

УДК 519.6

doi 10.26089/NumMet.v19r319

ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ С ЦИРКУЛЯЦИЕЙ И ПОД ВЛИЯНИЕМ МАССОВЫХ СИЛ

Н. Д. Байков¹, А. Г. Петров²

Рассматриваются задачи формирования кумулятивных струй в плоскопараллельных потенциальных течениях идеальной несжимаемой жидкости внутри цилиндрических полостей. На основе метода граничных элементов строится численный алгоритм решения. При аппроксимации используются квадратурные формулы без насыщения. Новизна работы заключается в исследовании потенциальных течений с ненулевой циркуляцией и выводе аналога закона сохранения импульса для таких течений. Кроме того, рассматривается задача всплытия полости в тяжелой жидкости.

Ключевые слова: кумулятивные струи, плоскопараллельное течение, метод граничных элементов, квадратурные формулы без насыщения, циркуляция.

1. Математическая постановка задачи. В настоящей статье изучаются задачи численного моделирования кумулятивных струй в идеальной несжимаемой жидкости внутри цилиндрических полостей. Рассматриваются плоскопараллельные потенциальные течения жидкости, которые могут иметь ненулевую циркуляцию. Плоскость течения жидкости перпендикулярна оси цилиндра. В таком случае решение пространственной задачи может быть сведено к решению плоской задачи. Работа является продолжением исследования нестационарных задач со свободными границами, рассматривавшихся в работе [1].

Сформулируем математическую постановку задачи. Пусть в неограниченном объеме жидкости имеется цилиндрическая полость. Обозначим плоское сечение этого цилиндра и его границу через S и ∂S соответственно. Течение идеальной жидкости в области $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{S}$ описывается функцией тока Ψ , которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Psi = 0.$$

Потребуем, чтобы давление p на границе полости ∂S равнялась нулю, а скорость жидкости стремилась к нулю на бесконечности.

Так как функция тока Ψ является гармонической функцией в области течения жидкости, то ее значения на границе ∂S связаны со значениями производной по нормали при помощи следующего тождества:

$$2\pi(C(t) - \Psi(M, t)) \equiv \left[A \frac{\partial \Psi}{\partial n} + B\Psi \right](M, t), \tag{1}$$

где действие интегральных операторов A и B в точке $M \in S$ определяется по формулам

$$\begin{aligned} \left[A \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right](M, t) &:= - \oint_{\partial S} G(M, M') \frac{\partial \Psi}{\partial n'}(M', t) ds', \\ [B\Psi](M, t) &:= \oint_{\partial S} \frac{\partial G}{\partial n'}(M, M') (\Psi(M', t) - \Psi(M, t)) ds', \\ G(M, M') &:= \ln(r(M, M')), \\ r^2(M, M') &:= (x - x')^2 + (y - y')^2, \quad M' \in \partial S. \end{aligned}$$

В тождестве (1) направление обхода контура задано против часовой стрелки, а нормаль считается внешней по отношению к полости. Для вычисления производных по пространственным координатам достаточно уметь определять Ψ с точностью до функции времени, поэтому положим $C(t) = 0$. Принимая

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; аспирант, e-mail: baikov_nd@rambler.ru

² Институт проблем механики РАН им. А. Ю. Ишлинского, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1, 119526, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: petrovipmech@gmail.com

во внимание соотношения между функцией тока Ψ и потенциалом Φ

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \quad (2)$$

преобразуем интегральное тождество (1) к уравнению

$$-2\pi\Psi(M, t) = \left[A\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right) + B\Psi \right](M, t). \quad (3)$$

Основной целью данной работы является вычисление формы ∂S в различные моменты времени. Изменение формы ∂S зависит от значений скорости в точках границы. В свою очередь, скорость вычисляется через функцию тока Ψ . Таким образом, решение задачи сводится к решению интегрального уравнения (3).

2. Особенности численного алгоритма. Для решения уравнения (3) применим метод из [2]. Ранее этот метод применялся для расчета обтекания неподвижных профилей [3], стационарных кавитационных течений [4], задач электрохимической обработки материалов [5], а также в предыдущей работе авторов к расчету нестационарных задач со свободной границей [1].

В задачах с ненулевой циркуляцией присутствует дополнительная специфика: потенциал течения жидкости Φ является многозначной функцией. Тем не менее, из теоремы Томсона следует, что производная потенциала $\partial\Phi/\partial\zeta$ остается однозначной функцией. Так как при выводе основного интегрального уравнения (3) использовалась функция тока Ψ , которая остается однозначной и в этом случае, то для обобщения алгоритма [1] на случай течений с циркуляцией достаточно учесть многозначность Φ при вычислении ее производных по пространственным координатам. Дополнительные трудности, однако, связаны с проверкой законов сохранения энергии и импульса, так как в формулах для их определения появляются расходящиеся интегралы. В дальнейшем будет показано, что для потенциальных течений с циркуляцией существует аналог закона сохранения импульса, который можно использовать для контроля точности вычислений.

Рассмотрим особенности численного алгоритма. Заменим интегралы в уравнении (3) квадратурными формулами без насыщения [2]. В этом случае остаточный член будет экспоненциально убывать по абсолютной величине с ростом количества точек сетки. Для этого сначала зададим гладкую параметризацию границы ∂S при помощи вспомогательной положительной функции $f(\zeta, t)$ по формуле

$$ds = l(t)f(\zeta, t) d\zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \int_0^1 f(\zeta, t) d\zeta = 1,$$

где $l(t)$ — длина границы ∂S в момент времени t . Для аппроксимации границы ∂S будем использовать N фиксированных точек с координатами $\zeta_i = i/N$, где $i = 1, 2, \dots, N$. Функцию $f(\zeta, t)$ назовем плотностью распределения точек на границе. В начальный момент времени $f(\zeta, 0)$ может быть задана произвольно, но ее значения в следующие моменты времени будут определяться касательной скоростью U , как это будет указано ниже. С учетом введенной параметризации аппроксимация интегральных операторов A и B в уравнении (3) имеет следующий вид:

$$\left[A\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right) \right](\zeta_i, t) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\beta(|i-j|) + G_{ij} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(\zeta_j, t). \quad (4)$$

$$\text{Здесь } \begin{cases} \beta(0) = \alpha(0), & \beta(m) = -\ln \left| \sin \frac{\pi m}{N} \right| + \alpha(m), & \alpha(m) = -\left(\ln 2 + \frac{(-1)^m}{N} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{1}{k} \cos \frac{2\pi km}{N} \right), \\ G_{ij} = G(\zeta_i, \zeta_j), & i \neq j, & G_{ii} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_i} \left(G(\zeta_i, \zeta) - \ln \left| \sin (\pi(\zeta_i - \zeta)) \right| \right); \end{cases}$$

$$[B\Psi](\zeta_i, t) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N G_{ij}^n (\Psi(\zeta_j, t) - \Psi(\zeta_i, t)),$$

$$\text{где } G_{ij}^n = \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^2} \frac{\partial y}{\partial \zeta}(\zeta_j, t) - \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^2} \frac{\partial x}{\partial \zeta}(\zeta_j, t), \quad i \neq j, \quad G_{ii}^n = 0.$$

Доказательство того, что указанные квадратурные формулы обладают свойством ненасыщаемости, приведено в [2].

Заметим, что форма свободной границы ∂S не зависит от выбора касательной скорости U , т.е. U можно выбирать произвольно. Например, можно положить $U = 0$. Однако при таком выборе скорости U плотность точек сетки на участках границы с большой кривизной с течением времени может уменьшаться и погрешность расчета контура будет быстро нарастать. Схема оказывается неустойчивой. В [6] предложено находить распределение U из условия сохранения пропорций длин дуг между соседними точками сетки. В этом случае плотность распределения не будет зависеть от времени (т.е. $f(\zeta, t) = f(\zeta)$). Условие сохранения распределения точек сетки может быть численно выражено при помощи следующей системы уравнений для $U_i = U(\zeta_i)$:

$$\Delta \bar{s}_i = \frac{1}{N} l(t + \Delta t) f\left(\frac{\zeta_{i-1} + \zeta_i}{2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{5}$$

Здесь $\Delta \bar{s}_i = \Delta s_i(t + \Delta t)$ — евклидово расстояние между точками сетки с индексами i и $i - 1$ в момент времени $t + \Delta t$. Система уравнений (5) имеет бесконечно много решений. Для однозначной разрешимости системы достаточно явно задать одну из касательных скоростей U_i , например $U_0 = U_N$. Значение U_0 будем подбирать таким образом, чтобы сохранять максимальную плотность точек сетки на участке свободной границы с наибольшей кривизной.

Значения нормальной компоненты скорости V будем находить из функции тока по формуле

$$V(\zeta, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial s}(\zeta, t) = \frac{1}{l(t)f(\zeta)} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}(\zeta, t). \tag{6}$$

Представление скорости V через функцию тока Ψ удобно тем, что закон сохранения площади S полости выполняется автоматически

$$\frac{dS}{dt} = \oint_{\partial S} V ds = \oint_{\partial S} \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = 0.$$

Изменение пространственных координат во времени вычисляется по формулам

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\zeta, t) = \frac{1}{l(t)f(\zeta)} \left(U \frac{\partial x}{\partial \zeta} + V \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(\zeta, t) = \frac{1}{l(t)f(\zeta)} \left(U \frac{\partial y}{\partial \zeta} - V \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right). \tag{7}$$

Именно формулы (7) позволяют находить форму свободной границы ∂S на следующем шаге по времени.

Для вычисления значений потенциала Φ на следующем шаге по времени будем использовать интеграл Коши–Лагранжа. При отсутствии силы тяжести этот интеграл может быть записан в виде

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{x,y} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{2} + p = f(t),$$

где плотность жидкости ρ принимается за единицу, p — давление в произвольной точке жидкости, а $f(t)$ — некоторая функция времени. Запишем интеграл Коши–Лагранжа на границе ∂S :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{x,y} + \frac{1}{2} \left(V^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 \right) = f(t).$$

Выразим производную потенциала по времени при постоянном параметре ζ через производную по времени при постоянных декартовых координатах x, y :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\zeta} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{x,y} + U \frac{\partial \Phi}{\partial s} + V^2.$$

Таким образом, интеграл Коши–Лагранжа приведет к виду

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\zeta} - f(t) = \frac{1}{2} V^2 + \frac{U}{l(t)f(\zeta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l(t)f(\zeta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)^2. \tag{8}$$

Поскольку для нахождения значений пространственных координат точек сетки и скоростей используются только производные Φ по параметру ζ , от функции $f(t)$ можно избавиться, введя функцию

$$\tilde{\Phi}(\zeta, t) = \Phi(\zeta, t) - \int_0^t f(t') dt'.$$

С ее помощью уравнение (8) запишется следующим образом:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \right|_{\zeta} = \frac{1}{2} V^2 + \frac{U}{l(t)f(\zeta)} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l(t)f(\zeta)} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta} \right)^2. \quad (9)$$

При наличии силы тяжести в правую часть уравнения (9) необходимо добавить еще одно слагаемое:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \right|_{\zeta} = \frac{1}{2} V^2 + \frac{U}{l(t)f(\zeta)} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l(t)f(\zeta)} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta} \right)^2 - gy. \quad (10)$$

3. Схема алгоритма. Кратко изложим алгоритм построения границы полости ∂S в каждый момент времени по шагам.

1. В начальный момент будем задавать координаты точек сетки $x_i = x(\zeta_i, t)$, $y_i = y(\zeta_i, t)$ и потенциал $\Phi_i = \Phi(\zeta_i, t)$.
2. При помощи кубического сплайна вычислим производные $\frac{\partial x}{\partial \zeta_i}$, $\frac{\partial y}{\partial \zeta_i}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_i}$. При этом учитываем, что Φ может быть многозначной функцией.
3. Из системы линейных уравнений для интегрального тождества (3) вычислим значения функции тока Ψ_i . Заметим, что особенность оператора B была устранена, а логарифмическая особенность оператора A при аппроксимации по формуле (4) учтена аналитически. Корректность системы линейных уравнений обоснована в [2].
4. По формуле (6) при помощи кубического сплайна вычислим нормальные компоненты скоростей точек V_i .
5. Из уравнения (5) вычислим касательные компоненты скоростей U_i .
6. К уравнениям (7) и (9) применим метод Рунге–Кутты и вычислим значения пространственных координат x_i , y_i и потенциала $\tilde{\Phi}_i$ на новом шаге по времени.
7. Возвращаемся к шагу 2 алгоритма. Вместо Φ_i далее используем $\tilde{\Phi}_i$.

4. Законы сохранения. Законы сохранения импульса и энергии позволяют контролировать точность алгоритма в процессе вычислений. Для потенциальных течений с нулевой циркуляцией, в которых скорость жидкости стремится к нулю на бесконечности, энергия E и компоненты вектора импульса I_x и I_y вычисляются по следующим формулам:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} d\zeta, \quad I_x = - \int_0^1 \Phi \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta, \quad I_y = \int_0^1 \Phi \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta. \quad (11)$$

В случае потенциального течения с ненулевой циркуляцией определенные в (11) величины, вообще говоря, не являются импульсом и энергией и не обязаны сохраняться с течением времени. В этом случае необходимо учитывать интегралы по бесконечно удаленному контуру, которые могут оказаться расходящимися. Справедлива следующая

Теорема. Для потенциальных течений с ненулевой циркуляцией величины

$$I_x = - \int_0^1 y \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} d\zeta, \quad I_y = \int_0^1 x \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} d\zeta \quad (12)$$

не зависят от времени и являются аналогами законов сохранения импульса.

Доказательство. Воспользуемся формулой для дифференцирования интеграла по подвижному объему

$$\frac{d}{dt} \int_{\partial S} F \mathbf{n} ds = \int_{\partial S} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \mathbf{n} + v_n \nabla F \right) ds, \quad (13)$$

где F — произвольная гладкая функция времени t и координат x, y и однозначно определенная вне контура ∂S , v_n — скорость потока жидкости, спроектированная на внешнюю к контуру нормаль.

Потенциал Φ поля скорости потока с циркуляцией неоднозначно определен на контуре, поэтому формулу (13) к нему применять нельзя. Согласно теореме Томсона, циркуляция скорости по подвижному контуру со временем не меняется. Поэтому вместо потенциала в качестве F выберем однозначно определенную вне контура функцию $F = \Phi - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi$. Подставляя ее в (13), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\partial S} \left(\Phi - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi \right) \mathbf{n} ds &= \int_{\partial S} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \mathbf{n} + v_n \left(\nabla \Phi - \frac{\Gamma}{2\pi} \nabla \varphi \right) \right) ds = \\ &= \int_{\partial S} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{n} ds + \int_{\partial S'} \left(v_n \mathbf{v} - \frac{v^2}{2} \mathbf{n} \right) ds - \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\partial S} v_n \nabla \varphi ds. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение первого слагаемого в правой части равно $-p/\rho + \text{const}$. Поскольку давление p на границе полости равно нулю, то этот интеграл равен нулю. Второе слагаемое в правой части не меняется при непрерывной деформации контура $\partial S'$. Его можно привести к окружности большого радиуса R , на которой модуль скорости $|\mathbf{v}| = O\left(\frac{1}{R}\right)$. В пределе при $R \rightarrow \infty$ этот интеграл стремится к нулю. Таким образом, в проекциях на координатные оси получаем два тождества

$$\frac{d}{dt} \int_{\partial S} \left(\Phi - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi \right) n_x ds + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\partial S} v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds \equiv 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\partial S} \left(\Phi - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi \right) n_y ds + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\partial S} v_n \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds \equiv 0. \quad (14)$$

Для приведения тождеств (14) к форме полной производной по времени от некоторого выражения воспользуемся соотношениями Коши–Римана:

$$\frac{\partial \ln r}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \ln r}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (15)$$

С помощью (15) из формулы (13) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds &= - \int_{\partial S} v_n \frac{\partial \ln r}{\partial y} ds = - \frac{d}{dt} \int_{\partial S} n_y \ln r ds = \frac{d}{dt} \int_{\partial S} \ln r \frac{\partial x}{\partial s} ds, \\ \int_{\partial S} v_n \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds &= \int_{\partial S} v_n \frac{\partial \ln r}{\partial x} ds = \frac{d}{dt} \int_{\partial S} n_x \ln r ds = \frac{d}{dt} \int_{\partial S} \ln r \frac{\partial y}{\partial s} ds. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (14), получаем аналог закона сохранения импульса в виде

$$I_x = \int_{\partial S} \left(\Phi - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi \right) \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\partial S} \ln r \frac{\partial x}{\partial s} ds, \quad I_y = \int_{\partial S} - \left(\Phi - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi \right) \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\partial S} \ln r \frac{\partial y}{\partial s} ds.$$

Интегрируя по частям первые слагаемые, приходим к соотношениям

$$I_x = - \int_{\partial S} y \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds + \frac{\Gamma}{2\pi} I'_x, \quad I_y = \int_{\partial S} x \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds + \frac{\Gamma}{2\pi} I'_y, \quad I'_x = \int_{\partial S} (\ln r dx + y d\varphi), \quad I'_y = \int_{\partial S} (\ln r dy - x d\varphi).$$

Так как $\int_{\partial S} (x + iy)(d \ln r + i d\varphi) = \int_{\partial S} z d \ln z = \int_{\partial S} dz = 0$ и, с другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} (x + iy)(d \ln r + i d\varphi) &= \int_{\partial S} (x d \ln r - y d\varphi) + i \int_{\partial S} (y d \ln r + x d\varphi) = \\ &= \int_{\partial S} [(-\ln r dx - y d\varphi) + i(-\ln r dy + x d\varphi)] = -I'_x - iI'_y, \end{aligned}$$

то отсюда следует $I'_x = I'_y = 0$. Таким образом, выражения I_x и I_y тождественны выражениям в (12), что и требовалось показать.

5. Формирование кумулятивных струй при различных значениях циркуляции. Описанный выше алгоритм был применен для расчета формирования кумулятивных струй внутри цилиндрических полостей под действием потенциальных течений с различными значениями циркуляции Γ . В начальный момент полости имели форму круга единичного радиуса с центром в начале координат, а потенциал течения задавался по формуле

$$\Phi = \frac{\cos \varphi}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi,$$

где r и φ — координаты точки в полярной системе координат. Сила тяжести в задаче отсутствовала. Функция плотности распределения задавалась по формуле

$$f(\zeta) = 1 - \alpha \cos(2\pi\zeta).$$

Касательная скорость U_0 подбиралась таким образом, чтобы вершине струи соответствовало значение параметра $\zeta = 0$. Вблизи вершины струи достигаются наибольшие значения кривизны границы. Для уменьшения погрешности алгоритма точки сетки в ее окрестности необходимо сгущать. Для этого параметр α выбирался близким к единице.

Частный случай этой задачи при $\Gamma = 0$ уже рассматривался ранее в работе [6]. При отсутствии циркуляции потенциал Φ является однозначной периодической функцией на границе полости. Так как это течение симметрично относительно оси Ox , то кумулятивная струя не отклоняется от горизонтали. Сместить распределение при помощи касательной скорости U_0 в этой задаче не требуется, поэтому $U_0 = 0$. Для аппроксимации границы по предложенному в настоящей статье алгоритму использовалось $N = 128$ точек и коэффициент $\alpha = 0.99$. В таком случае расстояния между соседними точками сетки в вершине струи $\zeta = 0$ и в противоположной точке $\zeta = 1/2$ отличались приблизительно в $f(1/2)/f(0) = (1+\alpha)/(1-\alpha) \approx 200$ раз. Полученные результаты расчетов для формы границы полости совпали с результатами, которые были приведены в работе [6]. Совпадение было также получено и при сравнении численных результатов с полуаналитическим методом решения этой задачи, предложенным в работе [7]. При сравнении с работой [7] также учитывались значения скорости в вершине кумулятивной струи ($\zeta = 0$) и разница давлений между границей полости и бесконечностью. Для определения разницы давлений использовалась следующая формула:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} [2\pi\tilde{\Phi} + AV + B\tilde{\Phi}] (M, t).$$

Здесь M — произвольная точка на границе ∂S , а интегральные операторы A и B были определены в уравнении (1).

Рассмотрим теперь случай ненулевой циркуляции. В этом случае условие симметричности относительно горизонтали не выполняется. Острые струи под действием циркуляции отклоняются от горизонтали. Для поддержания наибольшей плотности точек сетки на острие струи использовались поворот исходного распределения относительно центра полости в начальный момент и задание ненулевой касательной компоненты скорости U_0 . В ходе численных экспериментов оказалось, что подбор удается упростить, если задавать касательную скорость U_0 равной касательной компоненте жидкости, находящейся в этой точке. Ее можно найти благодаря известной функции потенциала Φ .

Результаты расчетов для параметра циркуляции $\Gamma = 10$ приведены на рис. 1. Для аппроксимации границы тоже использовалось $N = 128$ точек. Состояния границы полости изображены с интервалом $t = 0.15$ за исключением последнего. Ему соответствует момент времени $t = 0.69$.

6. Всплытие полости в тяжелой жидкости. Предложенный в нашей работе численный алгоритм также применялся для решения плоской задачи всплытия полости в тяжелой жидкости. В этом случае

необходимо учесть силу тяжести в интеграле Коши–Лагранжа. Для этого добавим дополнительное слагаемое в правую часть, как это сделано в уравнении (10).

Полученные результаты приведены на рис. 2. В начальный момент времени полость имела форму круга единичного радиуса, а жидкость покоилась. Под действием силы тяжести в нижней части границы полости образуется кумулятивная струя, поэтому на начальном этапе формирования струи необходимо сгущать точки сетки на этом участке границы для уменьшения погрешности вычислений. Как видно из рис. 2, с некоторого момента времени кривизна в верхней точке струи начинает убывать и необходимость в таком сгущении отпадает. При решении задачи следует использовать симметрию относительно оси Oy . При проверке закона сохранения энергии необходимо также учитывать потенциальную энергию, которая

$$E_g = \frac{1}{2} \int_0^1 gy^2 \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta.$$

Численные результаты качественно совпадают с результатами, полученными в работе [8].

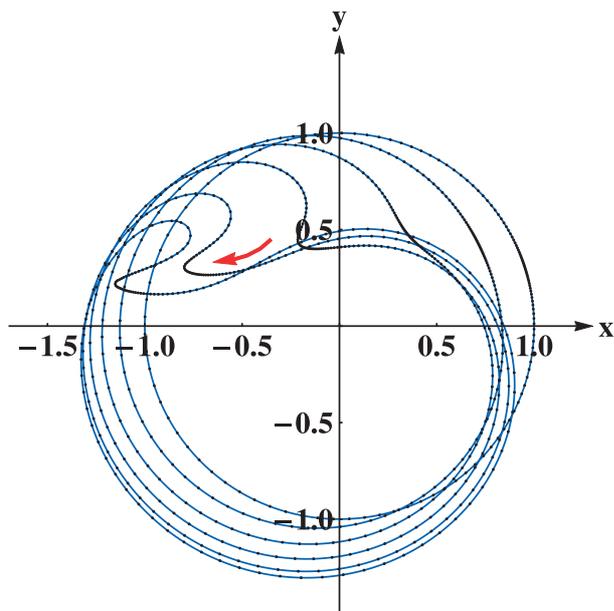


Рис. 1. Деформация полости при циркуляции $\Gamma = 10$

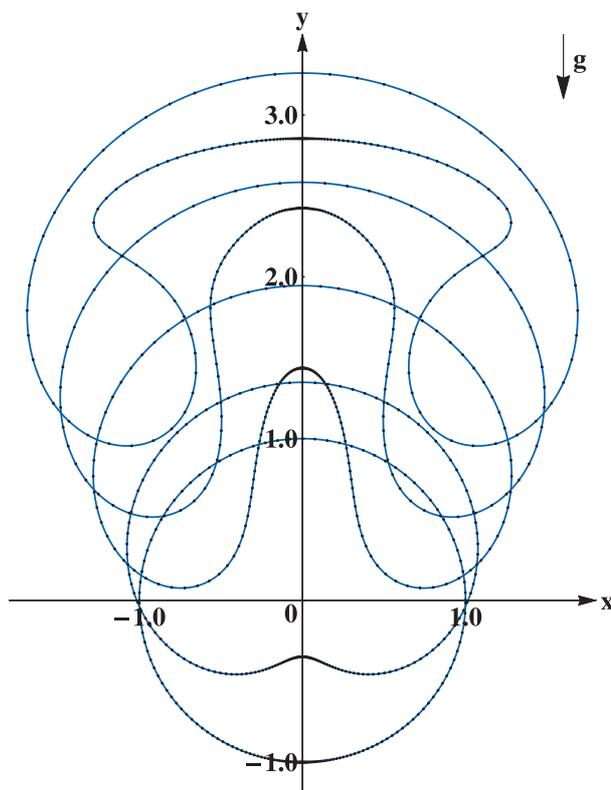


Рис. 2. Всплытие полости в тяжелой жидкости

Таким образом, в настоящей статье предложен новый численный алгоритм, который позволяет при небольших вычислительных затратах рассчитывать формирование кумулятивных струй на свободной границе плоскопараллельных нестационарных течений, а также в ряде других важных с физической точки зрения случаев. Получено обобщение алгоритма на не рассматривавшийся ранее другими авторами случай потенциальных течений с ненулевой циркуляцией. Доказан аналог закона сохранения импульса для этого случая.

Работа частично поддержана РФФИ (код проекта № 17–01–00901).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байков Н.Д., Петров А.Г. О формировании кумулятивной струи в плоско-параллельном потоке идеальной жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2017. № 5. 42–47.
2. Петров А.Г. Квадратурные формулы для периодических функций и их применение в методе граничных элементов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. 48, № 8. 1344–1361.
3. Петров А.Г. Схема без насыщения для обтекания решетки профилей и вычисление точек отрыва в вязкой жидкости // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. 51, № 7. 1326–1338.

4. Петров А.Г., Потанов И.И. О расчете сил, действующих на тела, для плоских и осесимметричных задач кавитационного обтекания // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. **56**, № 2. 318–331.
5. Петров А.Г., Сандуляну Ш.В. Моделирование электрохимической обработки методом граничных элементов без насыщения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. **56**, № 10. 1810–1820.
6. Воинов О.В., Воинов В.В. Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Докл. АН СССР. 1975. **221**, № 3. 559–562.
7. Karabut E.A., Petrov A.G., Zhuravleva E.N. Semi-analytical study of the Voinovs problem // Euro. J. of Applied Mathematics. 2018. **33**. doi 10.1017/S0956792518000098.
8. Boulton-Stone J.M. A comparison of boundary integral methods for studying the motion of a two-dimensional bubble in an infinite fluid // Comput. Methods in Appl. Mech. Eng. 1993. **102**, N 2. 213–234.

Поступила в редакцию
08.04.2018

Deformation of Cylindrical Cavities in Plane-Parallel Potential Flows with Circulation and under the Action of Mass Forces

N. D. Baikov¹ and A. G. Petrov²

¹ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Graduate Student, e-mail: baikov_nd@rambler.ru*

² *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences; prospekt Vernadskogo 101, Moscow, 119526, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: petrovipmech@gmail.com*

Received April 8, 2018

Abstract: The problems of cumulative jet formation in plane-parallel potential flows of a perfect incompressible fluid within cylindrical cavities are considered. A new numerical algorithm is proposed on the basis of the boundary element method. The approximation is based on quadrature formulas without saturation. The novelty of this paper is to study the potential flows with nonzero circulation and to derive an analog of the momentum conservation law for such flows. The process of the cavity rise in a heavy fluid is also studied.

Keywords: cumulative jets, plane-parallel flow, boundary element method, quadrature formulas without saturation, circulation.

References

1. N. D. Baikov and A. G. Petrov, “Formation of a Cumulative Jet in the Plane-Parallel Flow of a Perfect Fluid,” *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh.*, No. 5, 42–47 (2017) [*Moscow Univ. Mech. Bull.* **72** (5), 119–123 (2017)].
2. A. G. Petrov, “Quadrature Formulas for Periodic Functions and Their Application to the Boundary Element Method,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **48** (8), 1344–1361 (2008) [*Comput. Math. Math. Phys.* **48** (8), 1266–1283 (2008)].
3. A. G. Petrov, “Saturation-Free Numerical Scheme for Computing the Flow Past a Lattice of Airfoils and the Determination of Separation Points in a Viscous Fluid,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **51** (7), 1326–1338 (2011) [*Comp. Math. Math. Phys.* **51** (7), 1239–1250 (2011)].
4. A. G. Petrov and I. I. Potapov, “Computation of Forces Acting on Bodies in Plane and Axisymmetric Cavitation Flow Problems,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **56** (2), 318–331 (2016) [*Comp. Math. Math. Phys.* **56** (2), 320–333 (2016)].
5. A. G. Petrov and S. V. Sanduleanu, “Simulation of Electrochemical Machining Using the Boundary Element Method with No Saturation,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **56** (10), 1810–1820 (2016) [*Comp. Math. Math. Phys.* **56** (10), 1793–1802 (2016)].
6. O. V. Voinov and V. V. Voinov, “Numerical Method of Calculating Nonstationary Motions of an Ideal Incompressible Fluid with Free Surfaces,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **221** (3), 559–562 (1975) [*Sov. Phys. Dokl.* **20** (3), 179–182 (1975)].
7. E. A. Karabut, A. G. Petrov, and E. N. Zhuravleva, “Semi-Analytical Study of the Voinovs Problem,” *Euro. J. Appl. Math.* **33** (2018). doi 10.1017/S0956792518000098
8. J. M. Boulton-Stone, “A Comparison of Boundary Integral Methods for Studying the Motion of a Two-Dimensional Bubble in an Infinite Fluid,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **102** (2), 213–234 (1993).