

УДК 519.6; 517.958:5

doi 10.26089/NumMet.v19r213

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ ЗОНДИРУЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ В УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ТОМОГРАФИИ: МОДЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ И ЭКСПЕРИМЕНТ

А. В. Гончарский¹, С. Ю. Романов², С. Ю. Серёжников³

Статья посвящена разработке методов формирования акустических зондирующих импульсов в задачах ультразвуковой томографии. Обратная задача формирования акустических зондирующих импульсов рассматривается в рамках линейной модели. Эта задача является некорректной и требует использования регуляризирующих алгоритмов. Для численного решения использована тихоновская схема регуляризации. Разработанные алгоритмы протестированы на решении модельных задач и с помощью специально поставленного эксперимента, в котором акустический тракт включает в себя цифровой генератор импульсов, усилитель, источник акустического излучения, акустический детектор, предусилитель и аналого-цифровой преобразователь. Экспериментально подтверждены как адекватность линейной модели, так и высокая эффективность предложенных алгоритмов.

Ключевые слова: ультразвуковая томография, волновая томография, обратные задачи, суперкомпьютерные технологии, регуляризирующий алгоритм.

1. Введение. В настоящее время интенсивно развивается новое направление диагностических исследований — ультразвуковая томография. Прорывные результаты получены в области разработки эффективных алгоритмов решения обратной задачи как коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения [1–3]. Коэффициентная обратная задача волновой томографии является нелинейной и для ее решения необходимо использовать суперЭВМ [4–6]. Используемая в ультразвуковой томографии математическая модель хорошо описывает как дифракционные эффекты, так и эффекты поглощения [7, 8].

Одним из важных приложений волновой томографии являются медицинские исследования в мягких тканях и, в первую очередь, дифференциальная диагностика рака молочной железы. Разработки ультразвуковых томографов для диагностики рака молочной железы находятся на стадии прототипов [9–12].

В работах [13–15] развивается новое диагностическое направление в медицине — низкочастотная томография, в которой для зондирования используются низкочастотные широкополосные пьезоэлектрические излучатели с центральной частотой 300–500 кГц. Важной для низкочастотной ультразвуковой томографии является проблема формирования зондирующих импульсов. Какой должна быть форма зондирующих импульсов и их длительность? Модельные расчеты показывают, что зондирующие импульсы должны быть короткими (3–5 мкс) и широкополосными — с шириной спектра 40–50% от центральной частоты. Типичные амплитудно-частотные характеристики пьезокерамических излучателей не удовлетворяют этим требованиям.

В настоящей статье показано, что для акустического тракта в низкочастотной ультразвуковой томографии можно использовать линейную модель, которая связывает форму акустического импульса и форму возбуждающего электрического импульса задающего генератора. Обратная задача формирования зондирующего импульса в такой модели рассматривается как линейная некорректно поставленная задача. Для ее решения используются стандартные численные методы решения некорректно поставленных задач [16–18]. Эффективность разработанных алгоритмов проверяется на специально собранном стенде, включающем в себя цифровой генератор, усилитель, ультразвуковой излучатель, гидрофон с предусилителем и модуль АЦП (Аналого-Цифровой Преобразователь). Рассматриваемые здесь работы финансируются грантом РФФИ 17–11–01065 “Разработка методов низкочастотной 3D ультразвуковой томографии на основе GPU-суперкомпьютеров”.

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: romanov60@gmail.com

³ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; электроник, e-mail: s2110sj@gmail.com

2. Постановка обратной задачи формирования зондирующих импульсов и методы ее решения. В настоящей работе рассматривается обратная задача формирования зондирующих импульсов в низкочастотной волновой томографии. Типичная схема волновой томографии приведена на рис. 1. С помощью ультразвукового излучения исследуется трехмерный объект, расположенный в области G . Ультразвуковое излучение от каждого из источников 1 регистрируется приемниками 2. Если источники и приемники расположены в одной плоскости, то такая схема называется послойной. В трехмерном варианте источники и приемники располагаются на поверхности, окружающей исследуемый объект. Обратная задача заключается в восстановлении акустических характеристик внутри исследуемого объекта по данным, зарегистрированным детекторами. Обратная задача волновой томографии является нелинейной. Наиболее интересные результаты получены с помощью методов решения коэффициентных обратных задач в работах [19–21].

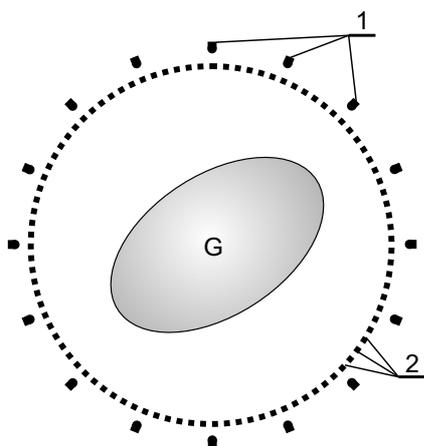


Рис. 1. Схема эксперимента

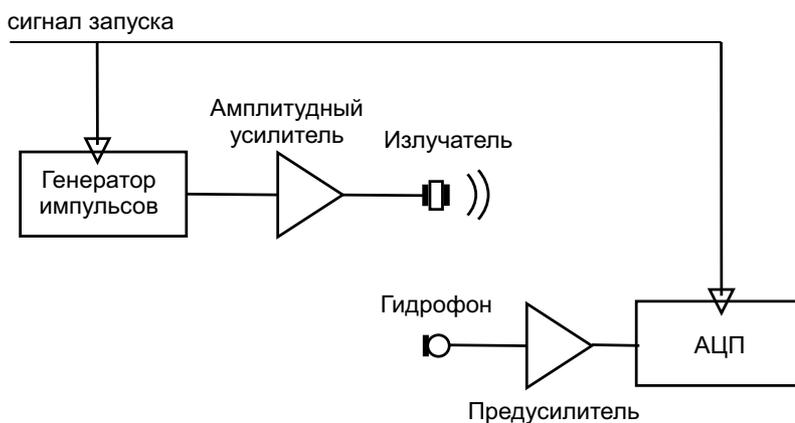


Рис. 2. Схема акустического тракта

На рис. 2 приведена схема акустического тракта в томографических ультразвуковых экспериментах. Возбуждающий электрический импульс, формируемый электронным генератором, усиливается с помощью амплитудного усилителя до напряжения 80–100 В и подается на ультразвуковой излучатель, который формирует сферическую волну. Акустический сигнал принимается гидрофоном, усиливается предусилителем и оцифровывается с помощью АЦП. В низкочастотной ультразвуковой томографии к форме ультразвукового зондирующего импульса предъявляются специальные требования. На модельных задачах [19, 22] показано, что близкой к оптимальной форме зондирующих импульсов является форма импульса, приведенная на рис. 3.

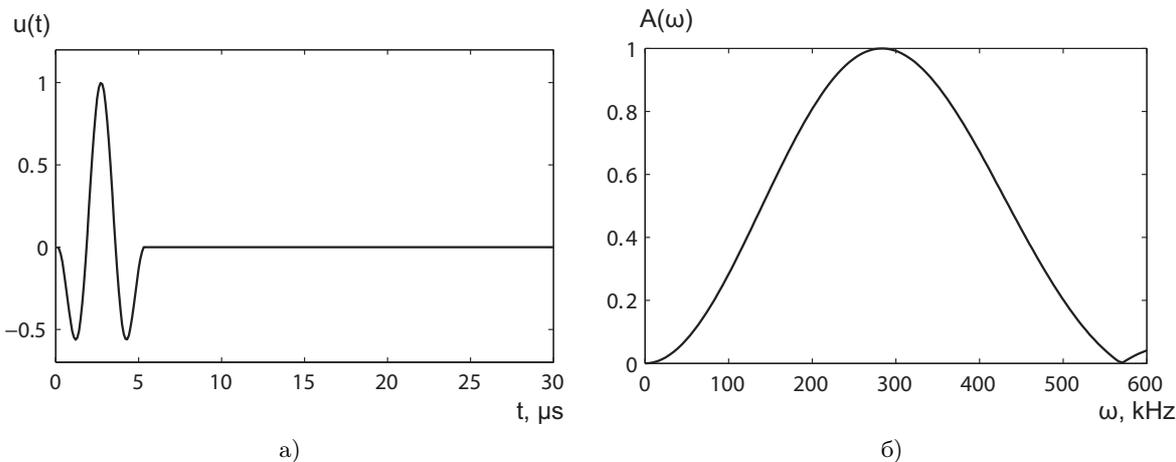


Рис. 3. Зондирующий акустический импульс $u(t)$ с длиной волны 5 мм: а) форма импульса, б) спектр импульса

Требования к длительности и форме импульса можно сформулировать следующим образом. Длительность импульса должна составлять порядка 5 мкс. При фиксированной полосе и энергии импульса вариация акустического импульса $u(t)$ должна быть минимальной [23]. Основные проблемы формирования

зондирующих импульсов с физической точки зрения связаны с тем, что сформировать короткий импульс с помощью пьезокерамики очень сложно, поскольку пьезокерамический элемент имеет свои собственные резонансные частоты колебаний. Как следствие, при подаче короткого возбуждающего электрического импульса акустический зондирующий импульс имеет большое количество переколебаний.

Для акустического тракта, представленного на рис. 2, при расчете возбуждающего электрического импульса можно использовать простую линейную модель, связывающую акустический импульс на выходе излучателя $u(t)$ и возбуждающий электрический импульс $f(t)$, подаваемый на излучатель. Таким образом, в выбранной модели связь между $u(t)$ и $f(t)$ можно описать операторным уравнением

$$Af(t) = \int K(t, t')f(t') dt' = u(t), \quad f(t) \in L_2, \quad u(t) \in L_2. \quad (1)$$

Здесь $K(t, t')$ — заданная функция. Оказывается, что достаточно хорошим приближением является модель, в которой $K(t, t') = K(t - t')$. Это означает, что уравнение (1) является уравнением типа свертки и для его решения можно использовать преобразование Фурье. Интегральное уравнение (1) представляет собой некорректно поставленную задачу. Методы решения операторных уравнений очень хорошо изучены и эффективно работают [24]. Для решения линейных уравнений можно предложить итеративные методы [25]. Одним из первых алгоритмов, предложенных в работе [16], была схема регуляризации, получившая название схемы Тихонова. В определенном смысле эта схема обладает свойствами оптимальности [26]. С вычислительной точки зрения реализация регуляризирующих алгоритмов для уравнения (1) не представляет проблем. В схеме Тихонова для аппроксимации разрывного оператора A^{-1} используется последовательность линейных операторов $f^\alpha(t) = A^*(A^*A + \alpha E)^{-1}$, где α — параметр регуляризации. Параметр регуляризации можно выбрать по методу невязки [27]. В реальных задачах вместо точной функции $u(t)$ известно лишь ее приближенное значение $u_\delta(t)$, такое, что $\|u_\delta - u\| \leq \delta$. За приближенное значение решения задачи (1) принимается элемент $A^*(A^*A + \alpha E)^{-1}u_\delta$ при значении параметра α , выбранном по принципу невязки [27]. Поскольку базовой моделью является модель, в которой $K(t, t')$ зависит от разности аргументов, приближенное решение уравнения (1) определяет семейство f^α :

$$f^\alpha(t) = \int \frac{K^*(\omega)U(\omega)e^{i\omega t}}{K^*(\omega)K(\omega) + \alpha} d\omega.$$

Здесь $K(\omega)$, $U(\omega)$ — образы Фурье функций $K(t)$ и $u_\delta(t)$. Параметр α будем выбирать из условия $\beta(\alpha) = \|Af^\alpha - u_\delta\| = \delta$. Функция $\beta(\alpha)$ является непрерывной, монотонной и исчерпывает интервал $(\delta; \|u_\delta\|)$. При выполнении естественного условия $\|u_\delta\| > \delta$ параметр регуляризации по методу невязки выбирается однозначно. Выбор параметра регуляризации в схеме Тихонова по методу невязки позволяет построить приближенное решение операторного уравнения (1). Для численной реализации метода используется быстрое преобразование Фурье. Эффективность разработанных алгоритмов была проверена на модельных задачах и на реальных экспериментах.

3. Результаты: модельные расчеты и эксперимент. Вышеописанные алгоритмы позволяют рассчитать, какой должна быть форма возбуждающего электрического импульса $f(t)$ для заданной формы акустического импульса $u(t)$. Результаты расчетов проверялись на экспериментальной установке, в которой излучатель и приемник находились в водной среде. Расстояние от источника до приемника составляло 120 мм. В качестве задающего генератора использовался цифровой генератор AWG-4110. Электрический сигнал задающего генератора усиливается амплитудным усилителем АКТАКОМ AVA-1745 до напряжения ± 80 В. Акустический импульс, формируемый сферическим пьезокерамическим излучателем, принимается гидрофоном Teledyne Reson TC4038, усиливается предусилителем Teledyne Reson VP1000 и поступает на модуль АЦП E20-10.

На рис. 4а приведена форма акустического импульса $u(t)$ в случае, когда возбуждающий электрический импульс $f(t)$ представляет собой короткий импульс длительностью 200 нс. На рис. 4б приведен спектр акустического импульса $A(\omega)$. Как видно из рис. 4а, форма акустического импульса, создаваемого излучателем, очень далека от оптимальной, представленной на рис. 3а. Решая обратную задачу, можно скомпенсировать переколебания акустического импульса и получить вполне приемлемый для экспериментов низкочастотный акустический зондирующий импульс, представленный на рис. 5а. На рис. 5б представлен его спектр. Для того чтобы сформировать такой акустический импульс, следует подать на вход акустического тракта возбуждающий электрический импульс, представленный на рис. 6а. Спектр этого импульса представлен на рис. 6б. Ширина спектра акустического импульса на рис. 5 составляет порядка 200 кГц.

Более сложной задачей является задача формирования широкополосного акустического сигнала, спектр которого составляет порядка 350 кГц. На рис. 7а представлен акустический сигнал, который мож-

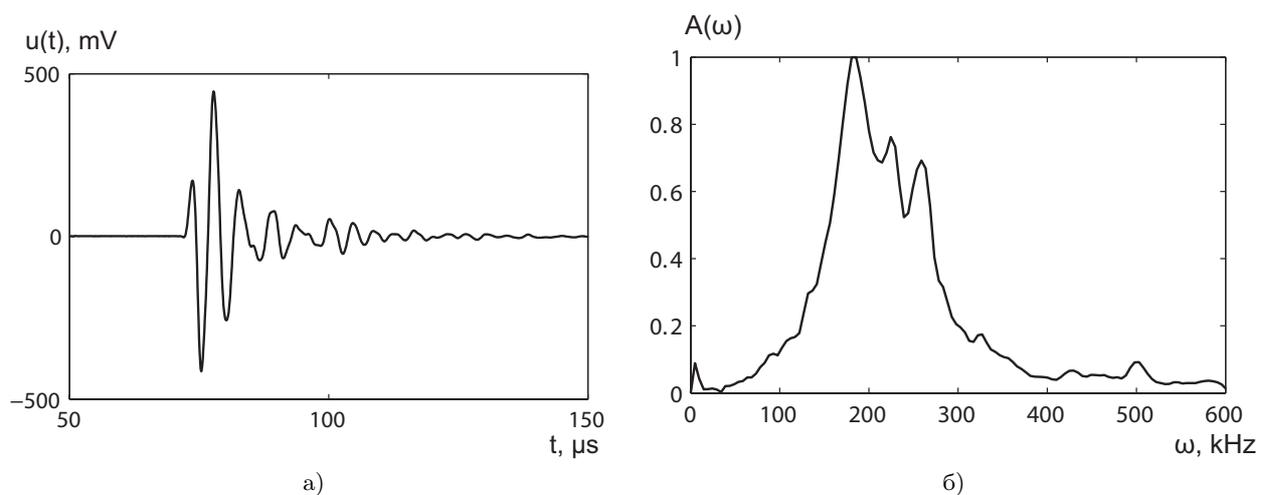


Рис. 4. Акустический отклик излучателя на короткий импульс длиной 0.2 мкс:
 а) форма импульса, б) спектр импульса

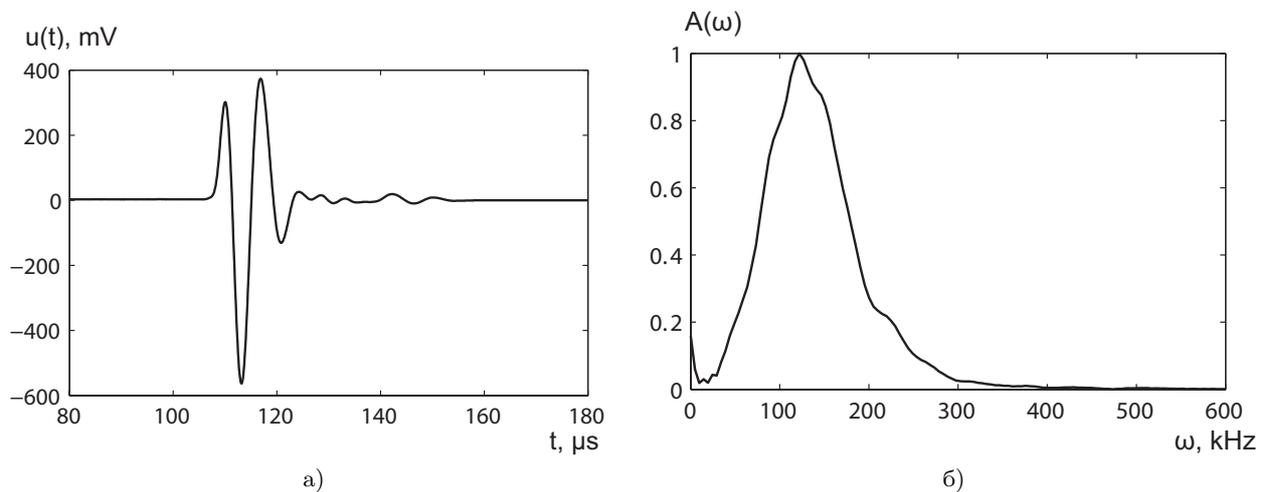


Рис. 5. Низкочастотный акустический импульс: а) форма импульса, б) частотная характеристика

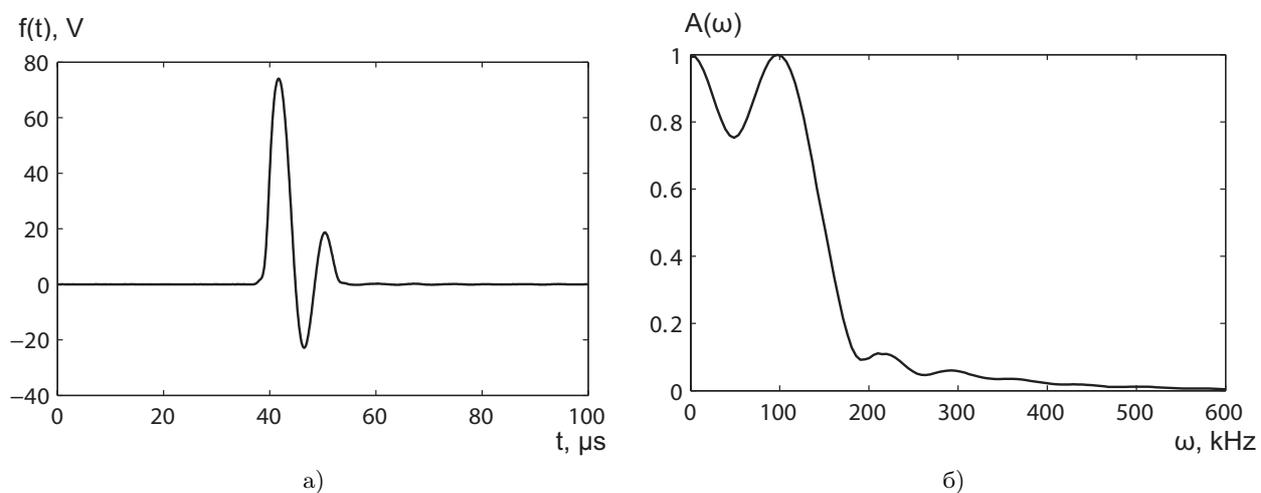


Рис. 6. Низкочастотный возбуждающий импульс: а) форма импульса, б) частотная характеристика

но получить, если на вход акустического тракта подать возбуждающий импульс специальной формы, представленный на рис. 8а. Спектр этого импульса приведен на рис. 8б. Амплитудно-частотная характеристика электрического импульса имеет подъемы на низких частотах и на частотах в окрестности 300 кГц, чтобы скомпенсировать ослабление эффективности ультразвукового излучателя на этих частотах.

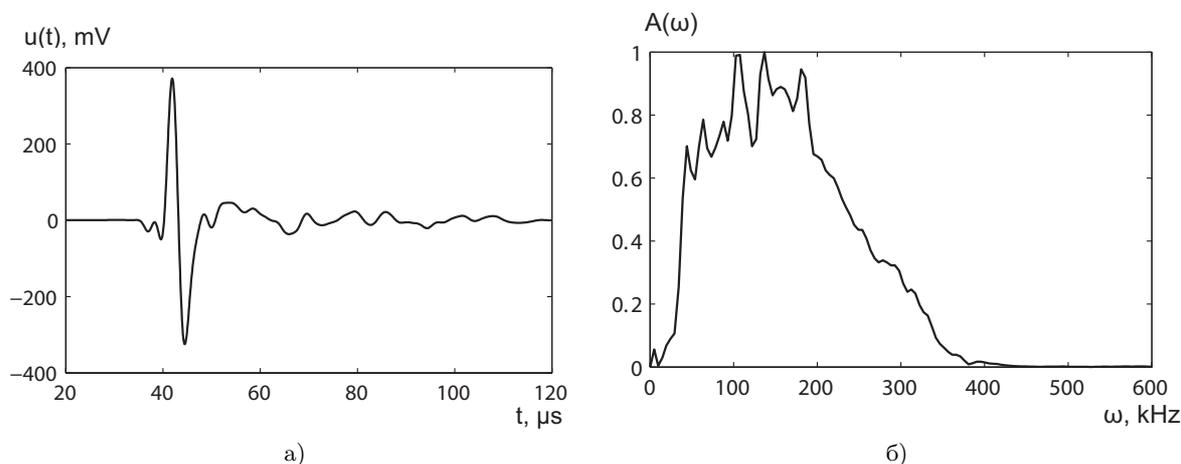


Рис. 7. Широкополосный акустический импульс: а) форма импульса, б) частотная характеристика

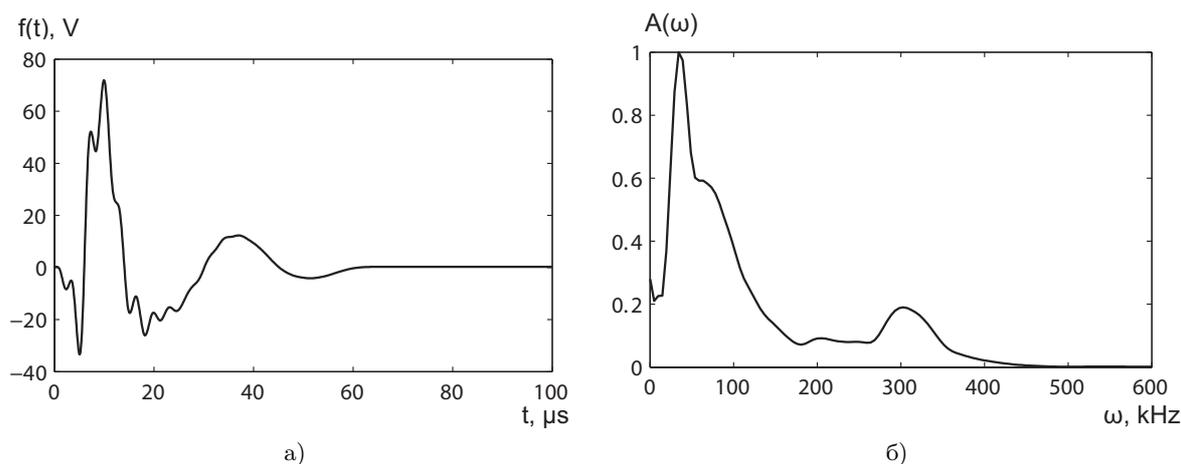


Рис. 8. Широкополосный возбуждающий импульс: а) форма импульса, б) частотная характеристика

Приведенные на рис. 5 и 7 импульсы представляют собой экспериментальные данные, полученные в акустическом тракте с использованием методов решения обратных задач. Многочисленные эксперименты показали, что акустические импульсы стабильно воспроизводятся с точностью не хуже 1% от максимальной амплитуды сигнала.

4. Заключение. В настоящей статье показано, что для формирования зондирующих импульсов заданной формы в задачах ультразвуковой томографии можно использовать линейную модель акустического тракта. Этот факт подтверждается реальными экспериментами, в которых показано, что форма сигнала воспроизводится с хорошей точностью.

Существуют две возможности “управления” формой акустического импульса. Первая связана с использованием простых задающих импульсов прямоугольной формы. Такой подход предъявляет минимальные требования к аппаратуре. Подробно этот метод описан в работе [28]. В этом случае мы можем варьировать всего два параметра — напряжение и длительность импульса, поэтому возможности этого метода достаточно ограничены.

Второй подход связан с использованием обратных задач. Решая обратную задачу, мы рассчитываем, каким должен быть возбуждающий электрический импульс. Для того чтобы реализовать этот подход, необходимо, чтобы полоса пропускания задающего генератора и усилителя была достаточно широкой. Чтобы реализовать это, необходимо использовать более дорогостоящие электронные компоненты, в первую очередь усилитель. Как показано на реальных экспериментах, этот подход легко реализуем

в полосе частот до 1 МГц, поскольку существует большой выбор усилителей с полосой частот до 1–2 МГц. Однако если попытаться использовать этот же подход для зондирующих сигналов с центральной частотой порядка 5 МГц, то к полосе пропускания усилителя предъявляются жесткие требования. Это автоматически означает увеличение стоимости оборудования акустического тракта.

Разработанные методы могут быть использованы в задачах волновой томографии, в сейсмике, дефектоскопии и др.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17–11–01065). Исследование выполнено в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Natterer F.* Incomplete data problems in wave equation imaging // *Inverse Problems and Imaging*. 2010. **4**, N 4. 685–691.
2. *Beilina L., Klibanov M.* Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems. New York: Springer, 2012.
3. *Goncharov A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* A computer simulation study of soft tissue characterization using low-frequency ultrasonic tomography // *Ultrasonics*. 2016. **67**. 136–150.
4. *Goncharov A.V., Seryozhnikov S.Y.* The architecture of specialized GPU clusters used for solving the inverse problems of 3D low-frequency ultrasonic tomography // *Supercomputing. RuSCDays 2017. Communications in Computer and Information Science*. Vol. 793. Cham: Springer, 2017. 363–395.
5. *Romanov S.* Optimization of numerical algorithms for solving inverse problems of ultrasonic tomography on a supercomputer // *Supercomputing. RuSCDays 2017. Communications in Computer and Information Science*. Vol. 793. Cham: Springer, 2017. 67–79.
6. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Обратные задачи послойной ультразвуковой томографии с данными на цилиндрической поверхности // *Вычислительные методы и программирование*. 2017. **18**. 267–276.
7. *Goncharov A.V., Romanov S.Y.* Inverse problems of ultrasound tomography in models with attenuation // *Physics in Medicine and Biology*. 2014. **59**, N 8. 1979–2004.
8. *Goncharov A.V., Romanov S.Y.* Iterative methods for solving coefficient inverse problems of wave tomography in models with attenuation // *Inverse Problems*. 2017. **33**, N 2. doi: 10.1088/1361-6420/33/2/025003.
9. *Pratt R.G., Huang L., Duric N., Littrup P.* Sound-speed and attenuation imaging of breast tissue using waveform tomography of transmission ultrasound data // *Proc. SPIE Vol. 6510, Medical Imaging 2007: Physics of Medical Imaging*. doi 10.1117/12.708789.
10. *Jiřík R., Peterlík I., Ruiter N., et al.* Sound-speed image reconstruction in sparse-aperture 3-D ultrasound transmission tomography // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 2012. **59**, N 2. 254–264.
11. *Wiskin J., Borup D.T., Johnson S.A., Berggren M.* Non-linear inverse scattering: high resolution quantitative breast tissue tomography // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2012. **131**, N 5. 3802–3813.
12. *Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д.* Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в фантомах мягких биотканей по экспериментальным данным ультразвукового томографирования // *Акуст. журн.* 2015. **61**, № 2. 254–273.
13. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Суперкомпьютерные технологии в задачах проектирования томографических диагностических комплексов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016.
14. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Низкочастотная трехмерная ультразвуковая томография // *Доклады Академии наук*. 2016. **468**, № 3. 268–271.
15. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Итерационные методы решения обратных задач ультразвуковой томографии // *Вычислительные методы и программирование*. 2015. **16**. 464–475.
16. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // *ДАН СССР*. 1963. **151**, № 3. 501–504.
17. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // *ДАН СССР*. 1963. **153**, № 1. 49–52.
18. *Tikhonov A.N., Goncharov A.V.* Ill-posed problems in the natural sciences. M.: Mir, 1987.
19. *Goncharov A.V., Romanov S.Yu., Seryozhnikov S.Yu.* Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data // *Wave Motion*. 2014. **51**, N 3. 389–404.
20. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* О проблеме выбора начального приближения в обратных задачах ультразвуковой томографии // *Вычислительные методы и программирование*. 2017. **18**. 312–321.
21. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Задачи волновой томографии с неполным диапазоном данных // *Вычислительные методы и программирование*. 2014. **15**. 274–285.
22. *Goncharov A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* Supercomputer technologies in tomographic imaging applications // *Supercomputing Frontiers and Innovations*. 2016. **3**, N 1. 41–66.
23. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
24. *Bakushinsky A., Goncharov A.* Ill-posed problems: theory and applications. Dordrecht: Springer, 1994.
25. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.

26. Винокуров В.А. О порядке погрешности вычисления функции с приближенно заданным аргументом // ЖВМ и МФ. 1973. **13**, № 5. 1112–1123.
27. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974.
28. Домаркас В.И., Кажис Р.-И.Ю. Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи. Вильнюс: МИНТИС, 1975.

Поступила в редакцию
1.02.2018

Inverse Problems of Sounding Pulse Formation in Ultrasound Tomography: Mathematical Modeling and Experiments

A. V. Goncharsky¹, S. Yu. Romanov², and S. Yu. Seryozhnikov³

¹ *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru*

² *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: romanov60@gmail.com*

³ *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Electronic Engineer, e-mail: s2110sj@gmail.com*

Received February 1, 2018

Abstract: This paper is concerned with developing the methods of forming acoustic sounding pulses in ultrasound tomography applications. The inverse problem of forming acoustic sounding pulses is considered in the framework of linear models. This problem is ill-posed and requires the use of regularizing algorithms. Tikhonov's regularization scheme is used to solve the problem numerically. The developed algorithms are tested on model problems as well as on experimental data. In the experimental setup, the acoustic path includes a digital waveform generator, an amplifier, an ultrasound emitter, a hydrophone with a preamplifier, and an analog-digital converter. The applicability of the linear model and the efficiency of the proposed algorithms are substantiated experimentally.

Keywords: ultrasound tomography, waveform tomography, inverse problems, supercomputing technologies, regularizing algorithms.

References

1. F. Natterer, "Incomplete Data Problems in Wave Equation Imaging," *Inverse Probl. Imag.* **4** (4), 685–691 (2010).
2. L. Beilina and M. V. Klibanov, *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems* (Springer, New York, 2012).
3. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "A Computer Simulation Study of Soft Tissue Characterization Using Low-Frequency Ultrasonic Tomography," *Ultrasonics* **67**, 136–150 (2016).
4. A. Goncharsky and S. Seryozhnikov, "The Architecture of Specialized GPU Clusters Used for Solving the Inverse Problems of 3D Low-Frequency Ultrasonic Tomography," in *Supercomputing, RuSCDays 2017, Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2017), Vol. 793, pp. 363–395.
5. S. Romanov, "Optimization of Numerical Algorithms for Solving Inverse Problems of Ultrasonic Tomography on a Supercomputer," in *Supercomputing, RuSCDays 2017, Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2017), Vol. 793, pp. 67–79.
6. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "Inverse Problems of Layer-by-Layer Ultrasonic Tomography with the Data Measured on a Cylindrical Surface," *Vychisl. Metody Programm.* **18**, 267–276 (2017).
7. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "Inverse Problems of Ultrasound Tomography in Models with Attenuation," *Phys. Med. Biol.* **59** (8), 1979–2004 (2014).
8. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "Iterative Methods for Solving Coefficient Inverse Problems of Wave Tomography in Models with Attenuation," *Inverse Probl.* **33** (2) (2017).
doi: 10.1088/1361-6420/33/2/025003

9. R. G. Pratt, L. Huang, N. Duric, and P. Littrup, "Sound-Speed and Attenuation Imaging of Breast Tissue Using Waveform Tomography of Transmission Ultrasound Data," in Proc. SPIE Vol. 6510, Medical Imaging 2007: Physics of Medical Imaging, doi 10.1117/12.708789
10. R. Jiřík, I. Peterlík, N. Ruiter, et al., "Sound-Speed Image Reconstruction in Sparse-Aperture 3-D Ultrasound Transmission Tomography," IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control **59** (2), 254–264 (2012).
11. J. Wiskin, D. T. Borup, S. A. Johnson, and M. Berggren, "Non-Linear Inverse Scattering: High Resolution Quantitative Breast Tissue Tomography," J. Acoust. Soc. Am. **131** (5), 3802–3813 (2012).
12. V. A. Burov, D. I. Zotov, and O. D. Rumyantseva, "Reconstruction of the Sound Velocity and Absorption Spatial Distributions in Soft Biological Tissue Phantoms from Experimental Ultrasound Tomography Data," Akust. Zh. **61** (2), 254–273 (2015) [Acoust. Phys. **61** (2), 231–248 (2015)].
13. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, *Supercomputer Technologies in Development of Diagnostic Tomography Facilities* (Politekh. Univ., St. Petersburg, 2016) [in Russian].
14. A. V. Goncharskii, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, "Low-Frequency Three-Dimensional Ultrasonic Tomography," Dokl. Akad. Nauk **468** (3), 268–271 (2016). [Dokl. Phys. **61** (5), 211–214 (2016)].
15. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "Iterative Methods for Solving Inverse Problems of Ultrasonic Tomography," Vychisl. Metody Programm. **16**, 464–475 (2015).
16. A. N. Tikhonov, "Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method," Dokl. Akad. Nauk SSSR **151** (3), 501–504 (1963) [Sov. Math. Dokl. **5** (4), 1035–1038 (1963)].
17. A. N. Tikhonov, "Regularization of Incorrectly Posed Problems," Dokl. Akad. Nauk SSSR **153** (1), 49–52 (1963) [Sov. Math. Dokl. **4** (6), 1624–1627 (1963)].
18. A. N. Tikhonov and A. V. Goncharsky (Eds), *Ill-Posed Problems in the Natural Sciences* (Mir, Moscow, 1987).
19. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, "Inverse Problems of 3D Ultrasonic Tomography with Complete and Incomplete Range Data," Wave Motion **51** (3), 389–404 (2014).
20. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "The Problem of Choosing Initial Approximations in Inverse Problems of Ultrasound Tomography," Vychisl. Metody Programm. **18**, 312–321 (2017).
21. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, "Problems of Limited-Data Wave Tomography," Vychisl. Metody Programm. **15**, 274–285 (2014).
22. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "Supercomputer Technologies in Tomographic Imaging Applications," Supercomput. Front. Innov. **3** (1), 41–66 (2016).
23. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1976; Dover, New York, 1999).
24. A. Bakushinsky and A. Goncharsky, *Ill-Posed Problems: Theory and Applications* (Springer, Dordrecht, 1994).
25. A. B. Bakushinsky and A. V. Goncharsky, *Iterative Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1989) [in Russian].
26. V. A. Vinokurov, "The Order of Magnitude of the Error in the Computation of a Function with Approximately Defined Argument," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **13** (5), 1112–1123 (1973) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **13** (5), 17–31 (1973)].
27. V. A. Morozov, *Regular Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1974) [in Russian].
28. V. I. Domarkas and R. J. Kazhys, *Piezoelectric Transducers for Measuring Devices* (Mintis, Vilnius, 1975) [in Russian].