

УДК 519.633.6

doi 10.26089/NumMet.v19r218

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ С УЧЕТОМ ТЕПЛООВОГО ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

А. А. Фролов¹, Е. В. Чижонков²

Исследовано влияние теплового движения электронов на плоские нерелятивистские нелинейные плазменные колебания. Численно и аналитически показано, что при учете теплового движения колебания трансформируются в бегущую волну. При этом амплитуда волны растет с ростом температуры, что способствует выносу энергии из первоначальной области локализации колебаний. Для численного моделирования построена схема метода конечных разностей на основе эйлеровых переменных. При использовании лагранжевых переменных для приближения малых возмущений получены распределения максимумов электронной плотности в зависимости от температуры плазмы. Аналитические результаты находятся в хорошем соответствии с численными экспериментами.

Ключевые слова: численное моделирование, метод конечных разностей, плазменные колебания, бегущие волны, метод возмущений.

Введение. Полностью ионизованная плазма является сильно нелинейной средой, в которой даже относительно небольшие начальные коллективные смещения частиц могут приводить к колебаниям и волнам большой амплитуды [1]. Для одномерной плоской нелинейной плазменной волны в [2] была определена предельная амплитуда электрического поля, до которой волна может существовать и при приближении к которой возмущения плотности электронов становятся бесконечно большими. Влияние теплового движения электронов на опрокидывание плоской нелинейной плазменной волны, рассмотренной в [2], исследовано в работе [3]. С другой стороны, теоретический и прикладной интерес представляет не только момент завершения колебаний и волн (т.е. эффект опрокидывания), но и процесс регулярных плазменных колебаний большой амплитуды, который может продолжаться сколь угодно долго. В данном случае речь идет о плоских нерелятивистских колебаниях, изучению которых посвящено значительное количество работ (см., например, [4] и цитированную там литературу). С численным моделированием влияния теплового движения электронов на процесс таких регулярных колебаний связана основная часть предлагаемой статьи.

Следует отметить, что несмотря на кажущуюся простоту и естественность учета газового давления, порождаемого тепловым движением электронов, этот эффект качественно меняет динамику плазмы. Поясним это подробнее, следуя [5].

Пусть плазма с заданной плотностью и температурой находится в области пространства, где магнитное поле отсутствует. Предположим, что из некоторого объема внутри плазмы удалась часть электронов, а массивные ионы остались на месте. Квазинейтральность локально нарушится, возникнет объемный заряд, под действием которого электроны устремятся в исходное положение, набирая кинетическую энергию. Дальнейшее развитие естественно: возникнут электронные колебания около положения равновесия. Частота таких колебаний, называемая обычно *ленгмюровской*, определяется выражением

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right)^{1/2},$$

где n_0 — значение невозмущенной электронной плотности, e и m — заряд и масса электрона. Формула плазменной частоты ω_p выводится при малых возмущениях и в предположении, что температура достаточно низкая и тепловой энергией электронов можно пренебречь. С точки зрения волновых процессов в данной ситуации между частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} связь отсутствует, поэтому групповая скорость равна нулю, т.е. переноса энергии в пространстве не происходит. Иными словами, электрические

¹ Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., 13, стр. 2, 125412, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: frolov@ihed.ras.ru

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; профессор, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

силы, возникшие при смещении электронов, остаются “спрятанными” внутри области первоначального возмущения. Размеры этой области произвольны.

Ситуация радикально меняется, как только учитывается тепловое движение электронов. Теперь смещение электронов вызывает не только нарушение квазинейтральности, но и появление градиента давления. В случае малых возмущений линеаризация описывающей модели приводит к волновому уравнению типа Клейна–Гордона [6], для которого можно установить связь между частотой и волновым вектором в бегущей волне. Закон дисперсии плазменных волн в данном случае имеет вид [5, 7]

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\nu_e}{m} \mathbf{k}^2,$$

где коэффициент ν_e линейно зависит от температуры электронов T_e . С увеличением температуры, т.е. электронного давления, возрастает частота: градиент давления, подобно электростатическим силам, заставляет переходить электроны от мест с более высокой к местам с более низкой концентрацией. При $T_e \rightarrow 0$ частота ω стремится к плазменной частоте ω_p ; аналогично влияние давления исчезает при больших длинах волн, т.е. при малых значениях \mathbf{k} .

Содержание настоящей работы ориентировано на исследование пространственно-временной структуры плазменной волны, которая формируется под воздействием теплового движения электронов из колебаний большой амплитуды.

Статья имеет следующую структуру. Сначала приведена постановка задачи в эйлеровых переменных, включая начальные и асимптотические граничные условия, необходимые для описания временной эволюции плазменных колебаний и волн, порождаемых мощным коротким лазерным импульсом. В завершение постановки описано свойство инвариантности электронной плотности, связанное с нормировкой начальных условий и пространственных масштабов. Затем приведена конечно-разностная схема расщепления по физическим процессам, основанная на так называемой схеме “с перешагиванием по времени” (leapfrog) [8] и предназначенная для численного моделирования динамики плазмы. Результаты расчетов демонстрируют, что увеличение температуры плазмы качественно меняет пространственную структуру волны. Амплитуда возмущений плотности в начале координат монотонно затухает, а внеосевые амплитуды растут до некоторого предельного значения и затем затухают. Далее изложены результаты аналитического рассмотрения сформулированной задачи при использовании лагранжевых переменных в режиме малых возмущений [9]. Они находятся в хорошем согласии с результатами численных экспериментов. В заключении систематизированы результаты проведенных исследований.

1. Постановка задачи. Будем считать плазму релятивистской электронной жидкостью, пренебрегая столкновительными и рекомбинационными эффектами, а также движением ионов. Тогда систему описывающих ее гидродинамических уравнений совместно с уравнениями Максвелла в векторной форме [5, 7] можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{p} &= e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) - \frac{1}{n} \operatorname{grad} q, \\ \gamma &= \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2 c^2}}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} e n \mathbf{v} + \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \end{aligned} \tag{1}$$

где c — скорость света; n , \mathbf{p} и \mathbf{v} — концентрация, импульс и скорость электронов; γ — лоренцевский фактор; \mathbf{E} и \mathbf{B} — векторы электрического и магнитного полей. Обозначения e и m для заряда и массы электрона были введены выше, заряд электрона здесь имеет отрицательный знак: $e < 0$.

Обратим внимание на наличие в уравнении для импульса слагаемого $\frac{1}{n} \operatorname{grad} q$, характеризующего тепловое движение электронов. В данном случае для замыкания системы (1) необходимо описать зависимость газового давления электронов q от их плотности n . Если с этой целью воспользоваться кинетическим уравнением Власова [10], то формулу для давления в случае постоянной температуры плазмы можно представить в виде

$$q = 3kT_e n \equiv \nu_e n,$$

где T_e — температура электронов и k — постоянная Больцмана [5, 7]. Другая предельная ситуация — адиабатический процесс, т.е. приближение теплоизолированности плазмы от окружающей среды, с соответствующей формулой для газового давления рассматривался в [1].

Система уравнений (1) является одной из простейших моделей плазмы, которую при $q = 0$ часто называют *уравнениями гидродинамики “холодной” плазмы*; она хорошо известна и достаточно подробно описана в учебниках и монографиях [11–13].

1.1. Постановка в эйлеровых переменных. С целью проведения анализа качественного воздействия теплового движения электронов на плоские одномерные колебания базовые уравнения (1) можно существенно упростить.

Будем обозначать независимые переменные в декартовой системе координат обычным образом через (x, y, z) . Пренебрежем релятивистским эффектом, т.е. положим $\gamma \equiv 1$, и применим допущения, что

- решение определяется только x -компонентами вектор-функций \mathbf{p} , \mathbf{v} и \mathbf{E} ;
- зависимость в этих функциях от переменных y и z отсутствует, т.е. $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$.

Тогда из системы (1) после исключения импульса \mathbf{p} и лоренцевского фактора γ будем иметь нерелятивистские уравнения:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n v_x) = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -4\pi e n v_x, \quad m \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] = e E_x - \frac{\nu_e}{n} \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (2)$$

Введем безразмерные величины

$$\rho = k_p x, \quad \theta = \omega_p t, \quad V = \frac{v_x}{c}, \quad E = -\frac{e E_x}{m c \omega_p}, \quad N = \frac{n}{n_0}, \quad \nu = \frac{\nu_e}{m c^2},$$

где $k_p = \omega_p/c$, а величины ω_p и n_0 были определены выше. В новых переменных система (2) примет вид

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \rho}(N V) = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = N V, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} + E + V \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\nu}{N} \frac{\partial N}{\partial \rho} = 0. \quad (3)$$

Из первых двух уравнений (3) следует $\frac{\partial}{\partial \theta} \left[N + \frac{\partial}{\partial \rho} E \right] = 0$.

Это соотношение справедливо как при отсутствии плазменных колебаний ($N \equiv 1$, $E \equiv 0$), так и при их наличии. Поэтому отсюда имеем более простое выражение для электронной плотности:

$$N = 1 - \frac{\partial E}{\partial \rho}. \quad (4)$$

После использования (4) в соотношениях (3) приходим к уравнениям, описывающим плоские одномерные плазменные волны, которые формируются из колебаний вследствие учета теплового движения электронов:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + E + V \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\nu}{N} \frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} - V + V \frac{\partial E}{\partial \rho} = 0, \quad N = 1 - \frac{\partial E}{\partial \rho}. \quad (5)$$

Рассмотрим возбуждение плазменных волн в окрестности начала пространственной координаты, т.е. вблизи прямой $\rho = 0$. Положим, что скорость электронов в начальный момент времени ($\theta = 0$) равна нулю

$$V(\rho, \theta = 0) = 0, \quad (6)$$

и будем считать, что волны инициируются электрическим полем следующего вида:

$$E(\rho, \theta = 0) = \left(\frac{a_*}{\rho_*} \right)^2 \rho \exp \left\{ -2 \frac{\rho^2}{\rho_*^2} \right\}, \quad (7)$$

где параметры ρ_* и a_* характеризуют масштаб области локализации и максимальную величину

$$E_{\max} = \frac{a_*^2}{\rho_* 2\sqrt{e}} \approx 0.3 \frac{a_*^2}{\rho_*}$$

электрического поля (7) соответственно. Вид функции (7) выбран из соображений, что подобные волны могут возбуждаться в разреженной плазме ($\omega_l \gg \omega_p$) лазерным импульсом с частотой ω_l при его фокусировке в линию (этого можно добиться при использовании цилиндрической линзы).

Заметим, что на больших расстояниях от прямой $\rho = 0$, в силу начального условия (7), плазменные волны не возбуждаются. Поэтому будем считать, что выполнены следующие условия:

$$V(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0, \quad E(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, будем изучать в верхней полуплоскости $\{(\rho, \theta) : -\infty < \rho < \infty, \theta > 0\}$ решения системы (5), определяемые начальными и граничными условиями (6)–(8).

1.2. Свойство инвариантности электронной плотности. Запишем решение (5) в виде $V = \sigma U$, $E = \sigma G$, где σ — вещественный параметр. Если при этом сделать замену независимой переменной $\rho = \sigma x$, то система уравнений (5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} + G + U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\nu}{\sigma^2 N} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \theta} - U + U \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad N = 1 - \frac{\partial G}{\partial x}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что при $\nu = 0$ новые функции U и G в переменных θ и x удовлетворяют таким же уравнениям, как функции V и E в переменных θ и ρ . Кроме того, если в начальном условии (7) заменить величины a_* и ρ_* на σa_* и $\sigma \rho_*$ соответственно, то при том же преобразовании координаты $\rho = \sigma x$ получим

$$E(\rho, \theta = 0) = \sigma G(x, \theta = 0).$$

Вышесказанное означает следующее специфическое свойство инвариантности плотности N : одновременное пропорциональное изменение независимой переменной ρ и параметров a_* , ρ_* влечет аналогичное изменение функций V , E ; с другой стороны, отмеченные изменения $\rho = \sigma x$, $E = \sigma G$ не меняют значений электронной плотности N в переменных θ , x , что следует из формулы (4). В частности, отсюда следует, что за счет подбора параметров задачи a_* и ρ_* фиксированные по амплитуде значения плотности могут достигаться при сколь угодно малых (или сколь угодно больших!) амплитудах колебаний скорости и электрического поля. Впервые это свойство было отмечено в работе [14], где оно нашло применение при наблюдении за опрокидыванием плазменных релятивистских колебаний.

Возвращаясь к уравнениям (9), отметим, что при учете теплового движения электронов для сохранения свойства инвариантности кроме указанных выше преобразований функций и пространственной координаты следует проводить дополнительное масштабирование коэффициента ν , т.е. заменять его на величину $\sigma^2 \nu$. В свою очередь, это означает, что при увеличении (уменьшении) области локализации колебаний в σ раз скорость распространения плазменной волны должна быть увеличена (уменьшена) с тем же коэффициентом с целью сохранения пространственно-временной структуры электронной плотности.

2. Разностная схема для моделирования. При проведении численных экспериментов вместо верхней полуплоскости расчетная область берется в виде полуполосы $\{(\rho, \theta) : -d \leq \rho \leq d, \theta > 0\}$ с параметром d . Различные искусственные граничные условия для рассматриваемой задачи при $\nu = 0$ обсуждались в работе [15]. В случае $\nu \neq 0$ для корректного сокращения размеров исходной области следует использовать граничные условия из [16]. Однако при небольших значениях скорости распространения плазменной волны можно ограничиться обычным “обрезанием” области, т.е. в соответствии с рекомендациями [15] положить

$$E(x = \pm d, \theta) = 0, \quad V(x = \pm d, \theta) = 0,$$

если d достаточно велико. В частности, при $\nu = 0$ достаточно взять $d = 4.5\rho_*$, однако при моделировании динамики нелинейных плазменных волн ($\nu > 0$) требовалось дополнительное пространство — $d \approx 10\rho_*$, чтобы избежать эффектов отражения от искусственных границ.

С целью проведения численных экспериментов рассмотрим обобщение схемы расщепления из [14], учитывающее тепловое движение электронов. Приведем уравнения (5) к удобному виду

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + E + \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} - \frac{\nu}{N} \frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2} = 0, \quad \gamma = \frac{V^2}{2}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} - V + V \frac{\partial E}{\partial \rho} = 0, \quad N = 1 - \frac{\partial E}{\partial \rho}. \quad (10)$$

В системе (10) представлено взаимодействие двух физических процессов: распространение нелинейной плазменной волны, описываемой уравнением типа Клейна–Гордона, и пространственно-временной перенос функций скорости и электрического поля. В такой ситуации разумно рассмотреть стандартный подход расщепления по физическим процессам [17].

Отнесем к описанию процесса распространения нелинейной волны уравнения

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} + \tilde{E} - \frac{\nu}{N} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \rho^2} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \theta} - \tilde{V} = 0, \quad (11)$$

где за нелинейность отвечает множитель ν/N , а к описанию процесса переноса в пространстве и времени функций скорости и электрического поля уравнения

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \rho} = 0, \quad \bar{\gamma} = \frac{\bar{V}^2}{2}, \quad \frac{\partial \bar{E}}{\partial \theta} + \bar{V} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \rho} = 0. \quad (12)$$

В качестве основы для дискретизации по времени обеих систем применим обычную схему “с перешагиванием” [8]. Пусть τ — шаг по времени, тогда будем относить к “целым” моментам времени $\theta_j = j\tau$ ($j \geq 0$ — целое) величины E, \tilde{E}, \bar{E}, N , к “полуцелым” $\theta_{j\pm 1/2} = V, \tilde{V}, \bar{V}$, а также зависящую от скорости V функцию γ . Выбор соответствующего момента времени для значения функции будем обозначать верхним индексом. Для дискретизации по пространству будем использовать сетку с постоянным шагом h так, что $\rho_m = mh, -M \leq m \leq M, Mh = d$.

Запишем разностные уравнения, аппроксимирующие системы (11) и (12). Для первой из них получим

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{V}_m^{j+1/2} - \tilde{V}_m^{j-1/2}}{\tau} + \tilde{E}_m^j - \frac{\nu}{N_m^j} \left(\tilde{E}_{\bar{x},m}^j \right)_{\bar{x},m}, \quad \frac{\tilde{E}_m^{j+1} - \tilde{E}_m^j}{\tau} - \tilde{V}_m^{j+1/2} = 0, \\ \tilde{V}_m^{j-1/2} = \tilde{V}_m^{j+1/2}, \quad \tilde{E}_m^j = E_m^j, \quad -M+1 \leq m \leq M-1, \quad \tilde{V}_{-M}^{j+1/2} = \tilde{V}_M^{j+1/2} = \tilde{E}_{-M}^{j+1} = \tilde{E}_M^{j+1} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Дискретный аналог системы (12), т.е. схема типа Лакса–Вендроффа [18] для уравнения переноса скорости и схема с разностями “против потока” (upwind) [19] для уравнения переноса электрического поля, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}_m^{j+1/2} - \bar{V}_m^{j-1/2}}{\tau} + \bar{\gamma}_{\bar{x},m}^{j-1/2} = \frac{\tau}{2} \left(\bar{V}_{s,m}^{j-1/2} \bar{\gamma}_{\bar{x},m}^{j-1/2} \right)_{\bar{x},m}, \quad \bar{\gamma}_m^{j+1/2} = \frac{1}{2} \left(\bar{V}_m^{j+1/2} \right)^2, \\ \frac{\bar{E}_m^{j+1} - \bar{E}_m^j}{\tau} + \frac{\bar{V}_m^{j+1/2} - \sqrt{2\bar{\gamma}_m^{j+1/2}}}{2} \bar{E}_{\bar{x},m}^j + \frac{\bar{V}_m^{j+1/2} + \sqrt{2\bar{\gamma}_m^{j+1/2}}}{2} \bar{E}_{\bar{x},m}^j = 0, \\ \bar{V}_m^{j-1/2} = \bar{V}_m^{j+1/2}, \quad \bar{E}_m^j = \bar{E}_m^{j+1}, \quad -M+1 \leq m \leq M-1, \quad \bar{V}_{-M}^{j+1/2} = \bar{V}_M^{j+1/2} = \bar{E}_{-M}^{j+1} = \bar{E}_M^{j+1} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для разностей в (13), (14) использованы обозначения:

$$\begin{aligned} F_{\bar{x},m} &= (F_{m+1} - F_{m-1})/(2h) \text{ — центральная разность,} \\ F_{x,m} &= (F_{m+1} - F_m)/h \text{ и } F_{\bar{x},m} = (F_m - F_{m-1})/h \text{ — соответственно разности вперед и назад,} \\ F_{s,m} &= (F_{m+1} + F_m)/2. \end{aligned}$$

После вычислений по схеме (14) следует переопределить искомые функции на временном слое

$$V_m^{j+1/2} = \bar{V}_m^{j+1/2}, \quad E_m^{j+1} = \bar{E}_m^{j+1}, \quad -M \leq m \leq M,$$

и рассчитать значение электронной плотности по формуле

$$N_m^{j+1} = \begin{cases} 1 - \frac{E_m^{j+1} - E_{m-1}^{j+1}}{2h} & \text{при } -M+1 \leq m \leq M-1, \\ 1 & \text{при } m = \pm M. \end{cases} \quad (15)$$

На этом вычисления на j -м шаге по времени заканчиваются и можно переходить к следующему. Следует отметить, что начальные данные (6), (7) соответствуют $j = 0$, поэтому их следует отнести для V к слою с номером $-1/2$, а для E — с номером 0.

Сделаем замечания о предлагаемой схеме расщепления (13)–(15). Для каждой из вспомогательных задач (11), (12), за исключением уравнения переноса для функции электрического поля, при достаточной гладкости решения имеется аппроксимация порядка $O(\tau^2 + h^2)$. Для указанного уравнения переноса из (12) стандартная схема с разностями “против потока” [19] имеет аппроксимацию на решении порядка $O(\tau + h)$. В данном случае потеря порядка аппроксимации не является принципиальной, так как рассмотренное в разделе 1.2 свойство инвариантности электронной плотности порождает возможность за счет выбора параметра σ сделать погрешность сколь угодно малой. С другой стороны, присущие схеме с разностями “против потока” свойства сеточной вязкости и монотонности весьма полезны при расчетах волновых процессов. Кроме того, в линеаризованной постановке схема расщепления (13)–(15) по-прежнему имеет аппроксимацию на решении порядка $O(\tau^2 + h^2)$, а также условие устойчивости, полученное на основе спектрального признака [17, 18], вида $\tau = O(h)$. В результате можно добиться существенной экономии вычислительных ресурсов за счет более слабого условия устойчивости без потери порядка аппроксимации. Окончательный итог: формальный порядок аппроксимации нелинейной схемы расщепления имеет вид $O(\tau + h)$ при условии устойчивости $\tau = O(h)$; тестовые расчеты при $\tau \leq h$ иллюстрируют сходимость второго порядка относительно обоих параметров.

Дополнительно следует отметить, что схема расщепления (13)–(15) в оригинальной версии [14] позволяет моделировать “трудный” с вычислительной точки зрения эффект опрокидывания релятивистских

плазменных колебаний при использовании эйлеровых переменных. Альтернативные надежные алгоритмы базируются исключительно на основе лагранжевых переменных, что связано со спецификой указанного эффекта. Вышесказанное означает, что в рассматриваемой схеме имеется еще не полностью реализованный потенциал численного исследования более сложных задач.

3. Краткое описание численных экспериментов. В целях сохранения преемственности с результатами расчетов из работ [14, 20] зафиксируем значения параметров в начальном условии (7):

$$a_* = 3.105, \quad \rho_* = 4.5.$$

Выберем параметр d , характеризующий искусственную границу, равным 40. Тогда характерное значение параметра дискретизации по пространственной переменной, использовавшееся в расчетах, равно $h = 2d/(2M - 1) = 10^{-3}$. Шаг интегрирования по времени τ выбирался равным h , а в целях контроля точности регулярно проводились расчеты с сеточными параметрами в два раза меньшими, чем основные (рабочие).

Иллюстративные расчеты в основном направлены на изучение зависимости электронной плотности от параметра $\nu \geq 0$, характеризующего тепловое движение электронов.

Рассмотрим динамику плоских нерелятивистских колебаний (случай $\nu = 0$) при указанных выше параметрах a_* и ρ_* . На рис. 1 изображено изменение плотности электронов в зависимости от времени: максимальное значение плотности в расчетной области отражается сплошной линией, значение на оси симметрии области, т.е. при $\rho = 0$, — пунктирной линией. Графики практически совпадают; отличие имеется в окрестности моментов времени, кратных 2π . В полном соответствии с теорией [4] динамика колебаний имеет ярко выраженный 2π -периодический характер; при этом амплитуда осевых максимумов плотности значительно превышает амплитуду внеосевых максимумов. В целях более полной иллюстрации общей картины колебаний на рис. 2 и рис. 3 приведены пространственные распределения плотности электронов в моменты времени, соответствующие формированию как осевых, так и внеосевых максимумов. Таким образом, без учета теплового движения электронов динамика колебаний имеет простой, можно сказать “учебный”, характер, а именно: через каждую половину периода пространственные распределения функций скорости, электрического поля и плотности электронов регулярно меняют друг друга, т.е. график на рис. 2 трансформируется в график на рис. 3, и этот процесс повторяется бесконечно без изменения области локализации колебаний.

Следует отметить, что такая ситуация принципиально отличается от сценария релятивистских колебаний, достаточно подробно описанного в работе [14]. Влияние релятивизма проявляется в формировании внеосевого максимума плотности, который быстро нарастает во времени и через некоторое количество периодов приводит к сингулярности плотности, т.е. к опрокидыванию колебаний. С целью сравнения нерелятивистских и релятивистских колебаний на рис. 4 приведен аналог рис. 1, т.е. изменение максимума по расчетной области плотности электронов и динамика плотности на оси симметрии области. Параметры расчетного варианта полностью совпадают с приведенными выше.

Однако напомним, что в настоящей работе первоочередной интерес представляет влияние теплового движения электронов именно на регулярные нерелятивистские колебания, изображенные на рис. 1–3. Поэтому рассмотрим рис. 5, на котором, аналогично рис. 1, приведены графики максимума плотности по области и на ее оси симметрии в случае “небольшой” температуры плазмы (для значения $\nu = 0.01$). Здесь амплитуды осевых максимумов плотности монотонно убывают во времени, а амплитуды внеосевых максимумов монотонно возрастают. Однако влияние теплового движения электронов пока не очень велико: как и при отсутствии газового давления ($\nu = 0$), наиболее заметные возмущения электронной плотности сосредоточены в окрестности прямой $\rho = 0$. Это означает, что волновое движение пусть медленно, но уже формируется и становится заметным, хотя колебательное движение в окрестности прямой $\rho = 0$ еще не разрушилось и по-прежнему доминирует над волновым, т.е. амплитуда осевых колебаний преобладает над амплитудой бегущей волны.

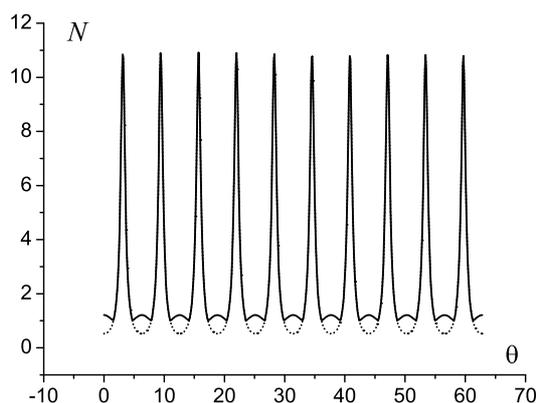


Рис. 1. Динамика плотности холодной плазмы ($\nu = 0$): сплошная линия — максимум по области, пунктирная линия — ось симметрии

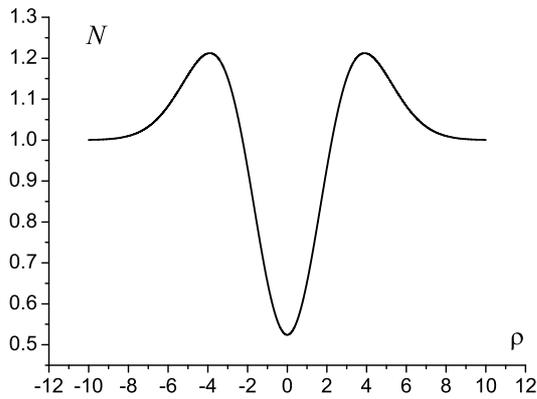


Рис. 2. Пространственное распределение плотности холодной плазмы ($\nu = 0$) при $\theta = 2\pi k$, $k = 0, 1, \dots$

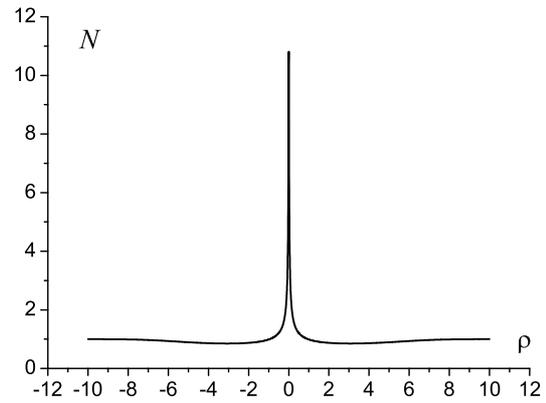


Рис. 3. Пространственное распределение плотности холодной плазмы ($\nu = 0$) при $\theta = \pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, \dots$

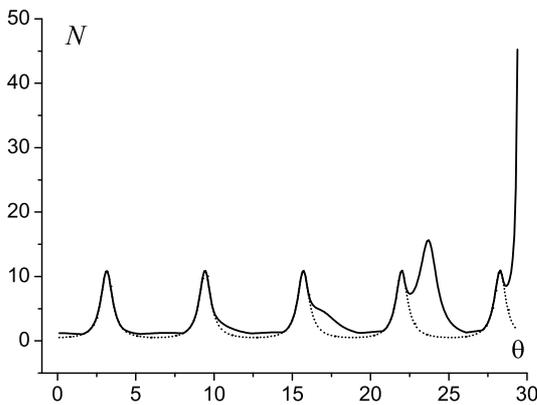


Рис. 4. Динамика плотности холодной плазмы ($\nu = 0$) при релятивистских колебаниях: сплошная линия — максимум по области, пунктирная линия — ось симметрии

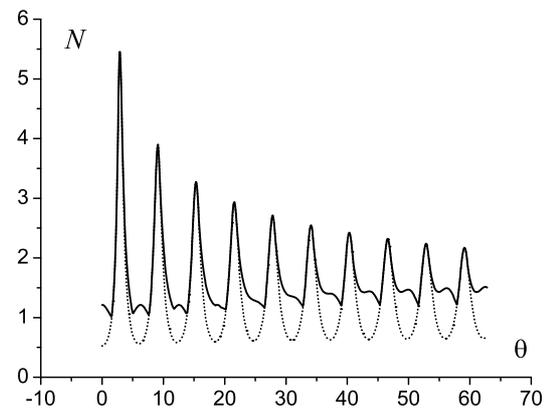


Рис. 5. Динамика плотности плазмы при $\nu = 0.01$: сплошная линия — максимум по области, пунктирная линия — ось симметрии

Рассмотрим рис. 6, который имеет аналогичный смысл, но соответствует увеличению температуры плазмы ($\nu = 0.1$). Он иллюстрирует процесс формирования волны, доминирующей над колебаниями в окрестности начала координат. За первые три-четыре периода амплитуда волны сначала уравнивается с амплитудой колебаний, а затем начинает устойчиво, но на немного превосходить ее. При больших временах хорошо заметно распространение волны с амплитудой, примерно в полтора раза превышающей амплитуду колебаний в окрестности начала координат.

Наконец, на рис. 7 приведена иллюстрация дальнейшего увеличения температуры ($\nu = 0.2$). На нем легко видеть, что процесс оттока энергии из первоначально локализованной области колебаний ускоряется. Плазменная волна быстро формируется и выносит энергию из приосевой области, т.е. окрестности начала координат. На рис. 7 амплитуда бегущей волны заметно доминирует над амплитудой колебаний на оси симметрии области.

Сделаем замечание по поводу описанного в разделе 1.2 свойства инвариантности электронной плотности. Например, если взять $\sigma = 2$ и провести соответствующее масштабирование

$$a_* \rightarrow \sigma a_*, \quad \rho_* \rightarrow \sigma \rho_*, \quad \nu \rightarrow \sigma^2 \nu$$

и расчеты, то при $\nu = 0.2$ рис. 7 не изменится. С другой стороны, если при том же значении σ значения a_* и ρ_* заменить, как выше, а значение ν заменить только на $\sigma \nu$, то в полном соответствии с теорией рис. 9 “превратится” в рис. 6.

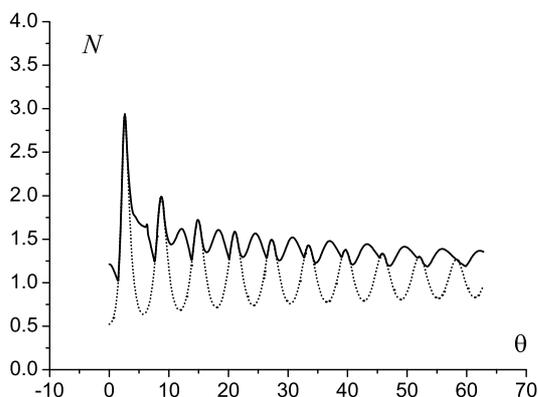


Рис. 6. Динамика плотности плазмы при $\nu = 0.1$: сплошная линия — максимум по области, пунктирная линия — ось симметрии

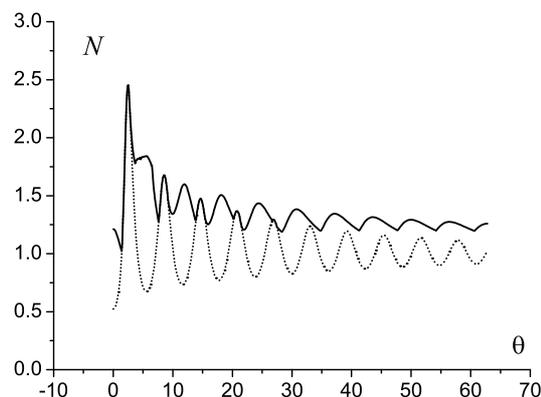


Рис. 7. Динамика плотности плазмы при $\nu = 0.2$: сплошная линия — максимум по области, пунктирная линия — ось симметрии

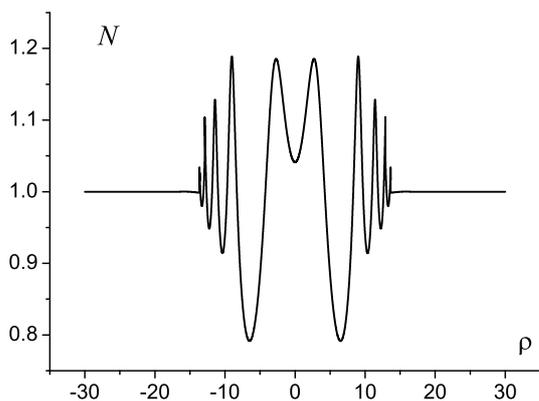


Рис. 8. Пространственное распределение плотности теплой плазмы ($\nu = 0.2$) при $\theta = 9\pi$

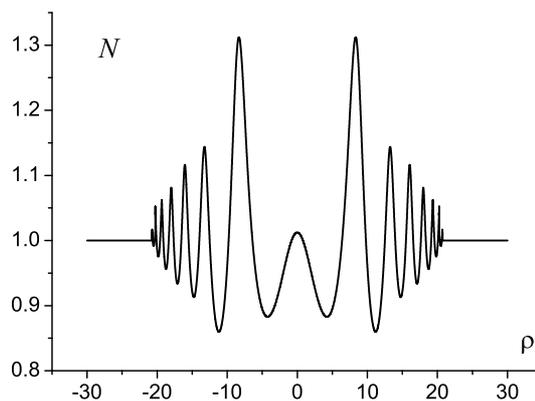


Рис. 9. Пространственное распределение плотности теплой плазмы ($\nu = 0.2$) при $\theta = 14\pi$

На рис. 8 и 9 в качестве характерных примеров изображены пространственные распределения электронной плотности в моменты времени $\theta = 9\pi$ и $\theta = 14\pi$ соответственно. На них хорошо заметно, что плазменная волна распространяется в обе стороны от оси симметрии области, вынося энергию из первоначальной области локализации колебаний.

Таким образом, из проведенных численных экспериментов можно сделать вывод, что влияние теплового движения электронов на плазменные колебания заключается в формировании из колебаний бегущих плазменных волн. Причем увеличение температуры плазмы этот процесс ускоряет. В результате плазменная волна выносит энергию из первоначальной области колебаний, что приводит к значительному уменьшению их амплитуды.

4. Теория в режиме малых возмущений. Представленная система уравнений (5) позволяет аналитически проанализировать траектории отдельных частиц и распределение максимумов электронной плотности в случае малых возмущений. С этой целью удобно воспользоваться лагранжевыми переменными. Напомним, что функция $R(\rho_0, \theta)$, определяющая смещение частицы с лагранжевой координатой ρ_0 так, что

$$\rho(\rho_0, \theta) = \rho_0 + R(\rho_0, \theta), \tag{16}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dR(\rho_0, \theta)}{d\theta} = V(\rho_0, \theta). \tag{17}$$

Запишем уравнение для функции электрического поля из (5) в следующем виде:

$$\frac{dE(\rho, \theta)}{d\theta} = V(\rho, \theta), \quad (18)$$

где $d/d\theta = \partial/\partial\theta + V\partial/\partial\rho$ — полная производная по времени. Из соотношений (16)–(18) следует связь электрического поля со смещением частиц:

$$E(\rho, \theta) \equiv E(\rho_0 + R(\rho_0, \theta), \theta) = R(\rho_0, \theta). \quad (19)$$

При этом плотность электронов определяется через функцию смещения частиц следующей формулой:

$$N(\rho_0, \theta) = \frac{1}{1 + \frac{\partial}{\partial\rho_0} R(\rho_0, \theta)}, \quad (20)$$

как это следует из соотношений (4) и (19). В режиме малых возмущений, т.е. когда справедливо условие малого отклонения частиц $|R(\rho_0, \theta)| \ll \min\{1, |\rho_0|\}$, из системы уравнений (5) следует одно уравнение

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1\right)R(\rho_0, \theta) - \nu \frac{\partial^2}{\partial\rho_0^2} R(\rho_0, \theta) = 0. \quad (21)$$

Обратим внимание, что здесь слагаемое с коэффициентом ν линейризовано относительно функции смещения.

Решение уравнения (21) будем искать в виде

$$R(\rho_0, \theta) = \frac{1}{2} R_1(\rho_0, \theta) \exp[-i\theta] + c.c., \quad (22)$$

где $R_1(\rho_0, \theta)$ — амплитуда смещения электронов, медленно меняющаяся во времени за период колебаний, а аббревиатура “с.с.” обозначает “комплексно сопряженные слагаемые”.

С учетом представления (22) из (21) получим “укороченное” (пренебрегаем малой второй производной $R_1(\rho_0, \theta)$ по времени) уравнение для амплитуды смещения:

$$i \frac{d}{d\theta} R_1(\rho_0, \theta) + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial\rho_0^2} R_1(\rho_0, \theta) = 0. \quad (23)$$

Используя начальное условие (7) для амплитуды смещения

$$R_1(\rho_0, \theta = 0) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \rho_0 \exp\left\{-2 \frac{\rho_0^2}{\rho_*^2}\right\},$$

находим решение уравнения (23):

$$R_1(\rho_0, \theta) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \frac{\rho_0}{(1 + 4i\nu\theta/\rho_*^2)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{2\rho_0^2}{\rho_*^2 + 4i\nu\theta}\right\}. \quad (24)$$

С учетом (22), (24) смещение электронов в плазменной волне запишем как

$$R(\rho_0, \theta) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho_0}{(1 + 4i\nu\theta/\rho_*^2)^{3/2}} \exp\left(-i\theta - \frac{2\rho_0^2}{\rho_*^2 + 4i\nu\theta}\right) \right\}. \quad (25)$$

После несложных преобразований формулу (25) можно представить в следующем виде:

$$R(\rho_0, \theta) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \frac{\rho_0}{[1 + (4\nu\theta/\rho_*^2)^2]^{3/4}} \exp\left[-\frac{2\rho_0^2\rho_*^2}{\rho_*^4 + (4\nu\theta)^2}\right] \cos[\varphi(\rho_0, \theta)],$$

где функция $\varphi(\rho_0, \theta)$ записывается через вспомогательный аргумент обычным образом:

$$\varphi(\rho_0, \theta) = \theta + \frac{3}{2} \arcsin \left[\frac{4\nu\theta}{\sqrt{\rho_*^4 + (4\nu\theta)^2}} \right] - \frac{8\rho_0^2\nu\theta}{\rho_*^4 + (4\nu\theta)^2}. \quad (26)$$

С учетом полученного выражения для смещения $R(\rho_0, \theta)$ плотность электронов (20) можно записать как

$$N(\rho_0, \theta) = \frac{1}{1 + A(\rho_0, \theta) \cos[\alpha(\rho_0, \theta)]}, \quad (27)$$

где

$$A(\rho_0, \theta) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \frac{1}{[1 + (4\nu\theta/\rho_*^2)]^{3/4}} \exp\left[-\frac{2\rho_0^2\rho_*^2}{\rho_*^4 + (4\nu\theta)^2}\right] \sqrt{\frac{(\rho_*^2 - 4\rho_0^2)^2 + (4\nu\theta)^2}{\rho_*^4 + (4\nu\theta)^2}}, \quad (28)$$

а аргумент у функции \cos в знаменателе (27) выражается через функцию $\varphi(\rho_0, \theta)$ из (26) и вспомогательный аргумент:

$$\alpha(\rho_0, \theta) = \varphi(\rho_0, \theta) - \arcsin\left[\frac{16\rho_0^2\nu\theta}{\sqrt{[\rho_*^4 + (4\nu\theta)^2][(\rho_*^2 - 4\rho_0^2)^2 + (4\nu\theta)^2]}}\right]. \quad (29)$$

Из формулы (27) следует, что максимальное значение плотности электронов равно

$$N_{\max}(\rho_0, \theta) = \frac{1}{1 - |A_{\max, \min}(\rho_0, \theta)|} \quad (30)$$

при $\alpha = \pi, 3\pi, \dots$ в случае $A_{\max}(\rho_0, \theta) > 0$ или $\alpha = 0, 2\pi, \dots$ для $A_{\min}(\rho_0, \theta) < 0$. Вычисляя производную от функции $A(\rho_0, \theta)$ по пространственной координате и приравняв ее к нулю, получим следующее уравнение для определения положения максимумов в пространстве:

$$\rho_0 \left\{ \rho_*^2 [(\rho_*^2 - 4\rho_0^2)^2 + (4\nu\theta)^2] + 2(\rho_*^2 - 4\rho_0^2) [\rho_*^4 + (4\nu\theta)^2] \right\} = 0. \quad (31)$$

Решению $\rho_0 = 0$ уравнения (31) соответствуют максимумы плотности, расположенные на оси симметрии области при $\alpha = \pi, 3\pi, \dots$:

$$N_{\max}^{\text{axis}}(\rho_0, \theta) = \frac{1}{1 - \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \frac{1}{[1 + (4\nu\theta/\rho_*^2)]^{3/4}}}. \quad (32)$$

Положению максимумов плотности вне оси симметрии соответствует следующее решение уравнения (31):

$$\rho_0^2 = \frac{\rho_*^2}{4} + \frac{\rho_*^4 + (4\nu\theta)^2}{4\rho_*^2} + \frac{1}{4} \sqrt{\left[\frac{\rho_*^4 + (4\nu\theta)^2}{\rho_*^2}\right]^2 - (4\nu\theta)^2}. \quad (33)$$

Рассмотрим сначала случай, когда выполняется условие

$$\rho_*^2 \gg 4\nu\theta. \quad (34)$$

Тогда из формул (28)–(30), (33) находим координату внеосевых максимумов ($\alpha = 0, 2\pi, \dots$) плотности $\rho_0^2 = (3/4)\rho_*^2$ и их величину

$$N_{\max}^{\text{off-axis}}(\rho_0, \theta) = \frac{1}{1 - \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \frac{2}{e^{3/2}}} \approx \frac{1}{1 - 0.446 \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2}. \quad (35)$$

Сравнивая величины максимумов (32), (35) в случае выполнения условия (34), заключаем, что при малых временах величина осевого максимума больше, чем внеосевого максимума. Следует отметить, что в пределе холодной плазмы ($\nu = 0$) неравенство (34) заведомо выполняется. Отсюда следует вывод, что плотность электронов в линейных плазменных колебаниях имеет осевые и внеосевые максимумы, величина которых при $\nu = 0$ определяется формулами (32) и (35). Рассмотрим обратный предельный случай, когда выполнено неравенство

$$\rho_*^2 \ll 4\nu\theta. \quad (36)$$

С учетом условия (36) из формулы (32) получим зависимость величины осевого максимума от времени

$$N_{\max}^{\text{axis}}(\rho_0, \theta) = \frac{1}{1 - \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \left(\frac{\rho_*^2}{4\nu\theta}\right)^{3/2}}. \quad (37)$$

Положение внеосевого максимума в пространстве находим из формулы (33) с учетом неравенства (36), т.е.

$$\rho_0^2 = \frac{(4\nu\theta)^2}{2\rho_*^2}. \quad (38)$$

Из формулы (38) следует, что координата внеосевого максимума плотности с течением времени может удалиться от оси колебаний на значительное расстояние. При этом величина внеосевого максимума плотности как функция времени в соответствии с формулами (28)–(30), (38) имеет вид

$$N_{\max}^{\text{off-axis}}(\rho_0, \theta) = \frac{1}{1 - \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \frac{2}{e} \left(\frac{\rho_*^2}{4\nu\theta}\right)^{1/2}}. \quad (39)$$

Из формул (37), (39) следует, что с течением времени величины как осевого, так и внеосевого максимумов уменьшаются. При этом спадание внеосевого максимума происходит несколько медленнее. Это приводит к тому, что с течением времени величина внеосевого максимума начинает превышать величину осевого максимума, как это следует из сравнения формул (37) и (39). Таким образом, аналитическая эволюция максимумов плотности электронов в плазменных волнах хорошо согласуется с результатами численных расчетов, представленных на рис. 5–7.

Заключение. В настоящей статье численно и аналитически исследовано влияние теплового движения электронов на процесс нерелятивистских плазменных колебаний. Если тепловым движением пренебречь, то в соответствии с начальными условиями колебания сосредоточены в окрестности начала координат и продолжают там бесконечно долго. В случае учета теплового движения колебания трансформируются в бегущую волну. При этом амплитуда волны постепенно выравнивается с амплитудой колебаний, а в дальнейшем — превосходит ее. С ростом температуры ускоряется вынос энергии из первоначальной области колебаний, что проявляется в быстром росте амплитуды бегущей волны.

Для численного моделирования описанного сценария трансформации построена схема расщепления по физическим процессам на основе метода конечных разностей в эйлеровых переменных. Тестирование схемы проводилось в рамках уравнений холодной плазмы применительно к эффекту опрокидывания релятивистских электронных колебаний.

На основе уравнений движения отдельных частиц в рамках лагранжевого описания плазмы проведено аналитическое исследование динамики колебаний и бегущих волн. Получены распределения максимумов электронной плотности в зависимости от температуры плазмы. Результаты, полученные в приближении малых возмущений, находятся в хорошем соответствии с численными экспериментами.

Исследования настоящей работы могут быть полезны при обсуждении различных физических эффектов, связанных с плазменными колебаниями и волнами. Например, можно предположить, что увеличение температуры плазмы может препятствовать проявлению эффекта опрокидывания электронных колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davidson R.C. Methods in nonlinear plasma theory. New York: Academic Press, 1972.
2. Ахизер А.И., Половин Р.В. К теории волновых движений электронной плазмы // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1956. **30**, № 5. 915–928.
3. Bulanov S.V., Esirkepov T.Zh., Kando M., Koga J.K., Pirozhkov A.S., Nakamura T., Bulanov S.S., Schroeder C.B., Esarey E., Califano F., Pegoraro F. On the breaking of a plasma wave in a thermal plasma. I. The structure of the density singularity // Physics of Plasmas. 2012. **19**. doi: 10.1063/1.4764052.
4. Чижонков Е.В. К моделированию электронных колебаний в плазменном слое // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2011. **51**, № 3. 456–469.
5. Лукьянов С.Ю. Горячая плазма и управляемый ядерный синтез. М.: Наука, 1975.
6. Бете Г. Квантовая механика. М.: Мир, 1965.
7. Кролл Н., Трайвелтис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.
8. Hockney R.W., Eastwood J.W. Computer simulation using particles. New York: McGraw-Hill, 1981.

9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
10. Силлин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971.
11. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.
12. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
13. Силлин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2012.
14. Фролов А.А., Чижонков Е.В. О релятивистском опрокидывании электронных колебаний в плазменном слое // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 537–548.
15. Чижонков Е.В. Искусственные граничные условия для численного моделирования электронных колебаний в плазме // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 65–79.
16. Майков А.Р. О приближенных условиях на открытой границе для уравнения Клейна–Гордона и их эффективности на больших временных интервалах // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 139–148.
17. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
18. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990.
19. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
20. Фролов А.А., Чижонков Е.В. Влияние соударений электронов на опрокидывание плазменных колебаний // Физика плазмы. 2018. **44**, № 4. 347–354.

Поступила в редакцию
04.04.2018

Numerical Modeling of Plasma Oscillations with Consideration of Electron Thermal Motion

A. A. Frolov¹ and E. V. Chizhonkov²

¹ Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences; ulitsa Izhorskaya 13, Moscow, 125412, Russia; Dr. Sci., Senior Scientist, e-mail: frolov@ihed.ras.ru

² Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Received April 4, 2018

Abstract: The effect of electron thermal motion on plane nonrelativistic nonlinear plasma oscillations is studied. It is shown numerically and analytically that when the thermal motion is taken into account, the oscillations are transformed to a traveling wave. At the same time, the wave amplitude grows with increasing temperature, which promotes the removal of energy from the initial region of oscillation localization. A finite-difference scheme is proposed for the numerical simulation on the basis of Eulerian variables. When using the Lagrangian variables to approximate small perturbations, the distributions of electron density maxima are obtained depending on the plasma temperature. The obtained analytical results are in good agreement with numerical experiments.

Keywords: numerical simulation, finite-difference method, plasma oscillations, traveling waves, perturbation method.

References

1. R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (Academic, New York, 1972).
2. A. I. Akhiezer and R. V. Polovin, “Theory of Wave Motion of an Electron Plasma,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **30** (5), 915–928 (1956) [*J. Exp. Theor. Phys.* **3**, 696–705 (1956)].
3. S. V. Bulanov, T. Zh. Esirkepov, M. Kando, et al., “On the Breaking of a Plasma Wave in a Thermal Plasma. I. The Structure of the Density Singularity,” *Physics of Plasmas*. **19** (2012). doi: 10.1063/1.4764052.
4. E. V. Chizhonkov, “To the Question of Large-Amplitude Electron Oscillations in a Plasma Slab,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **51** (3), 456–469 (2011) [*Comput. Math. Math. Phys.* **51** (3), 423–434 (2011)].

5. S. Yu. Luk'yanov, *Hot Plasma and Controlled Nuclear Fusion* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].
6. H. A. Bethe, *Intermediate Quantum Mechanics* (Benjamin, New York 1964; Mir, Moscow, 1965).
7. N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (McGraw-Hill, New York, 1973; Mir, Moscow, 1975).
8. R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles* (McGraw-Hill, New York, 1981).
9. N. N. Bogoliubov and Y. A. Mitropol'sky, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations* (Nauka, Moscow, 1974; Gordon and Breach, New York, 1961).
10. V. P. Silin, *Introduction to Kinetic Theory of Gases* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].
11. A. F. Aleksandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics* (Springer, New York, 1984; Vysshaya Shkola, Moscow, 1988).
12. V. L. Ginzburg and A. A. Rukhadze, *Waves in Magnetoactive Plasma* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].
13. V. P. Silin and A. A. Rukhadze, *Electromagnetic Properties of Plasma and Plasma-Like Media* (Librokom, Moscow, 2012) [in Russian].
14. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, "Relativistic Breaking Effect of Electron Oscillations in a Plasma Slab," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 537–548 (2014).
15. E. V. Chizhonkov, "Artificial Boundary Conditions for Numerical Modeling of Electron Oscillations in Plasma," *Vychisl. Metody Programm.* **18**, 65–79 (2017).
16. A. R. Maikov, "On Approximate Open Boundary Conditions and Their Performance over Long Time Intervals," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 139–148 (2012).
17. S. K. Godunov and V. S. Ryaben'kii, *Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1973; North Holland, Amsterdam, 1987).
18. D. A. Anderson, J. C. Tannehill, and R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (Hemisphere, New York, 1984; Mir, Moscow, 1990).
19. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2001).
20. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, "Influence of Electron Collisions on the Breaking of Plasma Oscillations," *Fiz. Plazmy* **44** (4), 347–354 (2018) [*Plasma Phys. Rep.* **44** (4), 398–404 (2018)].