УДК 519.633.6 doi 10.26089/NumMet.v19r217

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ КЛАССА КАБАРЕ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

А. В. Соловьев[1], А. В. Данилин[2]

Предложена новая разностная схема класса Кабаре повышенного порядка точности для решения скалярного уравнения переноса. Порядок аппроксимации разностной схемы равен четырем. Построено балансно-характеристическое представление схемы и приведены дисперсионные свойства. Для предложенной разностной схемы в сравнении с классической схемой Кабаре рассмотрены примеры решения уравнения переноса для гладкого и разрывного профиля.

Ключевые слова: схема Кабаре, уравнение переноса, повышенный порядок аппроксимации, точность.

1. Введение. Разностная схема Кабаре для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const} > 0, \tag{1}$$

впервые была описана в работах [1, 2], причем в них было использовано так называемое узловое представление схемы

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^{n}}{\tau} + \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau}\right) + c\,\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} = 0.$$

В таком представлении эта схема совпадает со схемой, исследованной в числе прочих в работе Айзерлиса [3]. Однако в такой записи попытки обобщения разностной схемы на многомерный случай, а также на случай переменного шага по времени не были успешными.

Схема Кабаре для одномерного уравнения переноса в виде двухслойной трехэтапной балансно-характеристической схемы исследована, например, в [4, 5]. В таком виде она определяется на двух семействах переменных — консервативных, относящихся к центрам ячеек пространственной сетки, и потоковых, относящихся к узлам пространственной сетки. Эволюция консервативных переменных определяется балансным соотношением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_k F_k = 0,$$

в которое входит сумма потоков через грани (в одномерном случае — через узлы) ячейки. Для определения потоковой переменной на грани (узле) сетки применяется характеристический подход, согласно которому строится характеристика, входящая в узел, и на этой характеристике определяется значение инварианта, соответствующее решаемой задаче.

Обозначая узловые переменные целочисленными индексами, а консервативные — дробными, схему Кабаре можно записать в следующем виде.

Предварительная балансная фаза:

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n}}{\tau/2} + c\,\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} = 0. \tag{2}$$

Характеристическая фаза (интерпретация данной фазы приведена ниже в разделе 3):

$$\tilde u_{i+1}^{n+1} = 2u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n. \tag{3}$$

[1] Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

[2] Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: bass-4@yandex.ru

Монотонизация:

$$u_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \min\bigl(u_i^n, u_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n\bigr) & \text{if} \quad \tilde{u}_{i+1}^{n+1} < \min\bigl(u_i^n, u_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n\bigr); \\ \min\bigl(u_i^n, u_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n\bigr) & \text{if} \quad \tilde{u}_{i+1}^{n+1} > \max\bigl(u_i^n, u_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n\bigr); \\ \tilde{u}_{i+1}^{n+1} & \text{else}. \end{cases} \tag{4}$$

Окончательная балансная фаза:

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} + c\,\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} = 0. \tag{5}$$

Эта схема консервативна, имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству, второй порядок сходимости на сгущающихся неравномерных сетках, устойчива при числе Куранта–Фридрихса–Леви (КФЛ), лежащем в пределах $0 \leqslant \text{КФЛ} \leqslant 1$, монотонна при $0 \leqslant \text{КФЛ} \leqslant 1/2$ и может быть монотонизирована на всем интервале устойчивости (см., например, [6]). Следует отметить, что схема Кабаре имеет компактный шаблон в пределах одной пространственно-временнóй ячейки и легко может быть обобщена на случай большего числа измерений.

В настоящей статье рассматривается один из возможных подходов к построению новой разностной схемы (получившей название “схема Диез”) класса Кабаре четвертого порядка аппроксимации для одномерного скалярного уравнения переноса (1). Показано, что схема Диез устойчива на интервале $0 \leqslant \text{КФЛ} \leqslant 1/2$, имеет лучшие в сравнении с классической схемой Кабаре дисперсионные свойства. Приведены решения тестовых задач.

2. Узловое представление схемы. Запишем еще раз узловое представление схемы Кабаре, которое может быть получено из уравнений (2), (3), (5) (этап монотонизации (4) исключен), записав ее только в терминах узловых величин. Для этого перепишем (5) в виде

$$\frac{u_{i+1/2}^{n} - u_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau/2} + c\,\frac{u_{i+1}^{n} - u_i^{n}}{h} = 0$$

и сложим с (2), разделив сумму на 2:

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + c\,\frac{u_{i+1}^{n} - u_i^{n}}{h} = 0.$$

Далее, подставив соотношение $u_{i+1/2}^{n+1/2} = \left(u_i^n + u_{i+1}^{n+1}\right)/2$, получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^{n}}{\tau} + \frac{u_i^{n} - u_i^{n-1}}{\tau}\right) + c\,\frac{u_{i+1}^{n} - u_i^{n}}{h} = 0. \tag{6}$$

Данное узловое представление может быть положено в основу построения схем класса Кабаре повышенного порядка точности.

Узловое представление схемы (6) может быть построено методом обратной характеристики. Зафиксируем трехслойный по времени и двухточечный по пространству шаблон (рис. 1). Для исходного уравнения (1) инварианты, представляющие собой значение функции $u(x,t)$ на пространственно-временнóй плоскости (x,t), распространяются по характеристикам, являющимися прямыми $c \cdot t - x = \text{const}$. Введем на прямой $t = t_n$ параметризацию: $\xi = \dfrac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n}$.

Предполагая, что во всех узлах на время $t \leqslant t_n$ значения известны, и учитывая, что значение из узла (x_n, t_{n-1}) распространяется по характеристике, мы заключаем, что на прямой $t = t_n$ определены три значения

$$\begin{cases} u(\xi = 0) = u_i^n, \\ u(\xi = 1) = u_{i+1}^n, \\ u(\xi = r) = u_i^{n-1}, \end{cases} \tag{7}$$

где $r = \dfrac{c \cdot \tau}{h}$.

Значение в узле (x_{i+1}, t_{n+1}) найдем следующим образом. Выпустим из указанного узла обратную характеристику, которая пересечется с прямой $t = t_n$ в точке $\xi = 1 - r$. Если по трем значениям (7) восполнить функцию $u(x, t = t_n)$ на отрезке $\xi \in [0, 1]$ квадратичной функцией $u(\xi) = a_2 \cdot \xi^2 + a_1 \cdot \xi + a_0$, коэффициенты которой ищутся из решения системы линейных уравнений (7), то значение этой квадратичной функции в точке $\xi = 1 - r$ будет равно

$$u_{i+1}^{n+1} = u(\xi = 1 - r) = u_i^{n-1} + u_i^n(1 + 2r) - u_{i+1}^n(1 + 2r),$$

откуда легко получить соотношение (6).

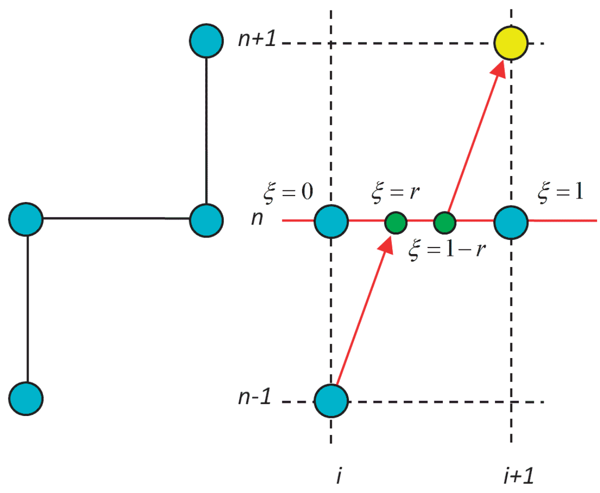

Рис. 1. Шаблон разностной схемы Кабаре и иллюстрация метода обратной характеристики для нахождения коэффициентов разностной схемы

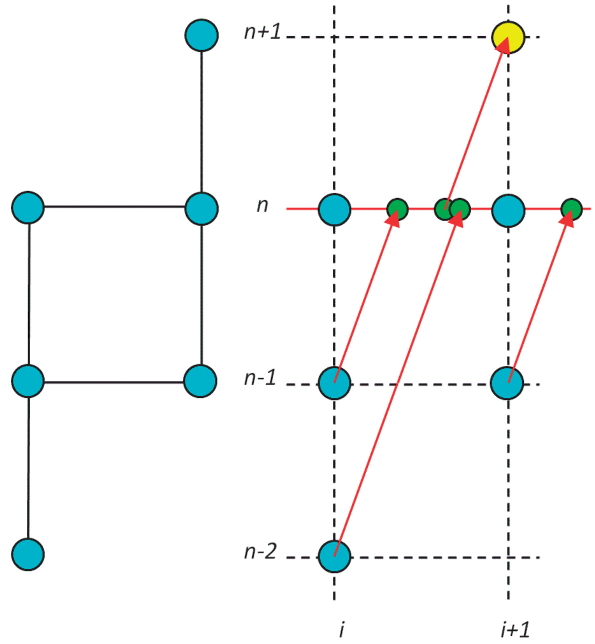

Рис. 2. Шаблон разностной схемы Диез и иллюстрация метода обратной характеристики для нахождения коэффициентов разностной схемы

Перейдем к построению новой разностной схемы. Рассмотрим четырехслойный шаблон (рис. 2). Из трех узлов (x_i, t_{n-2}), (x_i, t_{n-1}) и (x_{i+1}, t_{n-1}) выпустим характеристики до пересечения с прямой $t = t_n$. Добавив узлы (x_i, t_n) и (x_{i+1}, t_n), получим на указанной прямой 5 известных значений, по которым можно построить многочлен 4 степени $u(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{4} a_k \cdot \xi^k$, коэффициенты которого ищутся из соотношений

$$u(0) = u_i^n, \quad u(r) = u_i^{n-1}, \quad u(2r) = u_i^{n-2}, \quad u(1 + r) = u_{i+1}^{n-1}, \quad u(1) = u_{i+1}^n.$$

Обратная характеристика из узла (x_{i+1}, t_{n+1}) пересекает указанную прямую в точке $\xi = 1 - r$.

Разностная схема $u_{i+1}^{n+1} - u(\xi = 1 - r) = 0$ после некоторых преобразований записывается, например, в следующем виде:

$$(r + 1)\big(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n-2}\big) - 2(1 - 3r)(r + 1)\big(u_{i+1}^n - u_i^{n-1}\big) + (1 - 3r)(1 - 2r)\big(u_{i+1}^{n-1} - u_i^n\big) = 0. \tag{8}$$

Ниже эту схему и схемы, полученные на ее основе, будем называть схемой Диез.

Узловая разностная схема (8) является явной, четырехслойной по времени и двухточечной по пространству. Она имеет симметричный относительно точки $(x_{i+1/2}, t_{n-1/2})$ шаблон и антисимметричные коэффициенты, что показывает ее обратимость по времени и, следовательно, бездиссипативность на всем отрезке устойчивости. Схема имеет четвертый порядок аппроксимации на решении исходного уравнения (1), однако ее непосредственное обобщение на случай большего числа пространственных измерений, как и для схемы Айзерлиса, вызывает сложности.

Исследование диссипативных и дисперсионных свойств схемы (8) показывает, что она устойчива и бездиссипативна на отрезке $0 \leqslant \text{КФЛ} \leqslant 0.5$. Дисперсионная поверхность приведена на рис. 3. Для сравнения в том же масштабе приведена дисперсионная поверхность схемы Айзерлиса–Кабаре (6). Здесь по одной оси показан параметр $r = c \cdot \tau / h$, а по другой — приведенное волновое число. Значение дисперсии, большее единицы, соответствует избыточной скорости соответствующей гармоники, меньше единицы — недостаточной. “Идеальным” случаем является равенство дисперсии единице.

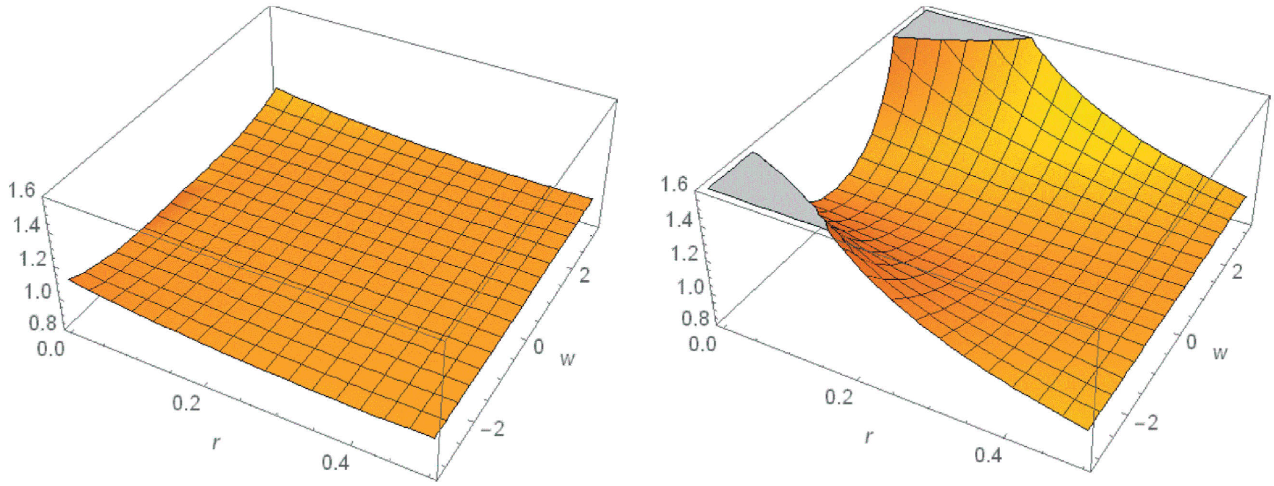

Рис. 3. Дисперсионные свойства разностных схем. Слева — дисперсионная поверхность разностной схемы Диез, справа — схемы Кабаре

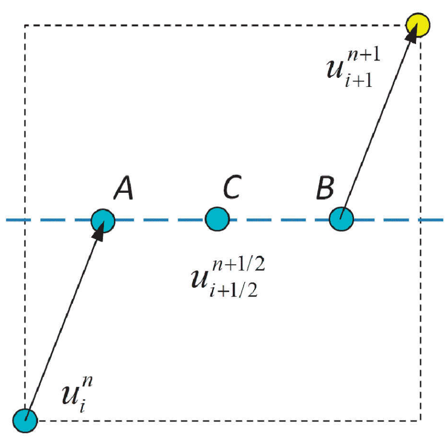

Рис. 4. Иллюстрация механизма экстраполяции инварианта в ячейке для схемы Кабаре

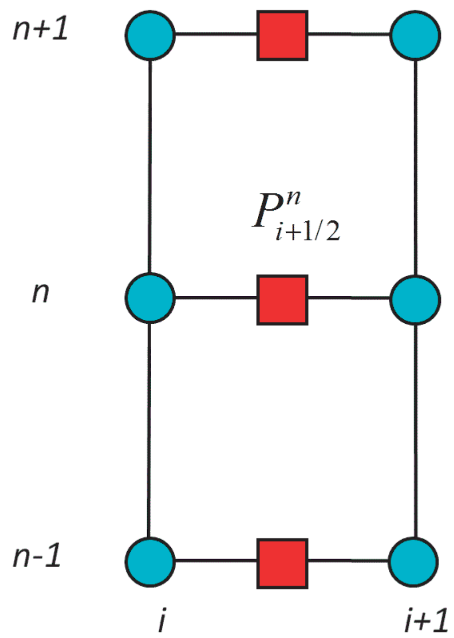

Рис. 5. Шаблон балансно-характеристического представления разностной схемы Диез

3. Балансно-характеристическое представление схемы Диез. Одной из важных особенностей разностной схемы Кабаре является то, что она относится к классу балансно-характеристических схем. Консервативная переменная $u_{i+1/2}^{n+1}$ вычисляется исходя из балансного уравнения

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^{n}}{\tau} + c\,\frac{\left(u_{i+1}^{n} + u_{i+1}^{n+1}\right)/2 - \left(u_{i}^{n} + u_{i}^{n+1}\right)/2}{h} = 0, \tag{9}$$

являющегося суммой уравнений (2) и (5), а потоковая переменная — на основе переноса инвариантов в узел пространственно-временно́й сетки в соответствии с соотношением (3), которое следует трактовать следующим образом.

Рассмотрим одну пространственно-временну́ю ячейку (рис. 4). Предполагая постоянство наклона характеристик в ячейке, рассмотрим значения инварианта (функции $u(x,t)$) на горизонтальной линии $t = t_n + \tau/2$. Очевидно, что значение в точке A равно u_i^n, значение в точке B равно u_{i+1}^{n+1}, а для значения в центре ячейки (точке C) выполнено соотношение

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{u_i^n + u_{i+1}^{n+1}}{2}\,, \tag{10}$$

которое совпадает с соотношением (3). Важно отметить, что как балансное соотношение (9), так и характеристическое соотношение (10) имеют второй порядок аппроксимации в центре ячейки.

Для разностной схемы Диез тоже введем консервативные и потоковые переменные. Как и раньше, консервативные переменные будем относить к центрам пространственных ячеек сетки, а потоковые — к их узлам. Потоковые переменные будем обозначать целыми индексами, а консервативные — полуцелыми. Как и для схемы Кабаре, характеристическое соотношение, аналогичное (10), должно связать консервативное значение с потоковыми, причем с четвертым порядком точности. Балансное уравнение, аналогичное (9), тоже должно иметь четвертый порядок точности, причем исключение консервативных переменных из системы разностных уравнений должно приводить разностную схему к узловому виду (8).

Рассмотрим две пространственно-временны́е ячейки (рис. 5). Балансное соотношение в ячейке на приведенном выше шаблоне будем рассматривать в следующей форме:

$$\begin{gathered}\frac{\Big(\alpha\, u_i^{n+1} + (1-2\alpha) u_{i+1/2}^{n+1} + \alpha\, u_{i+1}^{n+1}\Big) - \Big(\alpha\, u_i^{n} + (1-2\alpha) u_{i+1/2}^{n} + \alpha\, u_{i+1}^{n}\Big)}{\tau} + \\ + \frac{c}{h}\left[\frac{u_{i+1}^n + u_{i+1}^{n+1}}{2} - \frac{u_i^n + u_i^{n+1}}{2}\right] = 0,\end{gathered} \tag{11}$$

где α — произвольный параметр. Для замыкания разностной схемы следует использовать соотношение

$$u_{i+1/2}^n = \lambda\,\frac{u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n+1}}{2} + (1-\lambda)\,\frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2}\,, \quad \lambda = \frac{r+1}{6r(1-2\alpha)}\,. \tag{12}$$

Можно проверить, что сложение балансных соотношений (11) для двух последовательных слоев времени и последующее исключение консервативных переменных с помощью характеристического соотношения (12) приводит к узловому виду схемы (8). Существует единственное значение параметра

$$\alpha = \frac{1+2R^2}{6}\,, \tag{13}$$

при котором оба соотношения — балансное (11) и характеристическое (12) — имеют четвертый порядок аппроксимации в точках $P_{i+1/2}^{n+1/2}$ и $P_{i+1/2}^n$ соответственно. Шаблоны этих соотношений приведены на рис. 6.

Подставим (13) в (12):

$$u_{i+1/2}^n = \beta\,\frac{u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n+1}}{2} + (1-\beta)\,\frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2}\,, \quad \beta = \frac{1}{4r(1-r)}\,.$$

В соответствии с этим соотношением экстраполяция потокового значения выполняется по формуле

$$u_{i+1}^{n+1} = \frac{2u_{i+1/2}^n - (1-\beta)\left(u_i^n + u_{i+1}^n\right)}{\beta} - u_i^{n-1}.$$

Теперь можно выписать окончательный вид разностной схемы Диез для скалярного уравнения переноса с постоянным коэффициентом. Как и в случае схемы Кабаре (2)–(5), консервативные значения вычисляются на основе балансного соотношения, учитывающего потоки на границах ячейки, а потоковые значения на новом слое — на основе характеристического подхода. Важной частью разностной схемы является нелинейная коррекция (монотонизация) потоковых значений.

Характеристическая фаза:

$$\tilde{u}_{i+1}^{n+1} = \frac{2u_{i+1/2}^n - (1-\beta)\left(u_i^n + u_{i+1}^n\right)}{\beta} - u_i^{n-1}, \quad \beta = \frac{1}{4r(1-r)}\,. \tag{14}$$

Фаза монотонизации:

$$u_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \min\left(u_{i+1/2}^{n}, u_{i+1}^{n}\right) & \text{if} \quad \tilde{u}_{i+1}^{n+1} < \min\left(u_{i+1/2}^{n}, u_{i+1}^{n}\right), \\ \min\left(u_{i+1/2}^{n}, u_{i+1}^{n}\right) & \text{if} \quad \tilde{u}_{i+1}^{n+1} > \max\left(u_{i+1/2}^{n}, u_{i+1}^{n}\right), \\ \tilde{u}_{i+1}^{n+1} & \text{else.} \end{cases} \tag{15}$$

Балансная фаза:

$$\frac{\left(\alpha\, u_i^n + (1-2\alpha)u_{i+1/2}^n + \alpha\, u_{i+1}^n\right) - \left(\alpha\, u_i^{n-1} + (1-2\alpha)u_{i+1/2}^{n-1} + \alpha\, u_{i+1}^{n-1}\right)}{\tau} + \\ + \frac{c}{h}\left[\frac{u_{i+1}^n + u_{i+1}^{n-1}}{2} - \frac{u_i^n + u_i^{n-1}}{2}\right] = 0, \quad \alpha = \frac{1+2R^2}{6}. \tag{16}$$

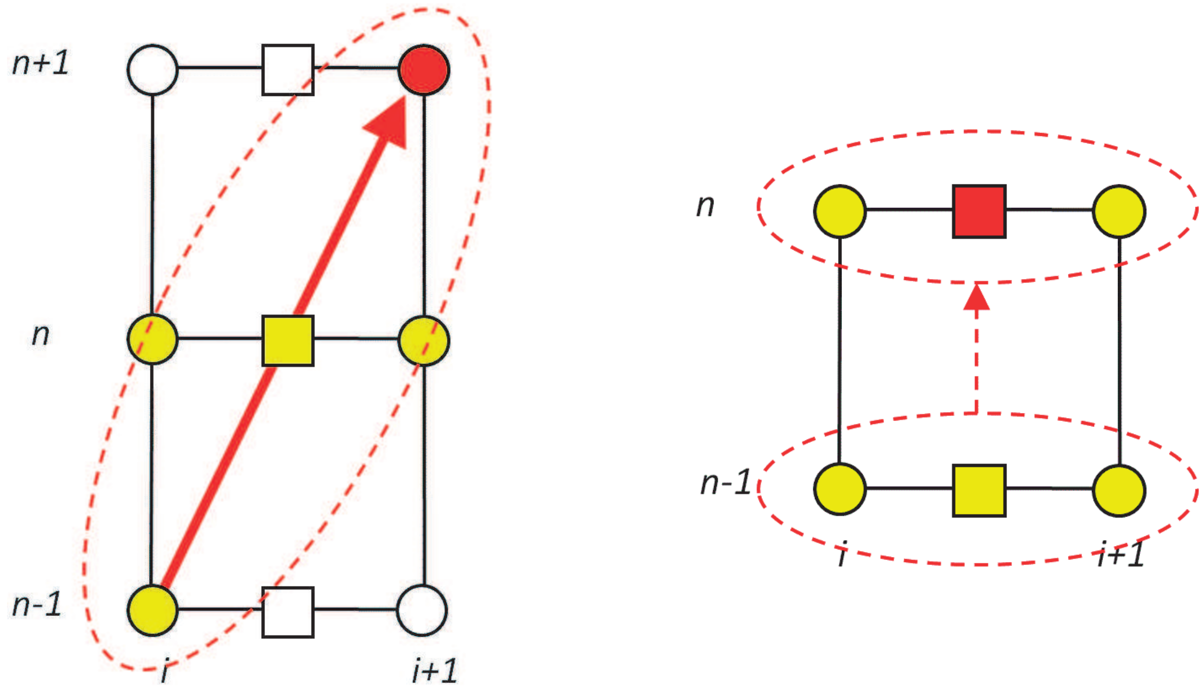

Рис. 6. Слева — шаблон характеристической фазы разностной схемы Диез, справа — шаблон балансной фазы этой схемы

4. Тестовые расчеты. В качестве тестов рассмотрим задачи о переносе двух профилей — прямоугольника и двойного гауссиана. В расчетной области $0 \leqslant x \leqslant 1$ была введена равномерная сетка из 200 ячеек. На границах были заданы периодические граничные условия. Решение уравнения переноса (1) для скорости переноса $c = 0.5$ проводилось как по схеме Кабаре (2)–(5), так и по схеме Диез (14)–(16) до момента времени $t = 1000$, соответствующего прохождению профилем 100 000 ячеек (расстояние $\Delta x = 500$). Было проведено несколько серий расчетов для нескольких значений параметра КФЛ, равных 0.1, 0.2 и 0.4.

На приведенных графиках (рис. 7) сплошной линией обозначено точное решение. Маркерами обозначены решения по схеме Кабаре (крестики) и схеме Диез (ромбы), причем решение по схеме Кабаре всюду является более “размазанным”.

Из этого рисунка следует, что при любом значении числа КФЛ, обозначенного через cfl, схема Диез имеет небольшую немонотонность вблизи разрывного решения, а при числе КФЛ больше $1/3$ для этого профиля появляется высокочастотная немонотонность. Для двойного гауссиана ситуация обратная — с повышением параметра КФЛ точность решения растет. В любом случае, точность решения по схеме Диез превосходит точность решения по схеме Кабаре.

Исследование отклонения численного решения уравнения переноса по схеме Диез от аналитического решения на последовательности сгущающихся сеток показывает, что схема (14)–(16) имеет второй порядок сходимости.

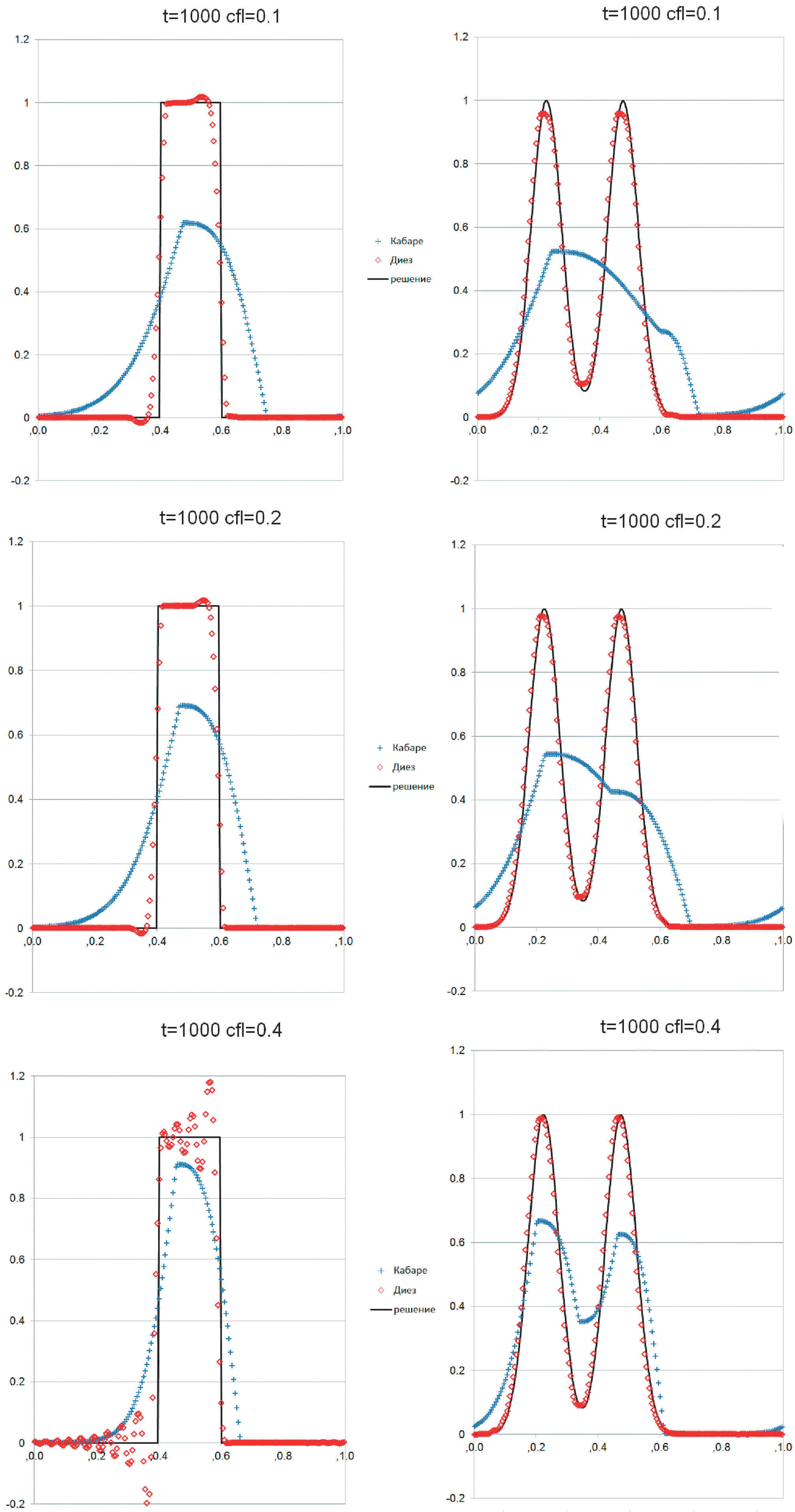

Рис. 7. Расчет переноса двух профилей по разностной схеме Диез (маркер — ромб) и по разностной схеме Кабаре (маркер — крестик). Сплошная линия — точное решение

5. Заключение. Предложена новая разностная схема Диез, имеющая четвертый порядок аппроксимации на решении скалярного уравнения переноса. Схема при исключении этапа нелинейной коррекции является бездиссипативной, устойчивой на интервале $0 \leqslant$ КФЛ $\leqslant 1/2$, обладает хорошими дисперсионными свойствами. Схема Диез определена на минимальном пространственном шаблоне и может быть представлена в балансно-характеристическом виде. Для схемы Диез выполнены тестовые расчеты, показывающие лучшую по сравнению с классической схемой Кабаре точность решения.

Авторы выражают искреннюю благодарность д.ф.-м.н., проф. В. М. Головизнину за постановку задачи, обсуждение результатов и постоянную поддержку в ходе работы по данной теме.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16–01–0333 “Построение и анализ разностных схем повышенной точности и их применение к задачам гидродинамики”) и Российского научного фонда (грант 18–11–00163 “Разработка иерархии математических моделей нового поколения для решения задач вычислительной океанологии на основе гиперболической декомпозиции и балансно-характеристического подхода”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 1. 86–100.
2. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Некоторые свойства разностной схемы “кабаре” // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 1. 101–116.
3. *Iserles A.* Generalized leapfrog methods // IMA Journal of Numerical Analysis. 1986. **6**, N 4. 381–392.
4. *Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М.* Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. 2003. **15**, № 9. 29–48.
5. *Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А.* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
6. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности двухслойной по времени схемы кабаре // Математическое моделирование. 2012. **24**, № 9. 97–112.

Поступила в редакцию
22.03.2018

A Higher-Order Difference Scheme of the Cabaret Class for Solving the Transport Equation

A. V. Solovjev[1] **and A. V. Danilin**[2]

[1] *Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru*

[2] *Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Junior Scientist, e-mail: bass-4@yandex.ru*

Received March 22, 2018

Abstract: A new difference scheme of the Cabaret class with a higher order of accuracy for solving the scalar transport equation is proposed. The order of approximation of this difference scheme is equal to four. The balance-characteristic representation of the scheme is constructed and the dispersion properties are given. For the proposed difference scheme, a number of examples to solve the transport equation for smooth and discontinuous profiles are considered in comparison with the classical Cabaret scheme.

Keywords: Cabaret scheme, transport equation, higher order approximation, accuracy.

References

1. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, “Finite Difference Approximation of Convective Transport Equation with Space Splitting Time Derivative,” Mat. Model. **10** (1), 86–100 (1998).

2. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, “Some Characteristics of Finite Difference Scheme ‘Cabaret’,” Mat. Model. **10** (1), 101–116 (1998).

3. A. Iserles, “Generalized Leapfrog Methods,” IMA J. Numer. Anal. **6** (4), 381–392 (1986).

4. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and I. M. Kobrinskii, "Balance-Characteristic Schemes with Separated Conservative and Flux Variables," Mat. Model. **15** (9), 29–48 (2003).

5. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *New CFD Algorithms for Multiprocessor Computer Systems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].

6. O. A. Kovyrkina and V. V. Ostapenko, "On Monotonicity of Two-Layer in Time Cabaret Scheme," Mat. Model. **24** (9), 97–112 (2012) [Math. Models Comput. Simul. **5** (2), 180–189 (2013)].