brenner S.C.* An optimal-order nonconforming multigrid method for the biharmonic equation // SIAM J. Numer. Anal. 1989. **26**, N 5. 1124–1138.
11. *Mayo A., Greenbaum A.* Fast parallel iterative solution of Poisson's and the biharmonic equations on irregular regions // SIAM J. Sci. Comput. 1992. **13**, N 1. 101—118.
12. *Hanisch M.R.* Multigrid preconditioning for the biharmonic Dirichlet problem // SIAM J. Numer. Anal. 1993. **30**, N 1. 184–214.
13. *Davini C., Pitacco I.* An unconstrained mixed method for the biharmonic problem // SIAM J. Numer. Anal. 2000. **38**, N 3. 820–836.
14. *Jiang Y., Wang B., Xu Y.* A fast Fourier–Galerkin method solving a boundary integral equation for the biharmonic equation // SIAM J. Numer. Anal. 2014. **52**, N 5. 2530–2554.
15. *Lai M.-C., Tseng J.-M.* A formally fourth-order accurate compact scheme for 3D Poisson equation in cylindrical coordinates // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. **201**, N 1. 175–181.
16. *Shapeev V.P., Vorozhtsov E.V.* Application of the method of collocations and least residuals to the solution of the Poisson equation in polar coordinates // Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology. 2015. **9**, N 2. 2553–2562.

17. *Шапеев В.П., Беляев В.А.* Решение краевых задач для уравнений с частными производными в треугольных областях методом коллокации и наименьших квадратов // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 96–111.
18. *Беляев В.В., Шапеев В.П.* Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // Вычисл. технологии. 2000. **5**, № 4. 13–21.
19. *Шапеев В.П., Беляев В.А.* Варианты метода коллокации и наименьших невязок повышенной точности в области с криволинейной границей // Вычислит. технологии. 2016. **21**, № 5. 95–110.
20. *Беляев В.А., Шапеев В.П.* Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в трапециевидных областях // Вычислит. технологии. 2017. **22**, № 4. 22–42.
21. *Беляев В.А., Шапеев В.П.* Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в выпуклых четырехугольных областях // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. **24**, № 5. 629–648.
22. *Belyaev V.A., Shapeev V.P.* Versions of the collocation and least squares method for solving biharmonic equations in non-canonical domains // AIP Conference Proceedings. 2017. **1893**. doi: 10.1063/1.5007560.
23. *Shapeev V., Belyaev V., Golushko S., Idimeshev S.* New possibilities and applications of the least squares collocation method // EPJ Web of Conferences. 2018. **173**. doi: 10.1051/epjconf/201817301012.
24. *Беляев В.А., Шапеев В.П.* Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом коллокации и наименьших квадратов в области с дискретно заданной границей // Вычислит. технологии. 2018. **23**, № 3. 15–30.
25. *Слепцов А.Г.* Коллокационно-сеточное решение эллиптических краевых задач // Моделирование в механике. 1991. **5**, № 2. 101–126.
26. *Семин Л.Г., Слепцов А.Г., Шапеев В.П.* Метод коллокаций–наименьших квадратов для уравнений Стокса // Вычислит. технологии. 1996. **1**, № 2. 90–98.
27. *Исаев В.И., Шапеев В.П., Еремин С.А.* Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса // Вычислит. технологии. 2007. **12**, № 3. 53–70.
28. *Исаев В.И., Шапеев В.П.* Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. **14**, № 1. 41–60.
29. *Исаев В.И., Шапеев В.П.* Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. **50**, № 10. 1758–1770.
30. *Голушко С.К., Идимешев С.В., Шапеев В.П.* Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислит. технологии. 2013. **18**, № 6. 31–43.
31. *Голушко С.К., Идимешев С.В., Шапеев В.П.* Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к задачам механики анизотропных слоистых пластин // Вычислит. технологии. 2014. **19**, № 5. 24–36.
32. *Vorozhtsov E.V., Shapeev V.P.* CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of the Bürgers and Korteweg-de Vries–Bürgers equations // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8660. Cham: Springer, 2014. 432–446.
33. *Ворожцов Е.В., Шапеев В.П.* О комбинировании способов ускорения сходимости итерационных процессов при численном решении уравнений Навье–Стокса // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 80–102.
34. *Saad Y.* Numerical methods for large eigenvalue problems. Manchester: Manchester University Press, 1991.
35. *Федоренко Р.П.* О скорости сходимости одного итерационного процесса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. **4**, № 3. 559–564.
36. *Jiang B.-N., Povinelli L.A.* Least-squares finite element method for fluid dynamics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1990. **81**, N 1. 13–37.
37. *Chang C.L., Jiang B.-N.* An error analysis of least-squares finite element method of velocity-pressure-vorticity formulation for stokes problem // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1990. **84**, N 3. 247–255.
38. *Bochev P.B., Gunzburger M.D.* Least-squares finite element methods. New York: Springer, 2009.
39. *Chen H., Min C., Gibou F.* A supra-convergent finite difference scheme for the Poisson and heat equations on irregular domains and non-graded adaptive Cartesian grids // Journal of Scientific Computing. 2007, **31**, N 1–2. 19–60.
40. *Liu X.-D., Fedkiw R.P., Kang M.* A boundary condition capturing method for Poisson's equation on irregular domains // J. of Computational Physics. 2000. **160**, N 1. 151–178.
41. *Gibou F., Fedkiw R.* A fourth order accurate discretization for the Laplace and heat equations on arbitrary domains, with applications to the Stefan problem // J. of Computational Physics. 2005. **202**, N 2. 577–601.
42. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
43. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
44. *Барахнин В.Б., Шапеев В.П.* Введение в численный анализ. М.: Лань, 2005.
45. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
26.06.2018

Solving the Biharmonic Equation with High Order Accuracy in Irregular Domains by the Least Squares Collocation Method

V. P. Shapeev [1] **and V. A. Belyaev** [2]

[1] *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Institutskaya ulitsa 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, Principal Scientist, e-mail: shapeev.vasily@mail.ru*

[2] *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Institutskaya ulitsa 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia; Senior Laboratory Assistant, e-mail: belyaevasily@mail.ru*

Received June 26, 2018

Abstract: This paper addresses a new version of the least squares collocation (LSC) method of high order accuracy proposed and implemented for the numerical solution of the nonhomogeneous biharmonic equation. The differential problem is projected onto a polynomial space of fourth and eighth degrees by the LSC method. The algorithm implemented is applied in irregular domains. The boundaries of these domains are given by analytical curves, in particular, by splines. The irregular domain is embedded in a rectangle covered by a regular grid with rectangular cells. In this paper we use the irregular cells (i-cells) which are cut off by the domain boundary from the rectangular cells of the initial regular grid. All i-cells are divided into two classes: the independent and dependent ones. The center of a dependent cell is located outside the domain by contrast with the center of an independent cell. The idea of attaching elongated dependent irregular cells to the neighboring ones is used. A separate piece of the analytical solution is constructed in the combined cells. The collocation and matching points located outside the domain are used to approximate the differential equations in the boundary cells. These two approaches allow us to essentially reduce the conditionality of the corresponding system of linear algebraic equations. It is shown that the approximate solutions obtained by the LSC method converge with an increased order and coincide with the analytical solutions of the test problems with high accuracy in the case of the known solution. The numerical results are compared with those found by other authors who used a high order finite difference method. The nonhomogeneous biharmonic equation is used to model the stress–strain state of isotropic thin irregular plates as an application.

Keywords: least squares collocation method, nonhomogeneous biharmonic equations, high order approximation, irregular domains, double splines.

References

1. L. W. Ehrlich and M. M. Gupta, “Some Difference Schemes for the Biharmonic Equation,” SIAM J. Numer. Anal. **12** (5), 773–790 (1975).

2. A. Mayo, “The Fast Solution of Poisson’s and the Biharmonic Equations on Irregular Regions,” SIAM J. Numer. Anal. **21** (2), 285–299 (1984).

3. J. W. Stephenson, “Single Cell Discretizations of Order Two and Four for Biharmonic Problems,” J. Comput. Phys. **55** (1), 65–80 (1984).

4. J. Shen, “Efficient Spectral-Galerkin Method II. Direct Solvers of Second- and Fourth-Order Equations by Using Chebyshev Polynomials,” SIAM J. Sci. Comput. **16** (1), 74–87 (1995).

5. I. Altas, J. Dym, M. M. Gupta, and R. P. Manohar, “Multigrid Solution of Automatically Generated High-Order Discretizations for the Biharmonic Equation,” SIAM J. Sci. Comput. **19** (5), 1575–1585 (1998).

6. M.-C. Lai and H.-C. Liu, “Fast Direct Solver for the Biharmonic Equation on a Disk and Its Application to Incompressible Flows,” Appl. Math. Comput. **164** (3), 679–695 (2005).

7. G. Chen, Z. Li, and P. Lin, “A Fast Finite Difference Method for Biharmonic Equations on Irregular Domains and Its Application to an Incompressible Stokes Flow,” Adv. Comput. Math. **29** (2), 113–133 (2008).

8. M. Ben-Artzi, J.-P. Croisille, and D. Fishelov, “A Fast Direct Solver for the Biharmonic Problem in a Rectangular Grid,” SIAM J. Sci. Comput. **31** (1), 303–333 (2008).

9. M. Ben-Artzi, I. Chorev, J.-P. Croisille, and D. Fishelov, “A Compact Difference Scheme for the Biharmonic Equation in Planar Irregular Domains,” SIAM J. Numer. Anal. **47** (4), 3087–3108 (2009).

10. S. C. Brenner, “An Optimal-Order Nonconforming Multigrid Method for the Biharmonic Equation,” SIAM J. Numer. Anal. **26** (5), 1124–1138 (1989).

11. A. Mayo and A. Greenbaum, "Fast Parallel Iterative Solution of Poisson's and the Biharmonic Equations on Irregular Regions," SIAM J. Sci. Stat. Comput. **13** (1), 101–118 (1992).

12. M. R. Hanisch, "Multigrid Preconditioning for the Biharmonic Dirichlet Problem," SIAM J. Numer. Anal. **30** (1), 184–214 (1993).

13. C. Davini and I. Pitacco, "An Unconstrained Mixed Method for the Biharmonic Problem," SIAM J. Numer. Anal. **38** (3), 820–836 (2000).

14. Y. Jiang, B. Wang, and Y. Xu, "A Fast Fourier–Galerkin Method Solving a Boundary Integral Equation for the Biharmonic Equation," SIAM J. Numer. Anal. **52** (5), 2530–2554 (2014).

15. M.-C. Lai and J.-M. Tseng, "A Formally Fourth-Order Accurate Compact Scheme for 3D Poisson Equation in Cylindrical Coordinates," J. Comput. Appl. Math. **201** (1), 175–181 (2007).

16. V. P. Shapeev and E. V. Vorozhtsov, "Application of the Method of Collocations and Least Residuals to the Solution of the Poisson Equation in Polar Coordinates," J. Multidiscip. Eng. Sci. Technol. **2** (9), 2553–2562 (2015).

17. V. P. Shapeev and V. A. Belyaev, "Solving Boundary Value Problems for Partial Differential Equations in Triangular Domains by the Least Squares Collocation Method," Vychisl. Metody Programm. **19**, 96–111 (2018).

18. V. A. Belyaev and V. P. Shapeev, "The Collocation and Least Squares Method on Adaptive Grids in a Domain with a Curvilinear Boundary," Vychisl. Tekhnol. **5** (4), 13–21 (2000).

19. V. P. Shapeev and V. A. Belyaev, "Versions of High Order Accuracy Collocation and Least Residuals Method in the Domain with a Curvilinear Boundary," Vychisl. Tekhnol. **21** (5), 95–110 (2016).

20. V. A. Belyaev and V. P. Shapeev, "The Versions of Collocation and Least Residuals Method for Solving Problems of Mathematical Physics in the Trapezoidal Domains," Vychisl. Tekhnol. **22** (4), 22–42 (2017).

21. V. A. Belyaev and V. P. Shapeev, "Versions of the Collocation and Least Residuals Method for Solving Problems of Mathematical Physics in the Convex Quadrangular Domains," Model. Anal. Inform. Sist. **24** (5), 629–648 (2017).

22. V. A. Belyaev and V. P. Shapeev, "Versions of the Collocation and Least Squares Method for Solving Biharmonic Equations in Non-Canonical Domains," AIP Conf. Proc. **1893** (2017). doi 10.1063/1.5007560

23. V. Shapeev, V. Belyaev, S. Golushko, and S. Idimeshev, "New Possibilities and Applications of the Least Squares Collocation Method," EPJ Web of Conf. **173** (2018). doi 10.1051/epjconf/201817301012

24. V. A. Belyaev and V. P. Shapeev, "Solving the Dirichlet Problem by the Least Squares Collocation Method in a Domain with a Discrete Boundary," Vychisl. Tekhnol. **23** (3), 15–30 (2018).

25. A. G. Sleptsov, "Collocation Grid Solution of Elliptic Boundary Value Problems," Modelir. Mekhan. **5** (2), 101–126 (1991).

26. L. G. Semin, A. G. Sleptsov, and V. P. Shapeev, "Method of Collocations–Least Squares for Stokes Equations," Vychisl. Tekhnol. **1** (2), 90–98 (1996).

27. V. I. Isaev, V. P. Shapeev, and S. A. Eremin, "An Investigation of the Collocation and the Least Squares Method for Solution of Boundary Value Problems for the Navier–Stokes and Poisson Equations," Vychisl. Tekhnol. **12** (3), 53–70 (2007).

28. V. I. Isaev and V. P. Shapeev, "Development of the Collocations and Least Squares Method," Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN **14** (1), 41–60 (2008) [Proc. Steklov Inst. Math. **261** (Suppl. 1), S87–S106 (2008)].

29. V. I. Isaev and V. P. Shapeev, "High-Accuracy Versions of the Collocations and Least Squares Method for the Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **50** (10), 1758–1770 (2010) [Comput. Math. Math. Phys. **50** (10), 1670–1681 (2010)].

30. S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, and V. P. Shapeev, "Application of Collocations and Least Residuals Method to Problems of the Isotropic Plates Theory," Vychisl. Tekhnol. **18** (6), 31–43 (2013).

31. S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, and V. P. Shapeev, "Development and Application of Collocations and Least Residuals Method to the Solution of Problems in Mechanics of Anisotropic Laminated Plates," Vychisl. Tekhnol. **19** (5), 24–36 (2014).

32. V. P. Shapeev and E. V. Vorozhtsov, "CAS Application to the Construction of the Collocations and Least Residuals Method for the Solution of the Bürgers and Korteweg-de Vries–Bürgers Equations," in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Cham, 2014), Vol. 8660, pp. 432–446.

33. E. V. Vorozhtsov and V. P. Shapeev, "On Combining the Techniques for Convergence Acceleration of Iteration Processes During the Numerical Solution of Navier–Stokes Equations," Vychisl. Metody Programm. **18**, 80–102 (2017).

34. Y. Saad, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems* (Manchester Univ. Press, Manchester, 1991).

35. R. P. Fedorenko, “The Speed of Convergence of One Iterative Process,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **4** (3), 559–564 (1964) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **4** (3), 227–235 (1964)].

36. B.-N. Jiang and L. A. Povinelli, “Least-Squares Finite Element Method for Fluid Dynamics,” Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **81** (1), 13–37 (1990).

37. C. L. Chang and B.-N. Jiang, “An Error Analysis of Least-Squares Finite Element Method of Velocity–Pressure–Vorticity Formulation for Stokes Problem,” Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **84** (3), 247–255 (1990).

38. P. B. Bochev and M. D. Gunzburger, *Least-Squares Finite Element Methods* (Springer, New York, 2009).

39. H. Chen, C. Min, and F. Gibou, “A Supra-Convergent Finite Difference Scheme for the Poisson and Heat Equations on Irregular Domains and Non-Graded Adaptive Cartesian Grids,” J. Sci. Comput. **31** (1–2), 19–60 (2007).

40. X.-D. Liu, R. P. Fedkiw, and M. Kang, “A Boundary Condition Capturing Method for Poisson’s Equation on Irregular Domains,” J. Comput. Phys. **160** (1), 151–178 (2000).

41. F. Gibou and R. Fedkiw, “A Fourth Order Accurate Discretization for the Laplace and Heat Equations on Arbitrary Domains, with Applications to the Stefan Problem,” J. Comput. Phys. **202** (2), 577–601 (2005).

42. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964; Mir, Moscow, 1968).

43. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1977, Dover, New York, 2011).

44. V. B. Barakhnin and V. P. Shapeev, *Introduction to Numerical Analysis* (Lan’, Moscow, 2005) [in Russian].

45. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells* (McGraw-Hill, New York, 1959; Fizmatgiz, Moscow, 1963).