

УДК 519.632.4; 519.635.1

doi 10.26089/NumMet.v19r109

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ТРЕУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В. П. Шапеев^{1,2}, В. А. Беляев³

Предложен и реализован новый вариант метода коллокации и наименьших квадратов (КНК) повышенной точности для численного решения краевых задач для уравнений с частными производными (PDE, Partial Differential Equations) в треугольных областях. Реализация этого подхода и численные эксперименты выполнены на примерах решения уравнения Пуассона и бигармонического уравнения. Решение второго уравнения с повышенной точностью использовано для моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) изотропной треугольной пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки. Дифференциальные задачи методом КНК проектируются в пространство полиномов четвертой степени. Граничные условия для приближенного решения задач выписываются точно на границе расчетной области, что позволяет теоретически неограниченно повышать порядок точности метода КНК. В новом варианте используются регулярная сетка с прямоугольными ячейками в области решения задачи и на границе области “одинарный” слой нерегулярных ячеек, отсеченных границей от прямоугольных ячеек начальной регулярной сетки. Треугольные нерегулярные граничные ячейки присоединяются к соседним четырехугольным или пятиугольным ячейкам, и в объединенных ячейках строится свой отдельный кусок аналитического решения. При этом в граничных ячейках, которые пересекла граница, для аппроксимации дифференциальных уравнений использованы “законтурные” (расположенные вне расчетной области) точки коллокации и точки согласования решения задачи. Эти два приема позволили существенно уменьшить обусловленность системы линейных алгебраических уравнений приближенной задачи по сравнению со случаем, когда треугольные ячейки использовались как самостоятельные для построения приближенного решения задачи и не была использована “законтурная” часть граничных ячеек. Показано преимущество рассматриваемого подхода перед подходом с применением отображения треугольной области на прямоугольную. В численных экспериментах по анализу сходимости приближенного решения различных задач на последовательности сеток установлено, что решение сходится с повышенным порядком и с высокой точностью совпадает с аналитическим решением задачи в случае, когда оно известно.

Ключевые слова: метод коллокации и наименьших квадратов, краевая задача, треугольная область, повышенный порядок аппроксимации, уравнение Пуассона, бигармоническое уравнение.

1. Введение. Современное развитие численных методов решения краевых задач математической физики с высокой точностью стимулирует создание и использование новых вычислительных методов и алгоритмов. При этом на свойства вновь создаваемых численных методов накладываются повышенные требования, касающиеся прежде всего вопросов их точности, применимости, эффективного распараллеливания и др. Зачастую вычислителю необходимо решать конкретные задачи в областях со сложной геометрической формой. Актуальность данного направления связана прежде всего с тем, что многие явления в природе, которые моделируются с помощью численных методов, происходят в неканонических областях. Следует отметить, что многие численные методы, обеспечивающие высокую точность решения краевых задач для PDE в прямоугольных областях, не имеют своих аналогов в случае областей, отличных от прямоугольных. Цель представленной работы — показать, как можно справиться с этой проблемой, которая может стать более актуальной в ближайшем будущем.

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; главный науч. сотр., e-mail: shapeev.vasily@mail.ru

² Новосибирский национальный исследовательский университет, механико-математический факультет, ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск; профессор, e-mail: shapeev.vasily@mail.ru

³ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; старший лаборант, e-mail: belyaevasily@mail.ru

В данной работе краевые задачи для PDE решаются с повышенной точностью проекционным, сеточным методом КНК в треугольных областях. В методе КНК путем проектирования задачи для PDE в конечномерное линейное функциональное пространство ставится в соответствие приближенная задача, решение которой сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [1]. Решение последней определяет приближенное решение дифференциальной задачи. Поскольку в настоящей работе в методе КНК приближенное решение является кусочно-полиномиальным, в нем относительно просто реализуются варианты метода в областях различной формы и на сетках с различной формой ячеек [2–5], в том числе варианты повышенной точности и на адаптивных сетках [6].

В настоящее время особое внимание уделяется численным методам, которые применимы на неструктурированных сетках. При построении неструктурированных сеток возникает ряд проблем, связанных, например, с триангуляцией области. Из-за произвольности области при ее триангуляции не всегда удается избежать появления сильно вытянутых ячеек, что является одной из причин плохой обусловленности СЛАУ приближенной задачи. В работе [4] было показано, что появление малых и вытянутых ячеек в случае плохо обусловленных дифференциальных задач и аппроксимирующих их приближенных задач, наследующих их плохую обусловленность, создает трудности при попытках достичь высокую точность численного решения. Кроме того, нерегулярность сетки внутри области существенно усложняет программную реализацию решения приближенной задачи, например в сравнении со случаем, когда нужно запрограммировать и реализовать для каждой ячейки поиск соседних ячеек на регулярной сетке. Эта задача в первом случае приводит к увеличению программы и времени решения задачи на ЭВМ. Например, в работах [7, 8] было указано на недостаток использования представления структурных данных о пространственной дискретизации в виде квадродеревьев и октодеревьев, так как в этих случаях требуется дополнительный расход машинного времени для обхода дерева от его корня до нужного листа.

Популярна идея решения краевых задач для PDE в неканонических областях путем отображения области со сложной границей в каноническую область, для которой затем уже применяется численный метод. Существенный недостаток такого подхода заключается в том, что при отображении области из-за замены переменных меняется вид исходных дифференциальных уравнений. Это можно видеть на примере решения уравнения Пуассона в круге при переходе в полярную систему координат. Такой переход дает отображение круга в прямоугольник. В преобразованном уравнении Пуассона перед производными возникают коэффициенты вида $1/\rho$ и $1/\rho^2$, где ρ — радиальная независимая переменная полярной системы координат. При $\rho \rightarrow 0$ в полярной системе координат в численном решении задачи возникает неустранимая особенность, которая не позволяет решить эту задачу численными методами с высокой точностью [8, 9]. В рамках нашей работы также будет показан этот недостаток в случае треугольной области.

В представленной работе реализован новый вариант метода КНК с применением внутри треугольных областей регулярной сетки с прямоугольными ячейками, а около границы области “одинарного” слоя нерегулярных ячеек (далее, n -ячеек), отсеченных границей частей от расположенных на ней прямоугольных ячеек. Кроме того, треугольные n -ячейки, отсеченные границей области от прямоугольных ячеек начальной регулярной сетки, присоединялись к соседним четырехугольным или пятиугольным ячейкам [2–5]. Этот прием позволил существенно уменьшить обусловленность СЛАУ приближенной задачи и, как следствие, в сходящемся итерационном процессе сократить число итераций, необходимых для достижения заданной точности решения по сравнению со случаем, когда треугольные n -ячейки наряду с другими ячейками использовались как самостоятельные для построения приближенного решения задачи.

В целях достижения аппроксимации повышенной точности дифференциальной задачи применялись “законтурные” [2–5], не принадлежащие области решения дифференциальной задачи части граничных прямоугольных ячеек, отсеченных границей области. Чтобы такой подход с использованием “законтурных” частей граничных ячеек был применим, как и в случае других численных методов, предполагается, что решаемое уравнение справедливо не только в расчетной области, но и в малой окрестности ее границы. Возможности предложенного подхода были проверены на решении краевых задач для уравнения Пуассона и для бигармонического уравнения, которое описывает НДС изотропной треугольной пластины под различными нагрузками. Ранее были реализованы различные варианты метода КНК для расчета НДС пластин с криволинейной границей [2, 5], выпуклых четырехугольных пластин [3–5] и прямоугольных пластин из изотропных и анизотропных композиционных материалов [10, 11].

В настоящей работе для задач в случае треугольной пластины с известным точным решением показаны высокая точность и быстрая сходимость предложенного варианта метода КНК. В случаях, когда точное решение не известно, показан высокий порядок сходимости численного решения. Детальное описание алгоритма метода КНК дано ниже.

2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона.

2.1. Постановка задачи и описание метода. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ u|_{\delta\Omega} = g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1)$$

в треугольной области Ω с границей $\delta\Omega$ (рис. 1а), где $u(x_1, x_2)$ — искомая функция, $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ — заданные функции. Реализация рассматриваемых вариантов метода КНК решения других краевых задач для уравнения Пуассона осуществляется аналогично алгоритму, описанному далее.

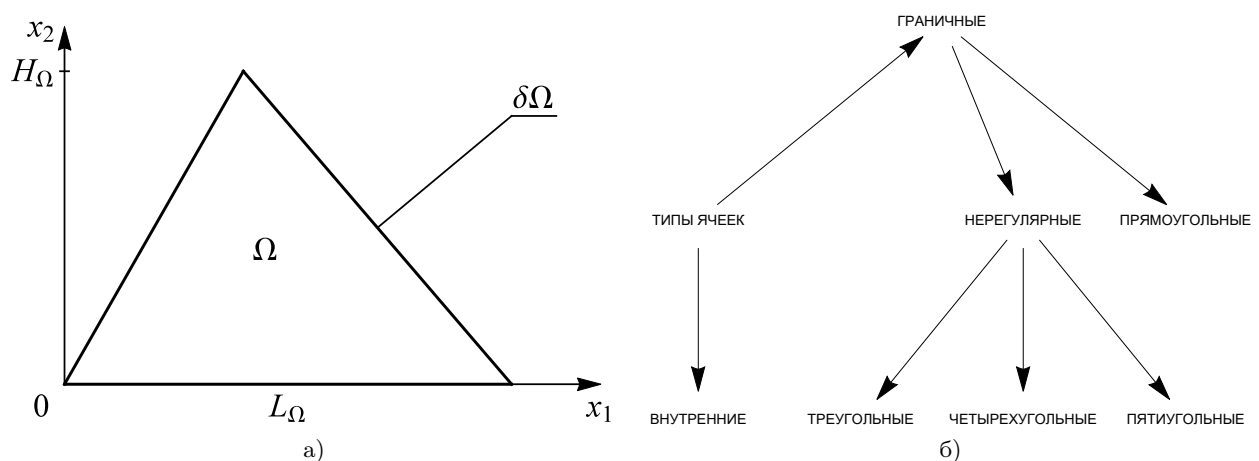


Рис. 1. Область решения задачи (а) и схема взаимосвязи между типами ячеек (б)

Без ограничения общности самую длинную сторону треугольника расположим на оси x_1 . Пусть L_Ω — длина нижнего основания, H_Ω — длина высоты треугольника Ω , проведенной из вершины треугольника к нижнему основанию. Впишем расчетную область Ω в прямоугольник, две стороны которого, равные L_Ω , параллельны оси x_1 . Одна из этих сторон совпадает с основанием треугольника на оси x_1 , вторая проходит через противоположную ему вершину треугольника, а две другие стороны, равные H_Ω , параллельны оси x_2 и проходят через концы нижнего основания. Полученный прямоугольник покроем регулярной сеткой с прямоугольными ячейками Ω_j размера $2h_1 \times 2h_2$, $j = 1, \dots, N$, $N = N_1 \times N_2$ — количество ячеек. При этом для реализованного в этой работе варианта метода не существенно попадание верхней вершины треугольника на вертикальную координатную линию сетки.

Прямоугольные ячейки сетки, которые полностью расположены внутри области, назовем внутренними (рис. 2, ячейки 7, 8, 13). Прямоугольные ячейки, пересеченные границей области, для краткости здесь назовем граничными (рис. 2, ячейки 1–6, 9–12, 14, 17, 18, 22, 23). При этом, если одна из сторон прямоугольной ячейки или хотя бы одна из вершин совпадает с границей области (рис. 2, ячейки 2–4), то такую ячейку для однозначности считаем граничной, а не внутренней. Далее считаем, что на рис. 2 номера граничных ячеек совпадают с номерами их внутренних н-ячеек. Часть граничной ячейки непрямоугольной формы, отсеченную границей и лежащую внутри области, назовем н-ячейкой (рис. 2, н-ячейки 1, 5, 6, 10–12, 14, 17–19, 22, 23). При этом часть граничной ячейки, лежащую вне области, назовем “законтурной”. Прямоугольную ячейку сетки, от которой границей области отсечена н-ячейка, назовем коротко материнской. Назовем внешней стороной граничной ячейки часть границы области, которая оказалась внутри граничной ячейки. Стороны любых ячеек, расположенные внутри области, назовем внутренними сторонами ячеек. Решение в прямоугольных ячейках, которые лежат вне области Ω , естественно, не строим (рис. 2, ячейки 15, 16, 20, 21, 24, 25). Схема взаимосвязи типов ячеек приведена на рис. 1б.

Замечание 1. Можно полагать, что шаги сетки в направлениях осей x_1 и x_2 переменные. Это обстоятельство несущественно с точки зрения подхода применения описываемой здесь сетки с наличием н-ячеек в неканонической области. Это позволяет помещать вершины треугольной области в узлах сетки. Кроме того, важно, что переменный шаг сетки позволяет осуществить некоторую адаптацию сетки к особенностям решения, например учесть некоторое различие градиентов решения в различных частях области.

Для удобства реализации метода во внутренних и граничных ячейках области введем локальную

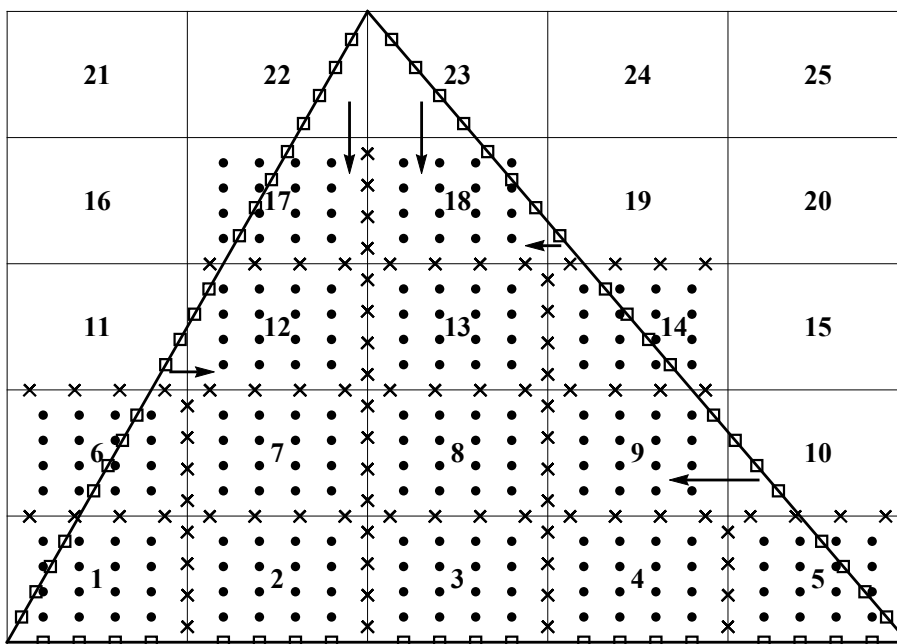


Рис. 2. Расчетная область (размер сетки 5×5). Здесь \bullet обозначает точки записи уравнений коллокации, \times — точки записи условий согласования, \square — точки записи краевых условий. Треугольная н-ячейка 10 присоединяется к пятиугольной н-ячейке 9, треугольная н-ячейка 11 к пятиугольной н-ячейке 12, треугольная н-ячейка 22 к четырехугольной н-ячейке 17, треугольные н-ячейки 19 и 23 к пятиугольной н-ячейке 18. Стрелками показана схема присоединения треугольных н-ячеек к соседним четырехугольным или пятиугольным ячейкам

систему координат с началом в центре ячейки:

$$y_1 = \frac{(x_1 - x_{1j})}{h_1}, \quad y_2 = \frac{(x_2 - x_{2j})}{h_2}, \tag{2}$$

где (x_{1j}, x_{2j}) — центр j -й ячейки, $v(y_1, y_2) = u(x_1(y_1), x_2(y_2))$. Координаты центра ячейки в данном случае определяются как средние арифметические величины от соответствующих координат ее вершин. Задача (1) после замены (2) в локальных переменных примет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} = f(x_1(y_1), x_2(y_2)), & (y_1, y_2) \in \Omega_j \subset \Omega, \\ v = g(x_1(y_1), x_2(y_2)), & (y_1, y_2) \in \delta\Omega \cap \delta\Omega_j, \quad j = 1, \dots, N. \end{cases} \tag{3}$$

В каждой j -й ячейке сетки приближенное решение v_{hj} задачи (3) ищем в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами базисных элементов пространства полиномов четвертой степени от двух переменных. Здесь в качестве базисных элементов $\phi_i(y_1, y_2)$ ($i = 1, \dots, 15$) взяты мономы

$$v_{hj}(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{15} b_{ij} \phi_i = b_{1j} + b_{2j}y_1 + b_{3j}y_2 + b_{4j}y_1^2 + b_{5j}y_2^2 + b_{6j}y_1y_2 + b_{7j}y_1^2y_2 + b_{8j}y_1y_2^2 + b_{9j}y_1^2y_2^2 + b_{10j}y_1^3 + b_{11j}y_2^3 + b_{12j}y_1^3y_2 + b_{13j}y_1y_2^3 + b_{14j}y_1^4 + b_{15j}y_2^4.$$

Глобальное приближенное решение будет состоять из “локальных” аналитических “кусков”, связанных с центром соответствующей ячейки. Для определения неизвестных коэффициентов b_{ij} в каждой ячейке выписывается переопределенная “локальная” (частичная) СЛАУ. Она состоит из переопределенной системы уравнений, состоящей в каждой ячейке из уравнений коллокации, условий согласования на общих сторонах, принадлежащих двум соседним ячейкам, и краевых условий на $\delta\Omega$, если ячейка является граничной [12–15]. Объединение всех частичных СЛАУ определяет глобальное решение. При реализации представленного в этой работе варианта метода КНК число точек записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий в каждой ячейке в сумме было равно 32.

Определим по следующему алгоритму расстановку точек коллокации, записи условий согласования в любой ячейке или краевых условий для граничной ячейки. В каждой ячейке для точек коллокации возьмем следующие локальные координаты: $\left(\pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{5}\right)$, $\left(\pm\frac{1}{5}, \pm\frac{3}{5}\right)$, $\left(\pm\frac{3}{5}, \pm\frac{1}{5}\right)$, $\left(\pm\frac{3}{5}, \pm\frac{3}{5}\right)$ (рис. 2).

Если у ячейки есть соседняя ячейка, то их общую сторону (в случае граничных ячеек — общую сторону материнской ячейки) поделим на четыре равных отрезка. В середине каждого отрезка запишем условия согласования (рис. 2). Очевидно, что в некоторых граничных ячейках точки для записи уравнений коллокации или условий согласования расположены вне области Ω (рис. 2, н-ячейки 1, 5, 6, 14 и объединенные ячейки (определение см. ниже) 9, 12, 17, 18).

Следует сказать, что использование “законтурных” частей граничных ячеек имеет два существенно положительных обстоятельства. Во-первых, программная реализация расстановки точек коллокации и условий согласования проще, чем в случаях без использования законтурных частей ячеек. Во-вторых, если в граничных н-ячейках не использовать “законтурную” часть для записи вышеуказанных уравнений, при этом расставляя точки коллокации и согласования внутри н-ячейки, то обязательно будут возникать ситуации при $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \rightarrow 0$, когда появляются маленькие н-ячейки (в сравнении с их материнскими ячейками) и соответствующие им большие “законтурные” части ячеек. Ввиду того, что у таких ячеек слишком маленькая внутренняя часть, при записи внутри уравнений коллокации и на внутренних сторонах условий согласования получаются уравнения, близкие к линейно зависимым. Поэтому глобальная СЛАУ приближенной задачи становится плохо обусловленной.

На любой внешней стороне граничной ячейки запишем столько краевых условий приближенной задачи, чтобы в совокупности с другими уравнениями в этой ячейке число уравнений локальной СЛАУ было равно числу уравнений во внутренней ячейке области. Для этого внешнюю сторону любой граничной ячейки поделим на соответствующее число равных (или приблизительно равных) отрезков, в серединах которых расположим точки для записи краевых условий (рис. 2).

В экспериментах с точными решениями задач установлено, что небольшие сдвиги точек записи краевых условий изменяют погрешность решения на малые или на более высокого порядка малости (в случае высокого порядка сходимости погрешности приближенного решения) величины по отношению к величинам сдвига точек.

Можно отметить, что существует много различных способов расстановки точек для записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий. При этом во многих случаях полученные приближенные решения будут с высокой точностью совпадать друг с другом. Расстановка точек для записи перечисленных уравнений, в некоторой мере близкая к симметричной и равномерной, в методе КНК дает хорошие результаты. В рамках этой работы также были испытаны другие варианты расстановки точек для записи уравнений коллокации и условий согласования. В итоге многих проведенных численных экспериментов было установлено, что лучшие по точности результаты были получены в том случае, когда применялся описанный в этой работе алгоритм расстановки точек.

В этом варианте алгоритма все треугольные н-ячейки присоединяются к соседним ячейкам, с которыми имеют наибольшей длины общую сторону. Через эту сторону в соответствующую материнскую ячейку присоединенной н-ячейки продолжается решение, записанное в локальной системе координат из четырехугольной (или пятиугольной) ячейки, к которой присоединили н-ячейку. Иными словами, в объединенной ячейке — единые локальная система координат и формула решения. При этом в ячейке (к которой не присоединяется треугольная н-ячейка и которая в свою очередь тоже не является треугольной н-ячейкой изначально), соседней с треугольной н-ячейкой, в точках, расположенных на общей стороне их материнских ячеек, решение согласуется с решением в объединенной ячейке. Например, на рис. 2 решение в ячейке 14 согласуется с решением, продолженным из объединенной ячейки 18 в материнскую ячейку 19. Заметим, что согласно сформулированному правилу к четырехугольной (или пятиугольной) ячейке могут быть присоединены одна, две или три треугольные н-ячейки. Полученную ячейку назовем объединенной, ее также считаем н-ячейкой. В этом случае внешняя сторона объединенной ячейки состоит из внешних сторон всех объединенных в ней ячеек. На этой внешней стороне равномерно расставляются столько точек для записи краевых условий, чтобы в сумме число точек записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий в объединенной ячейке было равно 32. Эти краевые условия включаются в переопределенную систему уравнений этой ячейки. Если треугольная ячейка имеет с двумя соседними ячейками одинаковой длины общие стороны, то для однозначности алгоритма решено присоединять такую ячейку к той соседней с ней, у которой наименьший порядковый номер j в последовательности перечисления всех ячеек в области. Процедура присоединения треугольных ячеек выполняется однократно перед началом численного решения задачи. Иными словами, если после присоединения одной треугольной ячейки к со-

седней с ней объединенная ячейка оказалась треугольного вида (рис. 2, объединенные ячейки 17, 18), то такая объединенная ячейка уже не присоединяется к соседним. При использовании в процессе решения задачи многосеточного комплекса с несколькими сетками процедура присоединения треугольных ячеек при переходе на очередную сетку комплекса (например, в операции продолжения “prolongation”) тоже выполняется однократно до начала расчета решения на этой сетке.

Замечание 2. На рис. 2 номера объединенных ячеек наследуются от номеров исходных ячеек, к которым присоединили n -ячейки. Например, сначала на рис. 2 номер 9 обозначал пятиугольную n -ячейку. После присоединения треугольной n -ячейки 10 к n -ячейке 9 объединенная четырехугольная n -ячейка имеет тоже номер 9.

На рис. 2 изображена расчетная область, покрытая регулярной сеткой с прямоугольными ячейками. В получившихся расчетных ячейках по сформулированным выше правилам расставлены точки записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий.

Уравнения коллокации в каждой j -й ячейке выписываются в 16 точках коллокации и имеют вид

$$\frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 v_{hj}(y_{1c}, y_{2c})}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 v_{hj}(y_{1c}, y_{2c})}{\partial y_2^2} = f(x_1(y_{1c}), x_2(y_{2c})),$$

где (y_{1c}, y_{2c}) — точки коллокации, $c = 1, \dots, 16$.

В качестве условия согласования решения в четырех указанных выше точках согласования на каждой общей стороне между соседними ячейками требуем непрерывность линейной комбинации с весами функции v и ее производной по нормали:

$$\frac{k_1}{h_{n_j}} \frac{\partial v_{hj}^+}{\partial n_j} + k_2 v_{hj}^+ = \frac{k_1}{h_{n_j}} \frac{\partial v_{hj}^-}{\partial n_j} + k_2 v_{hj}^-.$$

Здесь n_j — внешняя нормаль к границе j -й ячейки; $h_{n_j} = h_1$, если направление n_j совпадает с направлением оси y_1 , и $h_{n_j} = h_2$, если направление n_j совпадает с направлением оси y_2 ; v_{hj}^+ и v_{hj}^- — пределы функции при стремлении изнутри и извне к границе j -й ячейки соответственно; k_1, k_2 — весовые параметры.

Если сторона j -й ячейки совпадает с некоторым куском границы области, то в указанных выше точках на ней выпишем краевые условия

$$k_3 v_{hj} = k_3 g(x_1, x_2),$$

где k_3 — весовой параметр краевого условия в переопределенной системе уравнений.

Как показано в [12], значения весовых параметров влияют в некоторых пределах на величину погрешности приближенного решения задачи, скорость сходимости итераций и обусловленность СЛАУ, из которой определяются коэффициенты приближенного решения. Однако погрешность приближенного решения определяется прежде всего порядком аппроксимации дифференциальной задачи дискретной задачей и существенно зависит от значения старшей степени полиномов в базисе используемого для этого пространства. Как показывает опыт решения краевых задач методом КНК, во многих случаях можно положить $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ и получить решение, сходящееся на последовательности сеток без необходимости поиска оптимальных значений этих параметров.

В каждой ячейке, объединяя уравнения коллокации, условия согласования и краевые условия (в случае граничных ячеек), относительно неизвестных коэффициентов b_{ij} получим переопределенную СЛАУ вида

$$\sum_{i=1}^{15} B_{li} b_{ij} = F_l, \quad l = 1, \dots, 32, \quad j = 1, \dots, N, \tag{4}$$

определяющую приближенно локальное решение в окрестности начала локальной системы координат в ячейке. Для того чтобы определить, что понимается под решением этой системы, рассмотрим функционал

$$\Phi = \sum_{l=1}^{32} \left(\sum_{i=1}^{15} B_{li} b_{ij} - F_l \right)^2.$$

Он представляет собой сумму квадратов невязок всех уравнений в ячейке на приближенном решении задачи. Решение системы (4) на каждой итерации находится из условия минимума функционала Φ по коэффициентам b_{ij} , $i = 1, \dots, 15$. Система уравнений, полученная объединением уравнений во всех ячейках расчетной области (глобальная СЛАУ), решается в итерационном процессе Гаусса–Зейделя. В ней одна “глобальная итерация” состоит из последовательного решения локальных СЛАУ (4) во всех ячейках

области. Здесь и далее в условиях согласования значения решения в соседних ячейках брались с предыдущей итерации, если они не были сосчитаны на текущей итерации, или в противном случае их значения брались с текущей итерации. При построении решения в каждой ячейке матрица системы из 32 уравнений приводится к верхнетреугольному виду ортогональным методом вращений Гивенса [4].

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{ij} |b_{ij}^{n+1} - b_{ij}^n| < \epsilon, \quad (5)$$

где b_{ij}^n — i -й ($i = 1, \dots, 15$) коэффициент полинома, аппроксимирующего решение в ячейке с номером j на n -й итерации. Величина ϵ — заданная константа, называемая псевдопогрешностью решения. Ее значение выбирается таким, чтобы погрешность решения глобальной СЛАУ была существенно меньше погрешности аппроксимации исходной задачи. Однако не составляет труда запрограммировать критерий прекращения итераций по достижении малости различия приближенного решения, полученного на соседних итерациях. Однако тогда в отличие от критерия (5) необходимо подсчитывать значение решения на каждой итерации, что увеличивает время расчета.

2.2. Численные эксперименты и результаты расчетов. В численных экспериментах на сходимость решения на последовательности сеток при измельчении шагов сетки вдвое рассматривалась задача (1) в треугольных областях. В качестве тестовых решений здесь брались аналитические функции, подстановкой которых в уравнения подбирались их правая часть, в том числе и в части экспериментов в разделе 3, для того, чтобы эти функции удовлетворяли рассматриваемым дифференциальным уравнениям. Краевые условия брались из значений тестовых функций и их производных на $\delta\Omega$. Во всех представленных таблицах в этом пункте приведены значения погрешности приближенного решения в равномерной норме

$$\|u - u_h\|_c = \max_{j=1, \dots, N} \left(\max_{s=1, \dots, L_j} |u(x_{1s}, x_{2s}) - u_{hj}(x_{1s}, x_{2s})| \right),$$

где N — количество расчетных ячеек в области, L_j — количество равномерно распределенных контрольных точек (x_{1s}, x_{2s}) , взятых в j -й ячейке для подсчета в них погрешности, u — точное решение задачи (1), u_h — приближенное решение в области Ω , u_{hj} — приближенное решение в j -й ячейке. Порядок сходимости решения формально определяется следующим образом:

$$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}, \quad (6)$$

где E_{N_1, N_2} — значение абсолютной погрешности на сетке размера $N = N_1 \times N_2$, $E_{N_1/2, N_2/2}$ — значение абсолютной погрешности на сетке $N_1/2 \times N_2/2$, так как в случае нерегулярной сетки, строго говоря, определение порядка сходимости отсутствует. Тем не менее, величина (6) показывает порядок малости погрешности решения относительно малой величины шага сетки.

Таблица 1

Результаты численного эксперимента с решением $u(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$ тестовой задачи (1) в области с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.4, 0.7)$

$N_1 \times N_2$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
10×10	2.26×10^{-8}	140	—
20×20	7.90×10^{-10}	173	4.83
40×40	2.53×10^{-11}	221	4.96
80×80	7.92×10^{-13}	678	4.99

Таблица 2

Результаты численного эксперимента с решением $u(x_1, x_2) = e^{10x_1} + e^{10x_2} + e^{5x_1+5x_2}$, имеющим большие градиенты, в области с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.8, 0.6)$. Здесь $\epsilon = 0.5 \times 10^{-10}$

$N_1 \times N_2$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
20×20	1.12×10^{-1}	158	—
40×40	4.69×10^{-3}	228	4.57
80×80	1.91×10^{-4}	746	4.61
160×160	1.18×10^{-5}	2590	4.01

В численных экспериментах в одном случае были взяты следующие значения параметров: $L_j = 100$, $\epsilon = 10^{-14}$, $k_1 = 1$, $k_2 = 5 \left(|\cos(\alpha)|h_1 + |\sin(\alpha)|h_2 \right)$, $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ — координаты внешней нормали к стороне ячейки ($\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$), $k_3 = 1.5$. Во всех численных экспериментах здесь в начальном приближении решения взяты $b_{ij} = 0.4$, где $i = 1, \dots, 15$, $j = 1, \dots, N$. Обозначим через N_{iter} количество итераций. В расчетах использовано комбинированное применение операции продолжения на многосеточном комплексе в методе Федоренко и на каждой промежуточной сетке комплекса метода ускорения сходимости

итерационного процесса, основанного на подпространствах Крылова [16–19]. Такой прием ускорения итерационного процесса дал многократное сокращение времени решения задачи по сравнению со случаем без его применения.

Из приведенных табл. 1–3 видно, что численное решение имеет порядок сходимости не хуже четвертого, что обеспечено высокой степенью базисных полиномов в рассматриваемом функциональном пространстве. При этом в коэффициент остаточного члена аппроксимации задачи с большими градиентами решения и искомой функции в краевом условии (табл. 2) входят большие значения производных решения. Поэтому на рассматриваемой сетке погрешность решения существенно больше, чем в случае решения тестовой задачи без особенностей. Близкие по точности решения результаты ранее были получены в случае решения этой задачи в других неканонических областях [2–5]. Это говорит о достоинствах рассматриваемого здесь подхода. Некоторая потеря точности решения в сложной области по сравнению со случаем прямоугольной области прежде всего связана с наличием н-ячеек. Все приведенные здесь численные эксперименты проведены на сетках, равномерных внутри области по каждому координатному направлению.

Таблица 3
Результаты численного эксперимента с решением $u(x_1, x_2) = \sin(x_1) + \sin(x_2)$ тестовой задачи (1) в области с вершинами $(0, 0), (1, 0), (0.3, 0.2)$

$N_1 \times N_2$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
5×25	5.60×10^{-10}	156	—
10×50	3.07×10^{-11}	129	4.18
20×100	1.63×10^{-12}	156	4.23

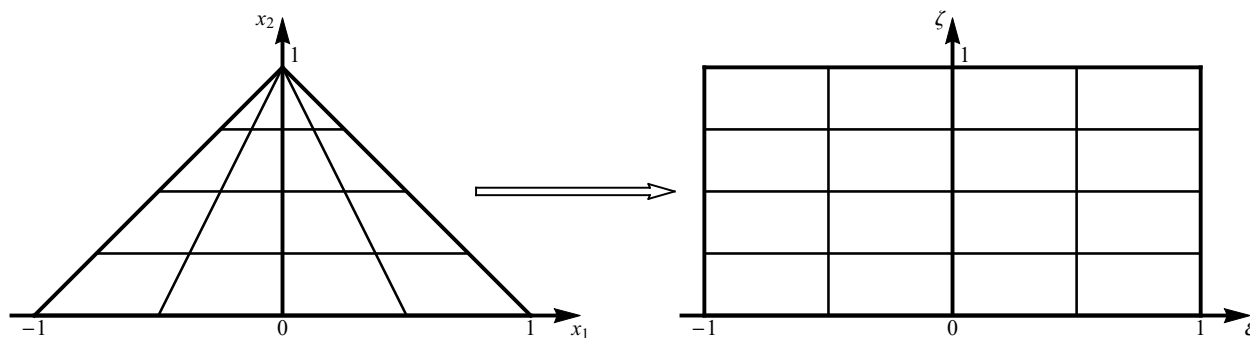


Рис. 3. “Квазирегулярная” сетка в треугольнике в плоскости (x_1, x_2) (слева) и регулярная сетка в прямоугольнике в плоскости (ξ, ζ) (справа)

2.3. Отображение треугольной области в прямоугольник. Без н-ячеек можно обойтись, если применить отображение треугольника на прямоугольник с особой точкой отображения — вершиной треугольника (рис. 3, слева), которой будет соответствовать одна из сторон прямоугольника. Обратное отображение переводит регулярную сетку с прямоугольными ячейками, заданную в прямоугольнике, в “квазирегулярную” сетку в треугольнике, у которой ячейки имеют трапециевидную форму за исключением ячеек в окрестности особой точки — вершине треугольника, около которой будет слой треугольных ячеек.

В плоскости (x_1, x_2) рассмотрим треугольник с вершинами в точках $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$ (рис. 3, слева). Замена переменных

$$\xi = x_1 / (1 - x_2), \quad \zeta = x_2 \tag{7}$$

задает отображение этого треугольника в прямоугольник в плоскости (ξ, ζ) с вершинами в точках $(-1, 0), (1, 0), (1, 1), (-1, 1)$. Построим в этой канонической области регулярную сетку с прямоугольными ячейками. Обратная замена переменных

$$x_1 = (1 - \zeta)\xi, \quad x_2 = \zeta \tag{8}$$

отображает ее в “квазирегулярную” сетку в треугольнике. По правилу дифференцирования сложной функции получим выражения для первых производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \frac{1}{1 - x_2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{1 - \zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = \frac{\xi}{1 - \zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

Выражения для вторых производных имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \frac{1}{(1-\zeta)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = \\ &= \frac{\xi}{1-\zeta} \left(\frac{\xi}{1-\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{1}{1-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\xi}{1-\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\xi}{(1-\zeta)^2} \frac{\partial u}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, подставляя (9) и (10) в (1), получим дифференциальное уравнение Пуассона в новых переменных (ξ, ζ) в прямоугольной области (рис. 3, справа):

$$\Delta u(x_1(\xi, \zeta), x_2(\zeta)) = \frac{1 + \xi^2}{(1-\zeta)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{2\xi}{1-\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{2\xi}{(1-\zeta)^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = f(x_1(\xi, \zeta), x_2(\zeta)). \quad (11)$$

Замена переменных (7) имеет особенность в точке $(0, 1)$ плоскости (x_1, x_2) , с которой связана особенность обратного отображения на верхней стороне прямоугольника, порождающая особенность в коэффициентах уравнения (11) при $\zeta = 1$. Без специальных приемов выделения и исключения особенности в решении уравнения (11) при $\zeta \rightarrow 1$ возникает неустранимая погрешность в приближенном решении краевых задач для уравнения (11) при применении численных методов. Естественно, метод КНК в этой ситуации не является исключением.

Проведем численный эксперимент решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (11) в прямоугольнике на последовательности регулярных сеток с прямоугольными ячейками в плоскости переменных (ξ, ζ) .

В качестве тестового решения возьмем $u(\xi, \zeta) = e^{\alpha\xi - \alpha\xi\zeta + \beta\zeta}$. Уравнение (11) будет иметь это решение, если ее правая часть $f(x_1(\xi, \zeta), x_2(\zeta)) = (\alpha^2 + \beta^2)e^{\alpha\xi - \alpha\xi\zeta + \beta\zeta}$. Ранее было показано, что при решении задачи Дирихле без особенностей для уравнения Пуассона в четырехугольнике (в том числе и в прямоугольнике) методом КНК в пространстве полиномов четвертой степени имеет место высокие порядок сходимости и точность численного решения на такой сетке [4]. В табл. 4 приведены результаты численного эксперимента, из которого видно, что абсолютная погрешность решения сразу достигла своего предельного значения 10^{-2} на сетке 5×10 . В дальнейшем она не уменьшается при измельчении шагов сетки. Картина поведения погрешности решения в этом эксперименте характерна для случаев применения какого-либо из многих численных методов к решению задачи, в которой присутствует особенность. Нетрудно понять, что аналогичное поведение численного решения будет иметь место при решении этой задачи в переменных (x_1, x_2) в треугольной области на последовательности “квазирегулярных” сеток, которые получаются отображением (8) описанной последовательности сеток в прямоугольнике. Результат эксперимента не приводим. Ситуация, аналогичная указанной здесь, имеет место при решении задач для PDE в полярных координатах в областях, содержащих начало координат. Однако, как было показано выше и как будет показано далее, решение краевых задач для PDE в треугольной области описанным выше вариантом метода КНК позволяет получать их приближенные решения с высокими порядками сходимости и точности.

3. Бигармоническое уравнение.

3.1. Постановка задачи и описание метода. Пусть требуется определить НДС упругой изотропной треугольной пластины, закрепленной на краях и находящейся под действием поперечных нагрузок произвольного вида. При этом нагрузки такие, что материал деформированной пластины остается упругим. Пластина предполагается тонкой, что позволяет свести трехмерную задачу теории упругости к двумерной задаче теории тонких пластин. Следуя Тимошенко [20], разрешающую систему уравнений запишем в перемещениях, определив которые, можно будет полностью восстановить НДС пластины. В этом случае величины прогибов пластины определяются из решения бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = \frac{q(x_1, x_2)}{D}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (12)$$

Таблица 4

Результаты численного эксперимента с решением $u(\zeta, \xi) = e^{\alpha\xi - \alpha\xi\zeta + \beta\zeta}$ тестовой задачи (1) в новых переменных в прямоугольной области с вершинами $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$

$N_1 \times N_2$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}
5×10	7.97×10^{-2}	81
10×20	7.72×10^{-2}	95
20×40	7.61×10^{-2}	172
40×80	7.60×10^{-2}	458

В уравнении (12) $w(x_1, x_2)$ — прогиб срединной поверхности пластины, $q(x_1, x_2)$ — поперечная нагрузка, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ — жесткость пластины при изгибе, h — толщина пластины, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропного материала пластины, треугольная область Ω — проекция срединной поверхности пластины на плоскость (x_1, x_2) . На каждом куске границы (края) пластины может быть задано одно из следующих условий закрепления:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{— защемленный край;} \quad (13)$$

$$w = 0, \quad M_n w = 0 \quad \text{— шарнирно закрепленный край;} \quad (14)$$

$$M_n w = 0, \quad V_n w = 0 \quad \text{— свободный край.} \quad (15)$$

Здесь и далее n — внешняя нормаль к границе области $\partial\Omega$, M_n — дифференциальный оператор второго порядка, V_n — дифференциальный оператор третьего порядка; дифференциальные операторы M_n и V_n взяты из [20]. Условие (15) может быть задано только на некоторой части границы, а на оставшейся ее части должны быть заданы другие условия, иначе задача некорректна.

Область Ω покрывается расчетной сеткой с прямоугольными ячейками Ω_j ($j = 1, \dots, N$, N — число расчетных ячеек сетки). Далее применим к поставленной задаче алгоритм, аналогичный описанному выше. Отличия будут в записи уравнений дискретной задачи.

В каждой ячейке Ω_j делается переход к локальным переменным (y_1, y_2) . Для определения решения $w_{hj}(y_1, y_2)$ в Ω_j на k -й итерации выписываются:

1) уравнения коллокации

$$\frac{h_2^2}{h_1^2} \frac{\partial^4 w_{hj}^k}{\partial y_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{hj}^k}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} + \frac{h_1^2}{h_2^2} \frac{\partial^4 w_{hj}^k}{\partial y_2^4} = h_1^2 h_2^2 \frac{q(y_1, y_2)}{D}, \quad (y_1, y_2) \in \Omega_j \quad (16)$$

— требования удовлетворения приближенным решением уравнению (12) в заданных точках коллокации;
2) условия согласования

$$w_{hj}^k + \frac{p_1}{h_{n_j}} \frac{\partial w_{hj}^k}{\partial n_j} = w_{hadj} + \frac{p_1}{h_{n_j}} \frac{\partial w_{hadj}}{\partial n_j}, \quad (y_1, y_2) \in \partial\Omega_j \setminus \partial\Omega,$$

$$\frac{\partial^2 w_{hj}^k}{\partial n_j^2} + \frac{p_2}{h_{n_j}} \frac{\partial^3 w_{hj}^k}{\partial n_j^3} = \frac{\partial^2 w_{hadj}}{\partial n_j^2} + \frac{p_2}{h_{n_j}} \frac{\partial^3 w_{hadj}}{\partial n_j^3}, \quad (y_1, y_2) \in \partial\Omega_j \setminus \partial\Omega$$

— условия согласования решения w_{hj} с решением в соседней ячейке w_{hadj} в точках согласования на общей с соседней ячейкой стороне, где n_j — внешняя нормаль к границе j -й ячейки, $h_{n_j} = h_1$, если направление n_j совпадает с направлением оси y_1 , и $h_{n_j} = h_2$, если направление n_j совпадает с направлением оси y_2 ;

3) краевые условия в указанных выше точках записи краевых условий на внешней стороне ячейки, если она граничная.

В данном случае в каждой ячейке выписывается переопределенная система из 48 уравнений: 16 уравнений коллокации и по два уравнения в каждой точке для записи условий согласования или краевых условий.

3.2. Численные эксперименты.

3.2.1. Пластина под специальной нагрузкой. Рассмотрим шарнирно закрепленную на краях прямоугольную пластину размера $d_1 \times d_2$, находящуюся под действием нагрузки q (Па) вида

$$q = 10^5 \sin\left(\frac{\pi x_1}{d_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{d_2}\right).$$

В этом случае задача имеет точное аналитическое решение [20]

$$w(x_1, x_2) = \frac{q d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + d_2^2)^2}. \quad (17)$$

Пусть проекция срединной поверхности пластины на плоскость (x_1, x_2) имеет форму треугольной области Ω с вершинами $(0, 0)$, $(7, 0)$, $(5, 4)$. Для того чтобы воспользоваться приведенным аналитическим

решением в качестве теста, в численном эксперименте зададим на границе $\delta\Omega$ точные значения функции w (17) и изгибающего момента $M_n w$. Ранее в [10] методом КНК была решена задача для прямоугольной пластины. В расчетах использовались следующие параметры: $d_1 = 7$ м, $d_2 = 4$ м, $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $\epsilon = 10^{-10}$. Здесь значения параметров p_1 и p_2 в условиях согласования взяты из работы [10]. Для определения порядка сходимости проведены численные эксперименты на последовательности сеток с уменьшением шага сетки вдвое. Для расчета погрешности в каждой расчетной ячейке равномерно распределялись 100 контрольных точек. Относительная погрешность численного решения во всей области вычислялась в этих точках по формуле

$$E_{N_1, N_2} = \frac{\max_{(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}} |w(x_1, x_2) - w_h(x_1, x_2)|}{\max_{(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}} |w(x_1, x_2)|},$$

где $w_h(x_1, x_2)$ — приближенное решение, полученное методом КНК, $N = N_1 \times N_2$ — размер сетки, \mathfrak{M} — множество всех заданных в области контрольных точек. Формальный порядок сходимости решения в данной работе вычислялся по формуле (6). Аналогично разделу 2, в расчетах использовано комбинированное применение операции продолжения на многосеточном комплексе в методе Федоренко и на каждой промежуточной сетке комплекса метода ускорения сходимости итерационного процесса, основанного на подпространствах Крылова. В табл. 5 приведены результаты численного эксперимента. Из этой таблицы видно, что порядок сходимости решения не ниже третьего.

Таблица 5
Результаты численного эксперимента для
треугольной пластины с вершинами:
(0, 0), (7, 0), (5, 4)

$N_1 \times N_2$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
10×10	4.86×10^{-5}	135	—
20×20	6.08×10^{-6}	213	2.99
40×40	5.01×10^{-7}	369	3.60
80×80	5.32×10^{-8}	718	3.23

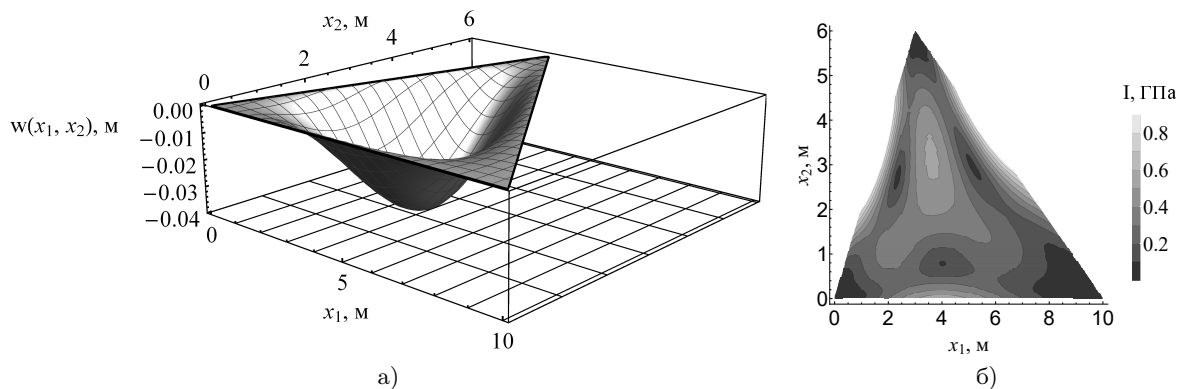


Рис. 4. Величина прогиба w (а) деформированной треугольной пластины (все края защемлены) и интенсивность напряжений I (б)

3.2.2. Пластина, защемленная по трем краям.

Пример 1. Рассмотрим задачу, аналитическое решение которой не известно. Пусть изотропная треугольная пластина с вершинами в точках $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(3, 6)$ находится под действием равномерной поперечной нагрузки $q = \text{const}$. Все края пластины защемлены (см. (13)).

Для описания напряженного состояния пластины используем функцию распределения интенсивности напряжений

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\sigma_{xy}^2},$$

$$\sigma_x = -\bar{E}(w_{xx} + \nu w_{yy}), \quad \sigma_y = -\bar{E}(w_{yy} + \nu w_{xx}), \quad \sigma_{xy} = -\bar{E}(w_{xy}), \quad \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}.$$

Отметим, что одним важным преимуществом предложенного варианта метода КНК является то, что без особого труда можно вычислить любые производные полученного численного решения, так как это решение является кусочно-полиномиальным.

На рис. 4 показана форма прогиба w и интенсивность напряжений I при параметрах задачи $h = 0.1$ м, $d_1 = 10$ м, $d_2 = 6$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $q = 1$ МПа, $\epsilon = 10^{-10}$. В расчетах использована сетка 20×20 . Для наглядности слева на рис. 4–6 по вертикальной оси взят увеличенный масштаб.

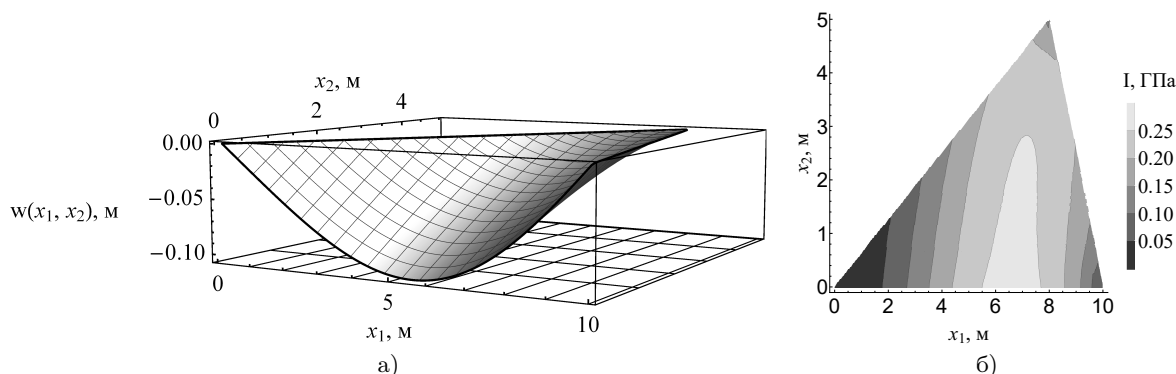


Рис. 5. Величина прогиба w (а) деформированной треугольной пластины (нижний край — свободен, другие два края — шарнирно закреплены) и интенсивность напряжений I (б)

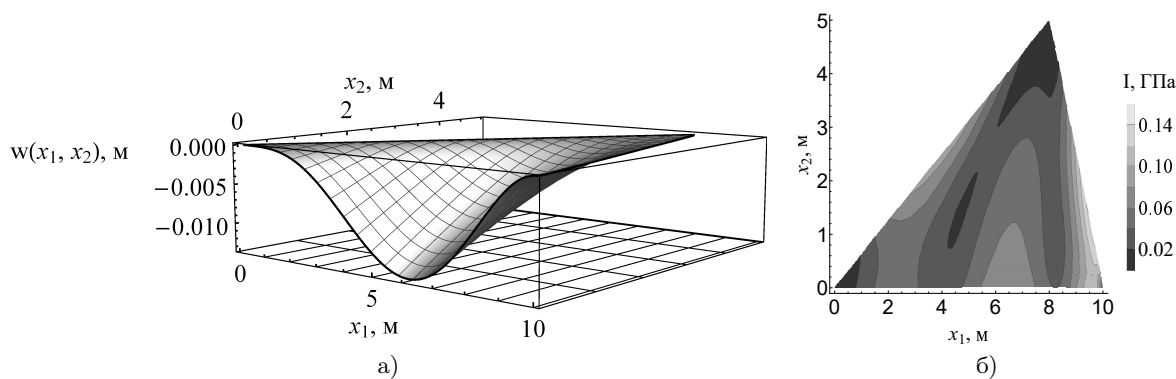


Рис. 6. Величина прогиба w (а) деформированной треугольной пластины (нижний край — заземлен, другие два края — заземлены) и интенсивность напряжений I (б)

Для оценки порядка сходимости численного решения в равномерной норме на последовательности сеток вычислялась величина

$$\|w_{N_1, N_2} - w_{N_1/2, N_2/2}\|_c = \max_{t=1, \dots, Q} |w_{N_1, N_2}(x_{1t}, x_{2t}) - w_{N_1/2, N_2/2}(x_{1t}, x_{2t})|,$$

где Q — количество равномерно распределенных точек (x_{1t}, x_{2t}) , взятых для простоты подсчета в прямоугольнике, включающем рассматриваемую треугольную область (в точках, лежащих вне исходной треугольной области, погрешность полагалась равной нулю); w_{N_1, N_2} — численное решение, полученное на сетке $N_1 \times N_2$; $w_{N_1/2, N_2/2}$ — численное решение на сетке $N_1/2 \times N_2/2$. В данном примере $Q = 6400$ (табл. 6). Порядок сходимости решения формально определялся по формуле

$$\log_2 \frac{\|w_{N_1, N_2} - w_{N_1/2, N_2/2}\|_c}{\|w_{N_1/2, N_2/2} - w_{N_1/4, N_2/4}\|_c},$$

где $w_{N_1/4, N_2/4}$ — численное решение на сетке $N_1/4 \times N_2/4$.

3.2.3. Пластина со свободным краем. Рассмотрим задачу, аналитическое решение которой не известно. Пусть изотропная треугольная пластина с вершинами в точках $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(8, 5)$ находится под действием равномерной поперечной нагрузки $q = \text{const}$. В приведенных ниже примерах 2–4 были взяты следующие параметры задачи: $h = 0.1$ м, $d_1 = 10$ м, $d_2 = 5$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $q = 50$ КПа, $\epsilon = 10^{-10}$. На рис. 5–7 показаны формы прогибов треугольных пластин w и интенсивности напряжений I , в расчетах которых использовалась сетка 20×20 .

Пример 2. Нижний край треугольной пластины свободный (15), два других края шарнирно закреплены (14). В табл. 6 приведены результаты численного эксперимента на последовательности сеток.

Пример 3. Нижний край треугольной пластины свободный (15), два других края заземлены (13).

Пример 4. Правый край треугольной пластины свободный (15), два других края шарнирно закреплены (14). Очевидно, что в случаях примеров 3 и 4 прогибы у пластин будут меньше, чем в случае примера 2 при равномерной нагрузке q , так как в случаях примеров 3 и 4 возможности для прогибов пластин уменьшились.

Таблица 6
Результаты численных экспериментов
для примера 1 и примера 2

$\ w_{N_1, N_2} - w_{N_1/2, N_2/2} \ _c$	Величина нормы	Порядок сходимости
Пример 1		
$\ w_{20, 20} - w_{10, 10} \ _c$	6.33×10^{-4}	—
$\ w_{40, 40} - w_{20, 20} \ _c$	1.03×10^{-4}	2.61
$\ w_{80, 80} - w_{40, 40} \ _c$	2.41×10^{-5}	2.09
Пример 2		
$\ w_{20, 20} - w_{10, 10} \ _c$	2.87×10^{-3}	—
$\ w_{40, 40} - w_{20, 20} \ _c$	4.69×10^{-4}	2.61
$\ w_{80, 80} - w_{40, 40} \ _c$	1.04×10^{-4}	2.17

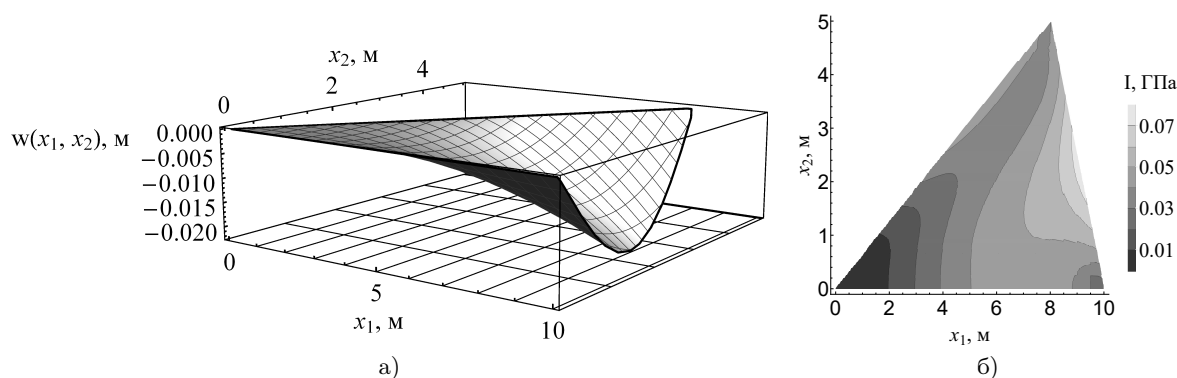


Рис. 7. Величина прогиба w (а) деформированной треугольной пластины (правый край — свободен, другие два края — шарнирно закреплены) и интенсивность напряжений I (б)

4. Заключение. В представленной работе реализован новый подход к построению варианта метода КНК решения краевых задач для PDE в треугольных областях. Показано, что их приближенные решения, полученные с применением этого варианта, сходятся с повышенным порядком, а в случаях тестовых численных экспериментов они с высокой точностью совпадают с известными решениями. Важным обстоятельством является наличие кусочно-аналитического решения задачи в методе КНК, которое не столь жестко, как в некоторых других методах, связано с формой ячейки расчетной сетки и с конфигурацией узлов сетки. Это позволяет внутри области брать регулярную сетку, а на границе относительно просто использовать “одинарный” слой n -ячеек. Как показано в [3–5], такая конструкция сетки в неканонических областях и варианты метода КНК позволяют получить приближенную задачу намного лучше обусловленной, чем при применении “квазирегулярных” сеток, аналогичных “квазирегулярной” сетке, использованной в треугольнике в разделе 2.3. Кроме того, регулярность сетки внутри области существенно упрощает программную реализацию решения приближенной задачи, например в сравнении со случаем, когда нужно запрограммировать и реализовать для каждой ячейки поиск соседних ячеек на нерегулярной сетке. Последнее приводит к увеличению программы и времени решения задачи на ЭВМ. Присоединение треугольных n -ячеек к соседним и использование “законтурных” частей граничных ячеек способствовали повышению точности решения задач по сравнению со случаем, когда эти приемы не применялись.

Показанная здесь возможность решать задачи теории упругости с повышенной точностью в неканонических областях имеет самостоятельное прикладное значение. С другой стороны, проделанная работа может рассматриваться как методическая с точки зрения поиска эффективных и достаточно просто реализуемых алгоритмов решения с повышенной точностью PDE в неканонических областях с более сложными границами, состоящими из сочетания криволинейных и полигональных участков. Скорее всего, в

этом случае будет эффективным сочетание разных подходов, которые проверялись в [2–5], в настоящей работе и, возможно, появятся в ходе дальнейшего поиска.

5. Благодарность. Авторы выражают благодарность Семисалову Б.В. за интерес, проявленный к нашей работе, и ее полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слепцов А.Г. Коллокационно-сеточное решение эллиптических краевых задач // Моделирование в механике. 1991. **5**, № 2. 101–126.
2. Шапеев В.П., Беляев В.А. Варианты метода коллокации и наименьших невязок повышенной точности в области с криволинейной границей // Вычислит. технологии. 2016. **21**, № 5. 95–110.
3. Беляев В.А., Шапеев В.П. Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в трапециевидных областях // Вычислит. технологии. 2017. **22**, № 4. 22–42.
4. Беляев В.А., Шапеев В.П. Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в выпуклых четырехугольных областях // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. **24**, № 5. 629–648.
5. Belyaev V.A., Shapeev V.P. Versions of the collocation and least squares method for solving biharmonic equations in non-canonical domains // AIP Conference Proceedings. 2017. **1893**. doi: 10.1063/1.5007560.
6. Беляев В.В., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // Вычисл. технологии. 2000. **5**, № 4. 13–21.
7. Chen H., Min C., Gibou F. A supra-convergent finite difference scheme for the Poisson and heat equations on irregular domains and non-graded adaptive Cartesian grids // Journal of Scientific Computing. 2007. **31**, № 1–2. 19–60.
8. Shapeev V.P., Vorozhtsov E.V. Application of the method of collocations and least residuals to the solution of the Poisson equation in polar coordinates // Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology. 2015. **2**, N 9. 2553–2562.
9. Lai M.-C., Tseng J.-M. A formally fourth-order accurate compact scheme for 3D Poisson equation in cylindrical coordinates // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. **201**, N 1. 175–181.
10. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислит. технологии. 2013. **18**, № 6. 31–43.
11. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шапеев В.П. Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к решению задач механики анизотропных слоистых пластин // Вычислит. технологии. 2014. **19**, № 5. 24–36.
12. Исаев В.И., Шапеев В.П., Еремин С.А. Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса // Вычислит. технологии. 2007. **12**, № 3. 53–70.
13. Исаев В.И., Шапеев В.П. Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. **14**, № 1. 41–60.
14. Исаев В.И., Шапеев В.П. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. **50**, № 10. 1758–1770.
15. Shapeev V. Collocation and least residuals method and its applications // EPJ Web of Conferences. 2016. **108**. doi: 10.1051/epjconf/201610801009.
16. Федоренко Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. **4**, № 3. 559–564.
17. Saad Y. Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems. Manchester: Manchester University Press, 1991.
18. Слепцов А.Г. Об ускорении сходимости линейных итераций II // Моделирование в механике. 1989. **3**, № 5. 118–125.
19. Ворозитов Е.В., Шапеев В.П. О комбинировании способов ускорения сходимости итерационных процессов при численном решении уравнений Навье–Стокса // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 80–102.
20. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
25.01.2018

Solving Boundary Value Problems for Partial Differential Equations in Triangular Domains by the Least Squares Collocation Method

V. P. Shapeev^{1,2} and V. A. Belyaev³

¹ *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Institutskaya ulitsa 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, Principal Scientist, e-mail: shapeev.vasily@mail.ru*

² *Novosibirsk National Research University, Faculty of Mechanics and Mathematics; ulitsa Pirogova 2, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: shapeev.vasily@mail.ru*

³ *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Institutskaya ulitsa 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia; Senior Laboratory Assistant, e-mail: belyaevasily@mail.ru*

Received January 25, 2018

Abstract: A high-accuracy new version of the least squares collocation method (LSC) is proposed and implemented for the numerical solution of boundary value problems for PDEs in triangular domains. The implementation of this approach and numerical experiments are performed using the examples of the biharmonic and Poisson equations. The solution of the biharmonic equation with high accuracy is used to simulate the stress-strain state of an isotropic triangular plate under the action of a transverse load. The differential problems are projected onto the space of fourth-degree polynomials by the LSC method. The boundary conditions for the approximate solution are given exactly on the boundary of the computational domain, which allows us theoretically and indefinitely to increase the order of accuracy of the LSC. The new version of the LSC utilizes a regular grid with rectangular cells inside the domain of the solution. It is relatively easy to use a “single” layer of irregular cells that are cut off by the boundary from the rectangular cells of the initial regular grid. Triangular irregular boundary cells are joint to the adjacent quadrangular or pentagonal cells. Thus, a separate piece of the analytical solution is constructed in combined cells. The collocation and matching points situated outside the domain are used to approximate the differential equations in the boundary cells crossed by the boundary. These two methods allows us to reduce significantly the condition number of the system of linear algebraic equations in the approximate compared to the case when the triangular cells are used as independent ones for constructing an approximate solution of the problem and when the extraboundary part of the boundary cells is not used. The advantage of the proposed approach is shown in comparison with the approach using the mapping of the triangular domain onto the rectangular one. It is also shown that the approximate solution converges with a high order and is coincident with the analytical solution of the test problems with a high accuracy.

Keywords: least squares collocation method, boundary value problem, triangular domain, higher order approximation, Poisson’s equation, biharmonic equation.

References

1. A. G. Sleptsov, “Collocation Grid Solution of Elliptic Boundary Value Problems,” *Modelir. Mekhan.* **5** (2), 101–126 (1991).
2. V. P. Shapeev and V. A. Belyaev, “Versions of High Order Accuracy Collocation and Least Residuals Method in the Domain with a Curvilinear Boundary,” *Vychisl. Tekhnol.* **21** (5), 95–110 (2016).
3. V. A. Belyaev and V. P. Shapeev, “The Versions of Collocation and Least Residuals Method for Solving Problems of Mathematical Physics in the Trapezoidal Domains,” *Vychisl. Tekhnol.* **22** (4), 22–42 (2017).
4. V. A. Belyaev and V. P. Shapeev, “Versions of the Collocation and Least Residuals Method for Solving Problems of Mathematical Physics in the Convex Quadrangular Domains,” *Model. Anal. Inform. Sist.* **24** (5), 629–648 (2017).
5. V. A. Belyaev and V. P. Shapeev, “Versions of the Collocation and Least Squares Method for Solving Biharmonic Equations in Non-Canonical Domains,” *AIP Conf. Proc.* **1893** (2017). doi 10.1063/1.5007560
6. V. A. Belyaev and V. P. Shapeev, “The Collocation and Least Squares Method on Adaptive Grids in a Domain with a Curvilinear Boundary,” *Vychisl. Tekhnol.* **5** (4), 13–21 (2000).
7. H. Chen, C. Min, and F. Gibou, “A Supra-Convergent Finite Difference Scheme for the Poisson and Heat Equations on Irregular Domains and Non-Graded Adaptive Cartesian Grids,” *J. Sci. Comput.* **31** (1–2), 19–60 (2007).
8. V. P. Shapeev and E. V. Vorozhtsov, “Application of the Method of Collocations and Least Residuals to the Solution of the Poisson Equation in Polar Coordinates,” *J. Multidiscip. Eng. Sci. Technol.* **2** (9), 2553–2562 (2015).
9. M.-C. Lai and J.-M. Tseng, “A Formally Fourth-Order Accurate Compact Scheme for 3D Poisson Equation in Cylindrical Coordinates,” *J. Comput. Appl. Math.* **201** (1), 175–181 (2007).

10. S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, and V. P. Shapeev, “Application of Collocations and Least Residuals Method to Problems of the Isotropic Plates Theory,” *Vychisl. Tekhnol.* **18** (6), 31–43 (2013).
11. S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, and V. P. Shapeev, “Development and Application of Collocations and Least Residuals Method to the Solution of Problems in Mechanics of Anisotropic Laminated Plates,” *Vychisl. Tekhnol.* **19** (5), 24–36 (2014).
12. V. I. Isaev, V. P. Shapeev, and S. A. Eremin, “An Investigation of the Collocation and the Least Squares Method for Solution of Boundary Value Problems for the Navier–Stokes and Poisson Equations,” *Vychisl. Tekhnol.* **12** (3), 53–70 (2007).
13. V. I. Isaev and V. P. Shapeev, “Development of the Collocations and Least Squares Method,” *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN* **14** (1), 41–60 (2008) [*Proc. Steklov Inst. Math.* **261** (Suppl. 1), S87–S106 (2008)].
14. V. I. Isaev and V. P. Shapeev, “High-Accuracy Versions of the Collocations and Least Squares Method for the Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **50** (10), 1758–1770 (2010) [*Comput. Math. Math. Phys.* **50** (10), 1670–1681 (2010)].
15. V. Shapeev, “Collocation and Least Residuals Method and Its Applications,” *EPJ Web of Conferences* **108** (2016). doi: 10.1051/epjconf/201610801009
16. R. P. Fedorenko, “The Speed of Convergence of One Iterative Process,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **4** (3), 559–564 (1964) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **4** (3), 227–235 (1964)].
17. Y. Saad, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems* (Manchester Univ. Press, Manchester, 1991).
18. A. G. Sleptsov, “On Convergence Acceleration of Linear Iterations, II,” *Modelir. Mekhan.* **3** (5), 118–125 (1989).
19. E. V. Vorozhtsov and V. P. Shapeev, “On Combining the Techniques for Convergence Acceleration of Iteration Processes During the Numerical Solution of Navier–Stokes Equations,” *Vychisl. Metody Programm.* **18**, 80–102 (2017).
20. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells* (McGraw-Hill, New York, 1959; Fizmatgiz, Moscow, 1963).