

УДК 519.688

doi 10.26089/NumMet.v19r324

МЕТОД ЗАТУХАЮЩЕГО ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Е. А. Берендеев¹, А. А. Ефимова²

Рассматривается затухающее поглощение в качестве граничного условия для решения уравнений Максвелла методом FDTD (Finite Difference Time Domain). С помощью численных экспериментов показана эффективность использования простого поглощающего слоя для поглощения электромагнитного излучения точечного источника. Показана эффективность использования данного метода для учета мощности электромагнитного излучения при численном моделировании взаимодействия электронного пучка с плазмой методом частиц в ячейках.

Ключевые слова: генерация электромагнитного излучения, периодические граничные условия, граничные условия Мура, поглощающий слой, инжекция пучка в плазму, уравнение Власова, уравнения Максвелла, метод частиц-в-ячейках.

1. Введение. В настоящее время исследование различных механизмов генерации электромагнитного излучения в плазме имеет важное значение как в области управляемого термоядерного синтеза и радиометрической диагностики, так и для создания мощных источников терагерцового излучения. Одним из наиболее перспективных решений этой проблемы является генерация излучения в системе плазма–пучок, где частота излучения привязана к плазменной частоте и может легко перестраиваться с изменением плотности плазмы, а его мощность и эффективность может достигать больших значений за счет возможности поддержания в плазме сильных электрических полей.

Для полноценного исследования механизмов генерации электромагнитного излучения при взаимодействии электронного пучка с плазмой необходимо провести численное моделирование, наиболее полно отражающее условия лабораторных экспериментов. Наиболее подходящей для описания неустойчивых режимов пучково-плазменного взаимодействия является кинетическая модель на основе уравнений Власова–Максвелла. Для решения этих уравнений широкое распространение получил метод частиц в ячейках [1, 2]. Основной сложностью использования данного подхода является корректное описание граничных условий для частиц и электромагнитных полей — учет поглощения электромагнитного излучения и сохранение энергии системы при постоянной инжекции пучка [3, 4]. Для решения уравнений Максвелла обычно используется схема FDTD (Finite Difference Time Domain) [5], для которой существует много поглощающих граничных условий, наиболее известные из которых условие Мура [6], Ляо [7] и PML (Perfectly Matched Layer) [8, 9]. Граничные условия Мура и Ляо просты в реализации, однако не всегда могут обеспечить высокую степень поглощения. Граничные условия PML сложны в реализации, поэтому редко применяются для быстрого анализа результатов. Однако главным недостатком этих граничных условий является невозможность контролировать общий энергобаланс системы и рассчитать вклады отдельных компонент электромагнитных волн в потерю энергии через излучение.

В настоящей статье предлагается рассмотреть простой поглощающий слой (SAL: Simple Absorbing Layer) — искусственное затухание электромагнитных волн путем умножения значений электромагнитного поля на каждом шаге по времени на некоторый коэффициент $k < 1$, зависящий от расстояния до границы. Это позволяет не только эффективно выводить излучение из системы через поглощение, но и выделить вклад каждой компоненты электромагнитного поля. Рассмотрим эффективность применения простого поглощающего слоя (коэффициент отражения, точность расчета мощности излучения) на примере поглощения излучения точечного источника, а также на примере практической задачи о генерации электромагнитного излучения в разных режимах взаимодействия электронного пучка с плазмой. Для простоты и наглядности все задачи будем рассматривать в двумерной постановке.

¹ Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиМГ СО РАН), просп. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск; аспирант, e-mail: evgeny.berendeev@gmail.com

² Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиМГ СО РАН), просп. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск; мл. науч. сотр., e-mail: anna.an.efimova@gmail.com

2. Поглощение электромагнитного излучения точечного источника. Следуя работе Мура [6], рассмотрим точечный источник тока $J_z(t) = A \sin(2\pi ct/\lambda)$ и систему уравнений Максвелла в вакууме в двумерной области:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{j} = (0, 0, J_z(t)) = A \sin(2\pi ct/\lambda). \quad (5)$$

Здесь все функции зависят только от координат x, y . Шаг по времени выберем равным $dt = 0.05t_0$, $t_0 = 0.05$ сек., $hx = hy = 0.1L = 0.1$ с-сек., здесь c — скорость света. Далее время будет приводиться в величинах t_0 , а расстояние в с-сек. Рассмотрим квадратную область ($0 < x < 54, 0 < y < 54$), поместив источник тока в точку с координатами (16, 16). Источник тока имеет амплитуду $A = 1.5/4 \pi$ и выключается в момент времени $T = 100$. Для решения уравнений Максвелла воспользуемся схемой FDTD, обеспечивающей второй порядок по пространству и времени.

В качестве наиболее простого поглощающего слоя может быть выбрано линейное поглощение электромагнитной волны (linear SAL, или LSAL)

$$k = \begin{cases} \frac{x(1-a)}{l} + a, & x < l, \\ 1, & x \geq l, \end{cases} \quad (6)$$

где l — ширина поглощающего слоя, x — расстояние до границы области, $0 < a < 1$ — величина, характеризующая степень затухания волны внутри поглощающего слоя. Условие поглощения (6) выглядит достаточно просто, к тому же позволяет рассчитать, сколько энергии электромагнитного поля было поглощено, не прибегая к вычислению вектора Пойнтинга. Действительно, внутри поглощающего слоя $\mathbf{E}_{\text{new}}(x) = k(x)\mathbf{E}$, $\mathbf{B}_{\text{new}}(x) = k(x)\mathbf{B}$. Таким образом, величина

$$P_{\text{rad}} = \frac{h_x h_y}{2\tau} \sum_{i,l} (Ex_{i,l}^2(1-k_{i,l}) + Ey_{i,l}^2(1-k_{i,l}) + Ez_{i,l}^2(1-k_{i,l}) + Bx_{i,l}^2(1-k_{i,l}) + By_{i,l}^2(1-k_{i,l}) + Bz_{i,l}^2(1-k_{i,l})) \quad (7)$$

характеризует мощность излучения, т.е. энергию, ушедшую из системы за время τ , причем здесь достаточно легко выделить вклад отдельных компонент электрических и магнитных полей в суммарную мощность излучения. В качестве граничных условий будем рассматривать граничное условие Мура, граничное условие LSAL (6), а также более гладкое квадратичное поглощение QSAL

$$k = \begin{cases} \frac{a-1}{l^2} x^2 - 2\frac{a-1}{l} x + a, & x < l, \\ 1, & x \geq l. \end{cases} \quad (8)$$

Для оценки коэффициента отражения будем рассматривать энергию электромагнитных волн вокруг источника в тестовой области ($6 < x < 48, 6 < y < 48$). Для того чтобы разделить ошибки аппроксимации численной схемы и граничные эффекты, в качестве точных значений энергии будем рассматривать не аналитическое решение, как у Мура в работе [6], а численное решение уравнений с отодвинутыми на значительное расстояние (на 100 единиц) границами. На рис. 2 показана карта электромагнитных волн для трех различных типов граничных условий и $\lambda = 4$ в момент времени $T = 40$.

Из рис. 1 видно, что граничное условие Мура и поглощающий слой QSAL (8) имеют приблизительно сопоставимый уровень отражений, в то время как для поглощающего слоя LSAL (6) распространение численных эффектов от границы выше. В то же время из рис. 2 видно, что при данных параметрах поглощающего слоя электромагнитная волна затухает не доходя до границы. Перейдем к более точным оценкам коэффициента отражения. Для этого рассмотрим энергию электрического поля в тестовой области во временном промежутке $T = [34, 102]$, когда электромагнитные волны занимают всю тестовую область. На рис. 2 и 3 приведены энергии W электрического поля E_z в тестовой области и коэффициент

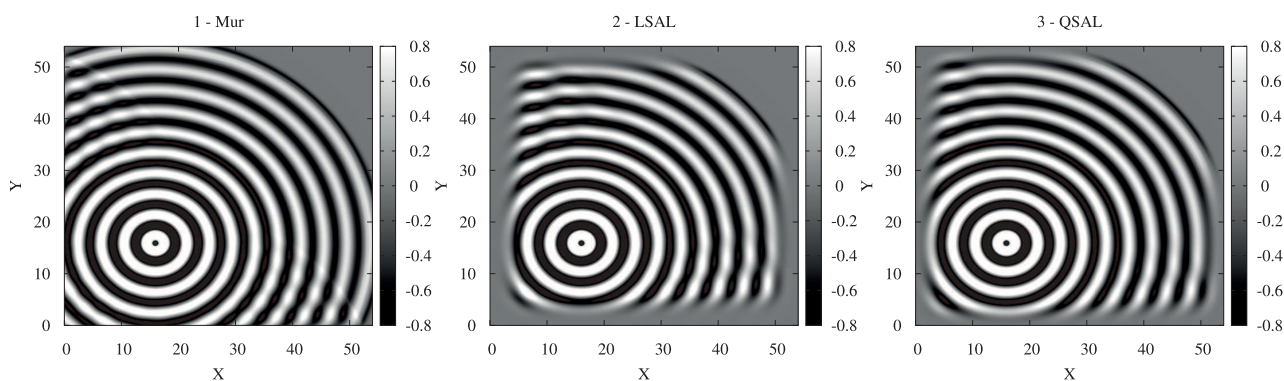


Рис. 1. Z-компонента электрического поля в момент времени 40: 1) граничные условия Мура; 2) LSAL $a = 0.9, l = 6$; 3) QSAL $a = 0.9, l = 6$

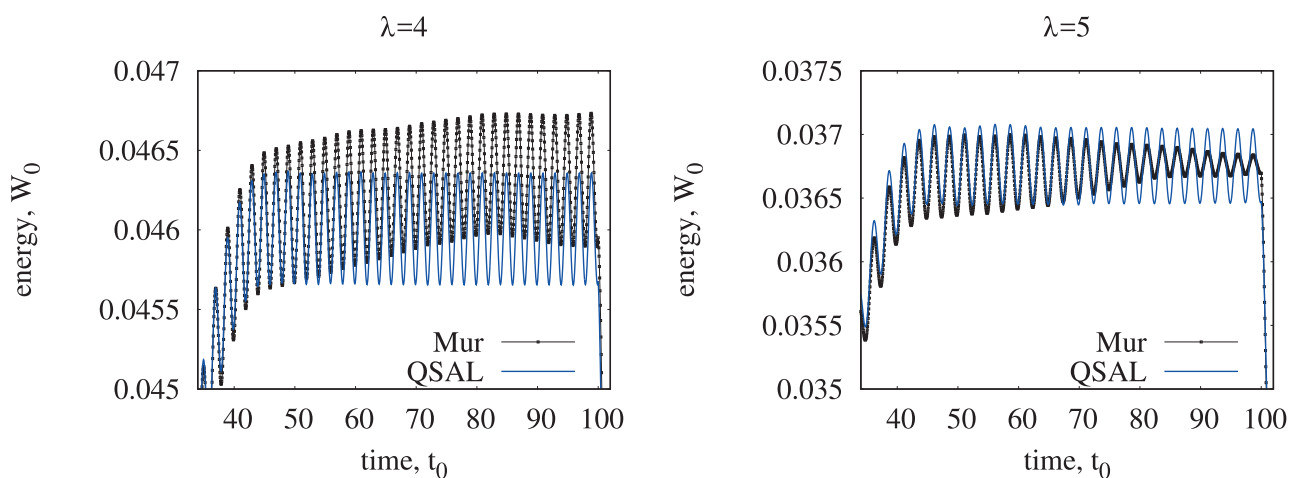


Рис. 2. Энергия электрического поля в тестовой области при различных λ для граничного условия Мура и слоя QSAL с $a = 0.9$

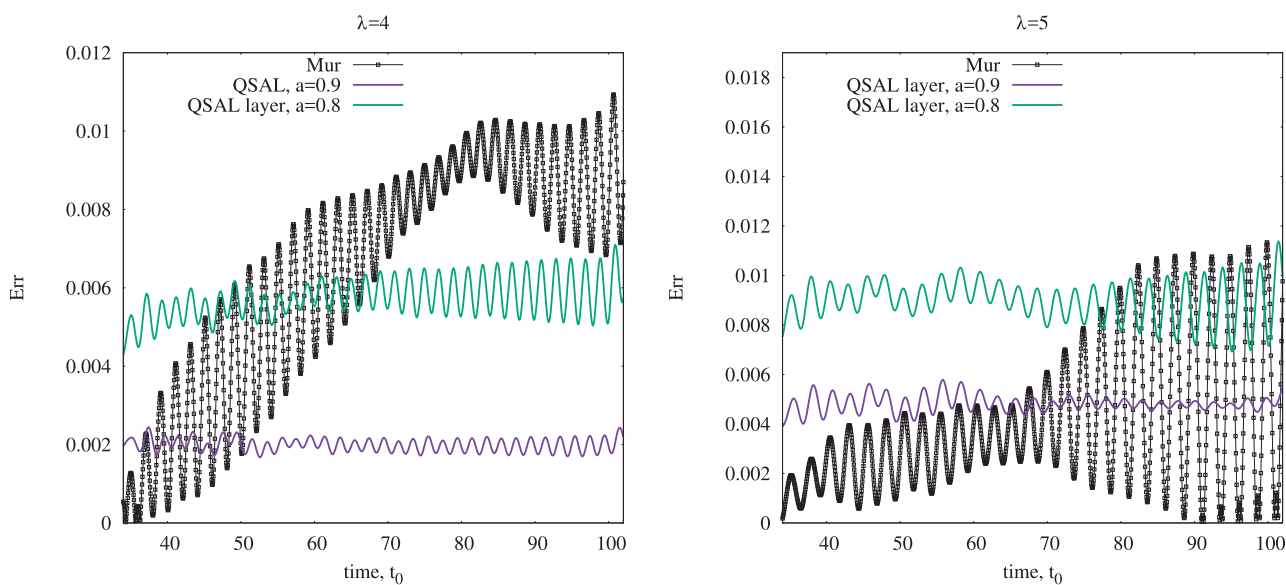


Рис. 3. Коэффициент отражения E_{rr} при различных λ для граничного условия Мура и слоя QSAL с $a = 0.8$ и $a = 0.9$

отражения, который определяется как ошибка $E_{rr} = \frac{|W - W_0|}{W}$, в сравнении с точным решением для рассматриваемых граничных условий при разных длинах волн. Здесь W — энергия электрического поля в тестовой области с заданными граничными условиями, W_0 — энергия в тестовой области, в которой граница отодвинута на 100 единиц длины. Размер поглощающего слоя $l = 6$.

Из рис. 3 видно, что поглощающий слой QSAL с коэффициентом затухания $a = 0.9$ обеспечивает наилучшее поглощение для рассматриваемых λ (коэффициент отражения $E_{rr} = 0.2\%$), при этом чем меньше λ (т.е. чем меньше длина электромагнитной волны) по сравнению с размером слоя, тем меньше коэффициент отражения. В частности, достаточно взять размер слоя $l = 1.5$, $\lambda = 6$. Заметим, что при достаточно больших коэффициентах затухания ($a > 0.9$) либо при малых размерах слоя $l < \lambda$ электромагнитная волна не затухает до самой границы, а это может привести к повышению коэффициента отражения и неправильной оценке мощности излучения.

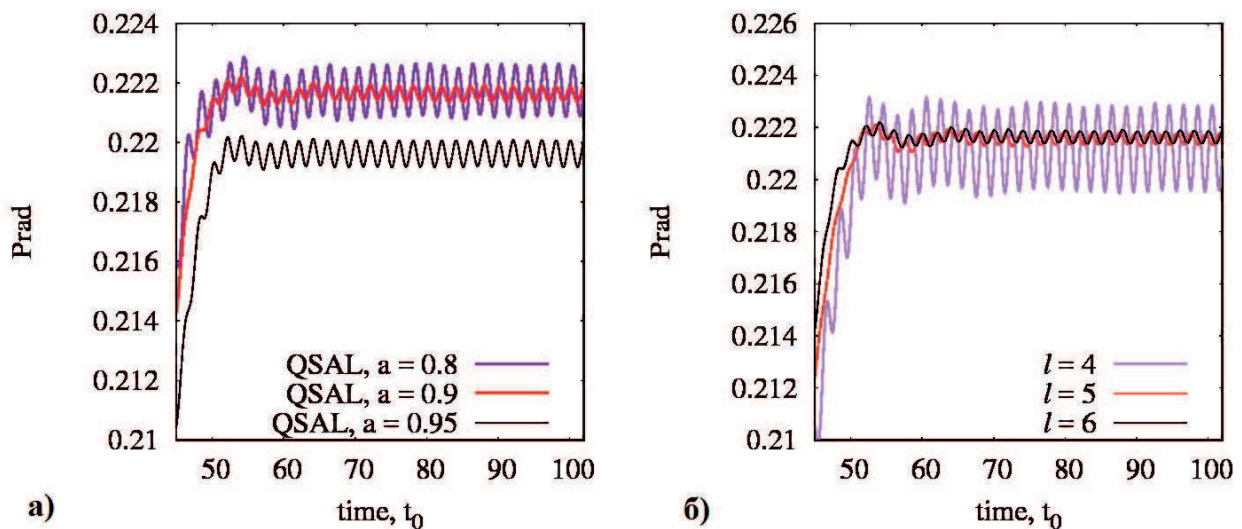


Рис. 4. Мощность излучения, полученная при а) фиксированном размере слоя $l = 6$ для различных коэффициентов затухания; б) фиксированном коэффициенте затухания QSAL $a = 0.9$ и различных размерах слоя l

На рис. 4 приведены значения мощности излучения P_{rad} (7), рассчитанные с помощью поглощающих слоев с различным коэффициентом затухания a и фиксированным размером слоя $l = 6$ (рис. 4а), и мощность излучения P_{rad} , рассчитанная с помощью поглощающих слоев с фиксированным коэффициентом затухания $a = 0.9$ и различным размером слоя l (рис. 4б).

Из рис. 4 видно, что параметры поглощающего слоя начинают существенно влиять на оценки мощности, если волна, дойдя до границы, не затухает полностью (рис. 4а, случай $a = 0.95$), а также если размер поглощающего слоя слишком мал (рис. 4б, $l = 4$). Таким образом, тестовые исследования показали, что QSAL с правильно подобранными параметрами позволяет обеспечить сопоставимый уровень поглощения электромагнитной волны с граничным условием Мура, одновременно позволяя рассчитать мощность излучения. Вместе с простотой реализации такой способ поглощения и расчета электромагнитного излучения представляется нам достаточно перспективным.

3. Поглощение электромагнитного излучения при взаимодействии электронного пучка с плазмой. Рассмотрим теперь применение SAL для решения реальной прикладной задачи — расчет мощности электромагнитного излучения, генерируемого в системе плазма–электронный пучок. В недавних экспериментах на ГОЛ-3 (Гофрированная Открытая Ловушка) [11] было обнаружено повышение эффективности излучения ($\sim 1\%$) ЭМ-волн (0.1–0.5 ТГц) в режиме, когда поперечные размеры системы оказывались сравнимыми с длиной излучаемых волн. В линейной теории [12, 13] был предсказан механизм плазменной антенны, в котором непрерывная инжекция пучка в плазменный канал с предварительно созданной продольной модуляцией плотности обеспечивает высокую эффективность (до 10%) генерации излучения на плазменной частоте. Заметим, что в самой работе [13] для оценки мощности излучения применяется некий “damping layer”, однако подробности его реализации скрыты.

Рассмотрим 2D3V кинетическую численную модель взаимодействия электронного пучка с плазмой при параметрах, близких к приведенным в работе [13]. Рассматриваемый физический процесс описывается системой уравнений Власова–Максвелла с самосогласованными электромагнитными полями. Для решения этих уравнений используется метод частиц в ячейках [1, 2, 14]. Движение частиц происходит согласно характеристикам уравнения Власова по схеме Бориса [15], обеспечивающей второй порядок точности. Для решения уравнения Максвелла для электромагнитных полей используется FDTD-схема с граничными условиями Мура [6] и простым поглощающим слоем QSAL вдоль границ (кроме области, занимаемой плазмой). В расчетной области, имеющей форму прямоугольника размером $L_x \times L_y$, находится плазма, ограниченная с двух сторон вакуумом. Внутри области с двух других сторон (у границ $X = 0$ и $X = L_x$) поддерживается постоянный приток плазмы. Частицы, проникающие из плазмы в приграничную ячейку, свободно проходят сквозь нее и удаляются, покинув расчетную область. При проникновении частицы из приграничной ячейки в плазму в ячейку через внешнюю границу добавляется частица с параметрами, соответствующими вылетевшей частице. Такой подход позволяет, с одной стороны, поддерживать на границе некоторое распределение частиц, а с другой стороны, обеспечивает естественный протиток плазмы при прохождении сквозь нее электронного пучка. Плазма удерживается достаточно сильным однородным магнитным полем $(B_x, 0, 0)$. Через левую границу области в плазму проникает пучок, при этом инжекция пучка осуществляется постоянно (рис. 5).

Рассмотрим режим генерации электромагнитного излучения при инжекции пучка в модулированную по плотности плазму, т.е. плотность электронов и ионов фона имеет следующее распределение: $n_e(x) = n_i(x) = n_0 + d_n * \cos(qx)$. Выберем параметр $d_n = 0.025$. Это соответствует небольшому уровню модуляции и обеспечивает низкий уровень нелинейности процессов пучково-плазменного взаимодействия. По направлению Y плазма распределена равномерно. Варьируя параметр модуляции q , можно контролировать не только мощность излучения, но и его направление. Рассмотрим генерацию излучения, направленного под различными углами к оси X . Выберем следующие параметры. Плотность плазмы $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Отношение плотности пучка к плотности плазмы $n_b/n_e = 0.005$, скорость пучка $v_b = 0.9$ скорости света. Температура пучка соответствует энергии $K_b = 300 \text{ эВ}$, температура электронов плазмы $K_e = 42 \text{ эВ}$, ионы плазмы неподвижны. Длина области составляет $L_x = 180 c/w_p$, ширина плазменного слоя $L_{y1} = 6.4 c/w_p$, общая ширина расчетной области $L_y = 64 c/w_p$.

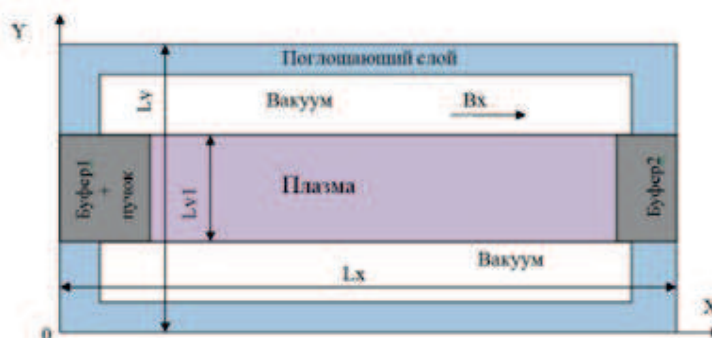


Рис. 5. Схема расчетной области

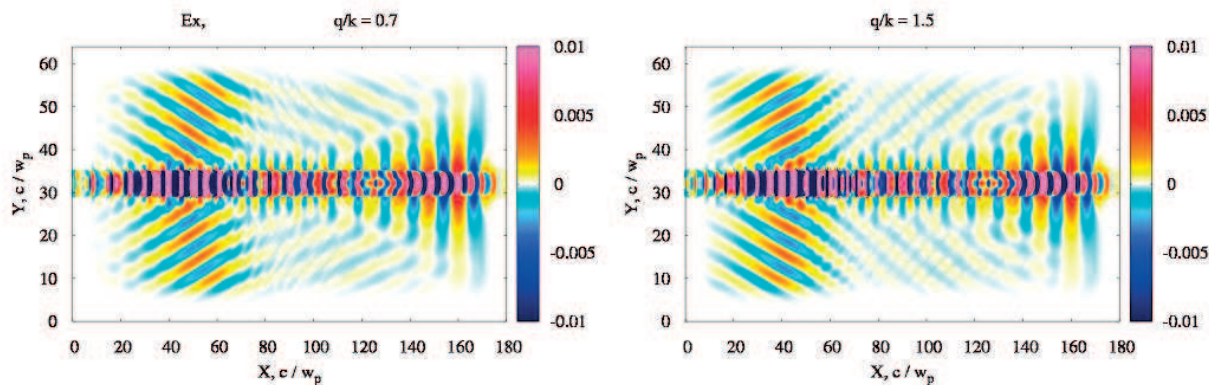


Рис. 6. X-компонента электрического поля в момент времени $T = 200/w_p$ для значений $q = 0.7k$ и $q = 1.5k$

Число узлов $n_x = 1800$, $n_y = 640$, $n_{y1} = 64$ ($h_x = h_y = 0.1 c/w_p$, $\tau = 0.05$), общее число частиц в расчетах — до 0.18 млрд. Ширина поглощающего слоя $l = 12 c/w_p$, степень поглощения $a = 0.9$. В дальнейшем все размеры будут указаны в c/w_p . Будем варьировать параметр модуляции в зависимости

от волнового числа возбуждаемой пучком волны $k_{||} = w_p/v_b$, где $w_b = 1 - \frac{n_b^{1/3}}{2^{4/3}\gamma_b}$, γ_b — релятивистский фактор пучка.

На рис. 6 представлены изолинии X -компоненты электрического поля для различных значений q в момент времени $T = 200/w_p$. К этому моменту времени передний край продольной волны, возбуждаемой пучком, частично пересечет границу области по X . Кроме того, излучение, генерируемое при пучково-плазменном взаимодействии, дойдет до границы области по Y .

Из этого рисунка видно, что искажение изолиний волн, вызванное их отражением от поглощающего слоя, невелико. Для случая $q = 1.5k$ искажения незаметны, для случая $q = 0.7k$ искажения наблюдаются только в районе $X = 20 c/w_p$, где волна, соприкасаясь с поглощающим слоем вдоль $X = 12 c/w_p$ (граница поглощающего слоя), тем не менее не заходит в него. Рассмотрим эффективность излучения как отношение мощности излучения к мощности входящего пучка. На рис. 7 представлена эффективность излучения для O -волн (E_x, E_y, B_z) в сравнении с теоретическими данными работы [12].

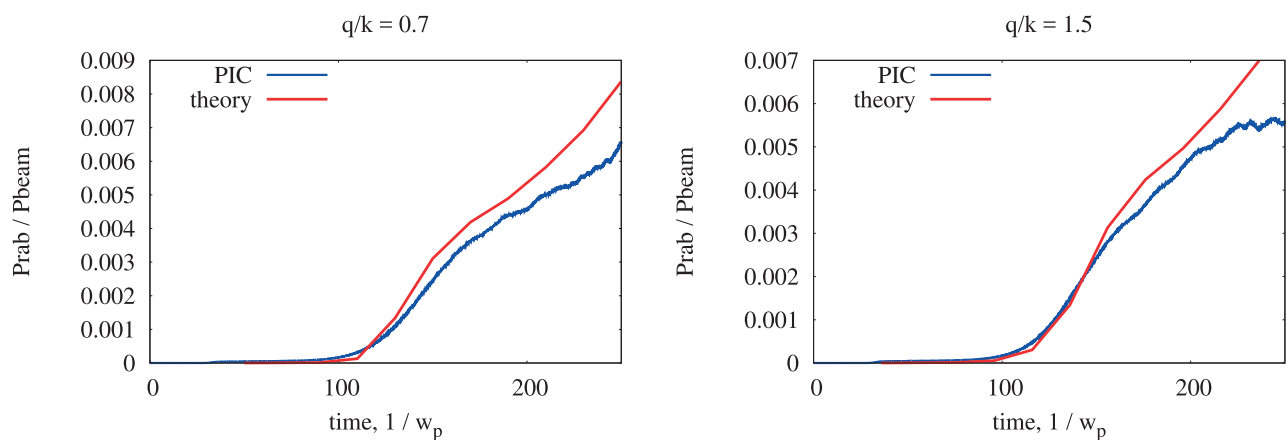


Рис. 7. Отношение мощности излучения на боковые стенки к мощности входящего пучка для O -моды в сравнении с теорией ($q = 0.7k$ и $q = 1.5k$)

Из рис. 7 видно, что имеется качественное и количественное совпадение расчетных и теоретических данных относительно эффективности генерируемого излучения. Чуть меньшие значения эффективности в численных расчетах связаны с тем, что помимо O -волны в плазме присутствует нелинейная X -волна (E_z, B_x, B_y), на развитие которой уходит часть энергии пучка. Таким образом, рассматриваемый способ поглощения электромагнитного излучения можно успешно применять при решении практических задач по диагностике излучения.

4. Заключение. В работе рассматривается применение простого поглощающего слоя (SAL) для поглощения и диагностики электромагнитного излучения в задаче взаимодействия электронного пучка с замагниченной плазмой. Показано, что такой слой не только обеспечивает высокую эффективность поглощения излучения, но и позволяет легко рассчитать энергию, вышедшую из системы через излучение, разделив энергию на необходимые компоненты. В тестовых расчетах поглощения излучения от точечного источника слой SAL также показал низкий коэффициент отражения (около 0.5%) в случае, когда коэффициент ослабления внутри слоя меньше длины поглощаемой волны. Как и при использовании других граничных условий для схемы FDTD, для SAL необходимо подбирать параметры слоя для наилучшего поглощения. Однако простота реализации слоя SAL дает возможность достаточно быстро подстроить его под конкретную задачу. Дополнительным плюсом является возможность покомпонентного расчета мощности излучения электромагнитных волн.

Исследование режимов генерации электромагнитного излучения выполнено при поддержке РФФИ (код 16-01-00209). Программный комплекс для моделирования пучково-плазменного взаимодействия разработан при поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере в рамках конкурса “УМНИК”.

Авторы признательны Дудниковой Г.И., Вшивкову В.А. и Тимофееву И.В. за полезные обсуждения.

Работа выполнена с использованием ресурсов Сибирского суперкомпьютерного центра ИВМиМГ СО РАН и суперкомпьютера “Ломоносов” (МГУ им М.В. Ломоносова).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин Ю.А., Вишневков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980.
2. Григорьев Ю.Н., Вишневков В.А., Федорук М.П. Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004.
3. Berendeev E.A., Dudnikova G.I., Efimova A.A. PIC-simulation of the electron beam interaction with modulated density plasma // AIP Conference Proceedings. 2017. **1895**. doi 10.1063/1.5007419.
4. Berendeev E., Boronina M., Dudnikova G., Efimova A., Vshivkov V. Supercomputer modeling of generation of electromagnetic radiation by beam-plasma interaction // Parallel Computational Technologies. Cham: Springer, 2017. 247–260.
5. Taflov A., Hagness S.C. Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method // Boston: Artech House, 2005.
6. Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 1981. **EMC-23**, N 4. 377–382.
7. Liao Z.P., Wong H.L., Yang B.P., Yuan Y.F. A transmitting boundary for transient wave analyses // Scientia Sinica Ser. A. 1984. **27**. 1063–1076.
8. Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics. 1994. **114**, N 2. 185–200.
9. Gedney S.D. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1996. **44**, N 12. 1630–1639.
10. Langdon A.B., Lasinski B.F. Electromagnetic and relativistic plasma simulation models // Meth. Comput. Phys. 1976. **16**. 327–366.
11. Arzhannikov A.V., Burdakov A.V., Burmasov V.S., et al. Dynamics and spectral composition of subterahertz emission from plasma column due to two-stream instability of strong relativistic electron beam // IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol. 2016. **6**, N 2. 245–252.
12. Timofeev I.V., Annenkov V.V., Arzhannikov A.V. Regimes of enhanced electromagnetic emission in beam-plasma interactions // Phys. Plasmas. 2015. **22**. doi 10.1063/1.4935890.
13. Annenkov V.V., Timofeev I.V., Volchok E.P. Simulations of electromagnetic emissions produced in a thin plasma by a continuously injected electron beam // Phys. Plasmas. 2016. **23**. doi 10.1063/1.4948425.
14. Хокни П., Истеуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987.
15. Boris J.P. Relativistic plasma simulation — optimization of a hybrid code // Proc. Fourth Conference on Numerical Simulation of Plasmas. Washington, DC: Naval Res. Lab., 1971. 3–67.

Поступила в редакцию
12.04.2018

A Method of Damped Absorption of Electromagnetic Waves in the Numerical Simulation of Electron Beam-Plasma Interaction

E. A. Berendeev¹ and A. A. Efimova²

¹ *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Graduate Student, e-mail: evgeny.berendeev@gmail.com*

² *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Junior Scientist, e-mail: anna.an.efimova@gmail.com*

Received April 12, 2018

Abstract: The damped absorption as a boundary condition for solving the Maxwell equations by the FDTD (Finite Difference Time Domain) method is considered. Numerical experiments confirm the efficiency of using a simple absorbing layer to absorb the electromagnetic radiation from a point source. The efficiency of using this method to take into account the power of electromagnetic radiation in the numerical simulation of electron beam-plasma interaction by the particle-in-cell method is also shown.

Keywords: generation of electromagnetic radiation, periodic boundary conditions, Mur’s boundary conditions, absorbing layer, beam injection into plasma, Vlasov equation, Maxwell’s equations, particle-in-cell method.

References

1. Yu. A. Berezin and V. A. Vshivkov, *Particle-in-Cell Methods in Rarefied Plasma Dynamics* (Nauka, Novosibirsk, 1980) [in Russian].
2. Yu. N. Grigor'ev, V. A. Vshivkov, and M. P. Fedoruk, *Numerical Modeling by Particle-in-Cell Methods* (Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2004) [in Russian].
3. E. A. Berendeev, G. I. Dudnikova, and A. A. Efimova, "PIC-Simulation of the Electron Beam Interaction with Modulated Density Plasma," *AIP Conf. Proc.* **1895** (2017). doi 10.1063/1.5007419
4. E. Berendeev, M. Boronina, G. Dudnikova, et al., "Supercomputer Modeling of Generation of Electromagnetic Radiation by Beam-Plasma Interaction," in *Parallel Computational Technologies* (Springer, Cham, 2017), pp. 247–260.
5. A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method* (Artech House, Boston, 2005).
6. G. Mur, "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **EMC-23** (4), 377–382 (1981).
7. Z. P. Liao, H. L. Wong, B. P. Yang, and Y. F. Yuan, "A Transmitting Boundary for Transient Wave Analyses," *Sci. Sinica, Ser. A* **27**, 1063–1076 (1984).
8. J.-P. Berenger, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves," *J. Comput. Phys.* **114** (2), 185–200 (1994).
9. S. D. Gedney, "An Anisotropic Perfectly Matched Layer-Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices," *IEEE Trans. Antennas Propag.* **44** (12), 1630–1639 (1996).
10. A. B. Langdon and B. F. Lasinski, "Electromagnetic and Relativistic Plasma Simulation Models," *Meth. Comput. Phys.* **16**, 327–366 (1976).
11. A. V. Arzhannikov, A. V. Burdakov, V. S. Burmasov, et al., "Dynamics and Spectral Composition of Subterahertz Emission from Plasma Column Due to Two-Stream Instability of Strong Relativistic Electron Beam," *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.* **6** (2), 245–252 (2016).
12. I. V. Timofeev, V. V. Annenkov, and A. V. Arzhannikov, "Regimes of Enhanced Electromagnetic Emission in Beam-Plasma Interactions," *Phys. Plasmas* **22** (2015). doi 10.1063/1.4935890
13. V. V. Annenkov, I. V. Timofeev, and E. P. Volchok, "Simulations of Electromagnetic Emissions Produced in a Thin Plasma by a Continuously Injected Electron Beam," *Phys. Plasmas* **23** (2016). doi 10.1063/1.4948425
14. R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles* (McGraw-Hill, New York, 1981; Mir, Moscow, 1987).
15. J. P. Boris, "Relativistic Plasma Simulation — Optimization of a Hybrid Code," in *Proc. Fourth Conf. on Numerical Simulation of Plasmas, Washington, DC, USA, November 2–3, 1970* (Naval Res. Lab., Washington, DC, 1971), pp. 3–67.