

УДК 550.34.02

doi 10.26089/NumMet.v18r435

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГОРНОЙ ПОРОДЫ ПО ДВУМЕРНЫМ И ТРЕХМЕРНЫМ ЦИФРОВЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ КЕРНА

Г. В. Решетова<sup>1</sup>, Т. С. Хачкова<sup>2</sup>

Представлен численный алгоритм оценки упругих свойств образцов горной породы по дву- и трехмерным компьютерным томограммам. Метод основан на принципе эквивалентности энергии деформаций, вызываемых однородными граничными статическими условиями, имитирующими физический эксперимент. На этой основе определяется эффективный тензор податливости представительного объема неоднородной среды. Особенностью алгоритма является новая схема расчета статического напряженно-деформированного состояния образца методом установления решения соответствующей задачи динамической теории упругости. Приводятся результаты численных расчетов. Предложенный метод верифицировался на однородных образцах с заданными свойствами, а также для слоистых материалов, для которых доказана справедливость построения эффективных параметров по методу Шенберга. В заключение приведены эффективные параметры для трехмерного образца кернового материала.

**Ключевые слова:** эффективные параметры, представительный объем, принцип эквивалентности энергии, однородные краевые условия, метод установления.

**1. Введение.** Дистанционные методы изучения внутреннего строения Земли дают информацию о расположении изучаемых геологических объектов, их структуре и поведении отражательной способности слагающих их пород [1, 2]. В ряде случаев на основе использования современных подходов к обработке сейсмических данных, в первую очередь таких, как выделение рассеянных волн и построение изображений скоплений микрон неоднородностей, вызывающих эти волны [3–5], удается оценить наличие резервуаров углеводородов. Получаемая при этом информация обеспечивает весьма детальное описание внутренней структуры резервуара, включая наличие кавернозных прослоев и преимущественную ориентацию системы трещин [6]. На этой основе, как правило, готовится решение о месте под бурение скважин и определяется глубина целевого горизонта. В результате бурения извлекаются образцы горной породы, слагающей резервуар, так называемый *керна*. Анализ керна является ключевым этапом для принятия решения о начале разработки месторождения и о выборе конкретного метода его эксплуатации. Такой анализ в настоящее время выполняется в специализированных лабораториях с использованием дорогостоящего оборудования и занимает довольно много времени [7]. Кроме того, ряд экспериментов предусматривают разрушение образцов (а иногда образцы разрушаются и неожиданно), что приводит к потере важной информации, зачастую невозможной.

Перечисленные причины послужили толчком к развитию принципиально нового направления физики горных пород — построению цифровой модели керна и изучению его петрофизических свойств путем проведения численных экспериментов. Это направление получило название “Вычислительная физика горных пород” (в англоязычной литературе “Digital rock physics”) и включает в себя целый комплекс исследований, начиная от получения трехмерных цифровых томографических изображений керна, их последующей обработки (фильтрация и сегментация), а также развитие методов и построение алгоритмов для вычисления различных свойств образцов, таких, как пористость, проницаемость, упругие модули, скорости продольных и поперечных волн и др. [8–11].

В настоящей статье мы сосредоточимся на определении эффективных упругих параметров дву- и трехмерно неоднородных сред. Заметим, что эта тема находится в центре внимания специалистов еще с 70-х годов прошлого века [12–15], когда возникла необходимость изучения свойств композитных материалов. Эти методы были ориентированы на изучение сред с регулярной, зачастую периодической, структурой

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск; вед. науч. сотр., e-mail: kgv@nmsf.sscs.ru

<sup>2</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; мл. науч. сотр., e-mail: KhachkovaTS@ipgg.sbras.ru

и во многом основаны на проведении теоретических вычислений. Однако горную породу вряд ли можно отнести к таким средам. Она характеризуется иррегулярным распределением микронеоднородностей и вряд ли допускает описание на каком-либо уровне как регулярная периодическая или квазипериодическая структура. Для изучения эффективных упругих параметров таких сред необходимо привлечение новых численных подходов, интенсивно развивающихся в последнее время [16, 17]. Среди их многообразия нами выбран метод оценки эффективных упругих свойств образца горной породы по двумерным и трехмерным томографическим изображениям, основанный на принципе эквивалентности энергии деформаций, предложенный в работе [16] для изучения свойств композитных материалов.

Как известно, в качестве граничных условий для решения статической задачи теории упругости используются кинематические (заданы перемещения на границе) либо статические (заданы напряжения на границе) граничные условия. Однако при изучении горной породы нам представляется естественным использовать последние, так как они наилучшим образом соответствуют условиям проведения лабораторных экспериментов, при которых к образцу прикладывают различные внешние напряжения.

## 2. Некоторые основные определения и соотношения.

**2.1. Эффективные упругие параметры.** В теории эффективных сред есть понятие представительного объема  $V$  изучаемого материала: это наименьший объем, который содержит микроструктурные элементы, определяющие свойства среды на макромасштабе. Для масштабов, существенно превышающих размеры представительного объема, макроскопические физические свойства совпадают с эффективными параметрами представительного объема, которые и могут быть использованы, например, для расчетов сейсмических волновых полей методами гомогенизации.

Эффективные упругие свойства образца определяются исходя из обобщенного закона Гука, выражающего связь между усредненными по представительному объему деформациями и напряжениями:

$$\bar{\sigma}_{ij} = c_{ijkl}^* \bar{\varepsilon}_{kl} \tag{1}$$

или

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = s_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{kl}. \tag{2}$$

Здесь  $c_{ijkl}^*$  и  $s_{ijkl}^*$  — тензоры четвертого ранга, которые по определению и являются эффективными тензорами жесткости  $C^*$  и податливости  $S^*$ , а усредненные давления и напряжения определяются по формулам

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV, \tag{3}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV, \tag{4}$$

где  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  — поточечные значения компонент тензоров напряжений и деформаций в представительном объеме  $V$  образца.

Для нахождения эффективных тензоров жесткости  $C^*$  и  $S^*$  воспользуемся энергетическим методом [16]. Для этого введем понятие *однородных* граничных условий [15]. Они могут быть как кинематическими, так и статическими и определяются таким образом, что, будучи примененными к границе  $S$  однородного упругого тела с объемом  $V$ , вызывают в нем однородные (постоянные) напряжения и деформации. В частности, однородными кинематическими граничными условиями являются граничные условия с заданными на границе смещениями в виде линейных функций

$$u_i(S) = \varepsilon_{ij}^0 x_j, \tag{5}$$

а однородными статическими граничными условиями будут граничные условия с заданными на границе постоянными напряжениями

$$t_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j, \tag{6}$$

где  $\sigma_{ij}^0$ ,  $\varepsilon_{ij}^0$  — некоторые постоянные симметричные тензоры напряжения и деформации, а  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к границе  $S$ .

**3. Энергетический метод нахождения эффективных упругих параметров.** В основе энергетического метода лежит следующая теорема [15]<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Эта теорема играет ключевую роль в наших рассуждениях и неоднократно используется в приводимых ниже рассуждениях, поэтому мы здесь приводим ее полностью, тем более, что она весьма компактна.

**Теорема 1.** Однородные статические граничные условия, приложенные на границе  $S$  неоднородного представительного объема  $V$ , порождают в нем поле напряжений  $\sigma_{ij}$ , усреднение которого по объему (3) равно значению постоянного напряжения  $\sigma_{ij}^0$ , приложенного к границе (6):

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^0. \quad (7)$$

**Доказательство.** Действительно, поскольку  $\sigma_{ij}$  удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (8)$$

то справедливо равенство

$$(\sigma_{ik}x_j),k = \sigma_{ik,k}x_j + \sigma_{ik}x_{j,k} = \sigma_{ij}. \quad (9)$$

Тогда из (8) и (9) и с применением теоремы Гаусса–Остроградского получим требуемое утверждение (7):

$$V\bar{\sigma}_{ij} = \int_V \sigma_{ij} dV = \int_V (\sigma_{ik}x_j),k dV = \int_S \sigma_{ik}x_j n_k dS = \sigma_{ik}^0 \int_S x_j n_k dS = \sigma_{ik}^0 \int_V x_{j,k} dV = V\sigma_{ij}^0. \quad (10)$$

Теорема доказана.

В случае однородных кинематических граничных условий (5), приложенных на границе неоднородного объема, справедливо аналогичное утверждение:  $\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^0$ .

Потенциальная энергия деформаций, возникающая в неоднородном упругом деформируемом теле с объемом  $V$ , выражается формулой  $U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV$ .

Вычислим энергию деформаций при воздействии на неоднородное упругое тело однородных статических граничных условий:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}u_i n_j dS = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 \int_S u_i n_j dS = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 \int_V u_{i,j} dV = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 \int_V \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} V = \frac{1}{2} s_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 \sigma_{ij}^0 V. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия неоднородного упругого тела, находящегося в напряженно-деформированном состоянии, представляется в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} s_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 \sigma_{ij}^0 V. \quad (11)$$

Таким образом, если известно значение потенциальной энергии  $U$  напряженно-деформированного состояния упругого тела, в которое оно перешло под воздействием однородных граничных условий (статических напряжений)  $\sigma_{ij}^0$ , то уравнение (11) может быть использовано для нахождения компонент эффективного тензора податливости  $s_{ijkl}^*$  на основании формулы для потенциальной энергии однородного упругого тела

$$U_0 = \frac{1}{2} s_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 \sigma_{ij}^0 V$$

и принципа эквивалентности энергий однородного и эквивалентного ему “эффективного” твердого тела:  $U_0 = U$ .

Если для решения статической задачи теории упругости выбираются однородные кинематические граничные условия (5), т.е. на границе задаются смещения, то в этом случае определяются компоненты тензора жесткости. Если же выбираются однородные статические граничные условия (6), т.е. на границе задаются напряжения, то определяются компоненты тензора податливости и уже по ним восстанавливается тензор жесткости.

Несомненное преимущество подхода, использующего статические граничные условия, заключается в том факте, что они наилучшим образом моделируют воздействия, возникающие при лабораторных измерениях.

Отметим еще, что целью решения статической задачи является определение потенциальной энергии упругих деформаций, возникающих в образце под действием приложенной на границе силы. Если же

задавать смещения, то необходимо решать систему уравнений Ламе, что даст распределение смещений. Тогда значение потенциальной энергии вычисляется по формуле

$$U(u) = \frac{1}{2} \int_V \left[ \lambda(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3})^2 + 2\mu(u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,3}^2) + \mu\{(u_{1,2} + u_{2,1})^2 + (u_{2,3} + u_{3,2})^2 + (u_{3,1} + u_{1,3})^2\} \right] dV.$$

Из этой формулы следует, что для нахождения энергии необходимо дифференцирование функций, заданных в узлах разностной сетки. Операция численного дифференцирования совместно с интегрированием по объему вносит дополнительные погрешности, и чем грубее сетка (разрешение цифровых трехмерных изображений), тем больше эта погрешность. В то же время, если находить значения напряжений и вычислять энергию по формуле

$$U(\sigma) = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + 2(1 + \nu)(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) dV,$$

то отпадает необходимость численного дифференцирования и, следовательно, повышается точность результатов. Исходя из этого, мы и выбрали второй подход.

**3.1. Алгоритм определения компонент тензора податливости  $S^*$  в двумерном случае.**

Рассмотрим теперь алгоритм вычисления компонент тензора податливости  $S^*$  в двумерном случае:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = S^* \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad S^* = \begin{pmatrix} s_{1111}^* & s_{1122}^* & s_{1112}^* \\ & s_{2222}^* & s_{2212}^* \\ sym & & s_{1212}^* \end{pmatrix}.$$

Для удобства будем считать, что фиксированный в пространстве объем  $V$  является прямоугольной областью со сторонами  $a$  и  $b$ , параллельными координатным осям (рис. 1). К граням образца последовательно прикладываются различные однородные граничные условия, с помощью комбинации которых можно определить разные компоненты тензора  $s_{ijkl}^*$ . Рассмотрим каждый из этих случаев.

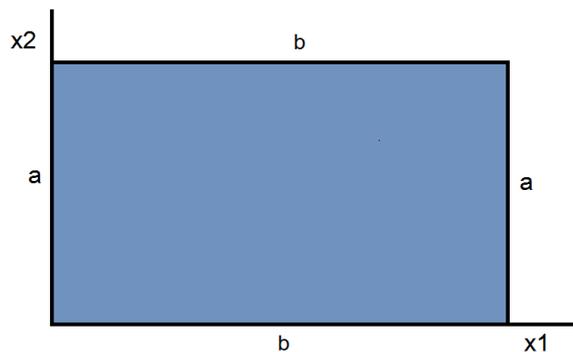


Рис. 1. Обозначения сторон прямоугольника

**3.1.1. Случай 1.** Для нахождения  $s_{1111}^*$  ищем решение краевой задачи статической теории упругости

$$\sigma_{ij,j} = 0, \tag{12}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}, \quad \varepsilon_{kl} = c_{ijkl}u_{k,l}, \quad i, j = 1, 2, \tag{13}$$

с заданными на границе статическими граничными условиями

$$\sigma_{11}|_a = 1, \quad \sigma_{22}|_b = 0, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 0. \tag{14}$$

Согласно (11), для граничных условий (14) получим  $U^{(1)} = \frac{1}{2} s_{1111}^* V$ . Здесь и далее верхний индекс в обозначениях указывает на номер рассматриваемого случая. Вычислив потенциальную энергию деформаций  $U^{(1)}$ , найдем  $s_{1111}^* = 2U^{(1)}/V$ .

**3.1.2. Случай 2.** Для нахождения  $s_{2222}^*$  найдем решение уравнений (12), (13) с граничными условиями вида

$$\sigma_{22}|_b = 1, \quad \sigma_{11}|_a = 0, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 0. \tag{15}$$

С учетом (15) из формулы (11) получим  $U^{(2)} = \frac{1}{2} s_{2222}^* V$ . Вычислив потенциальную энергию деформаций  $U^{(2)}$ , найдем  $s_{2222}^* = 2U^{(2)}/V$ .

**3.1.3. Случай 3.** Для нахождения  $s_{1212}^*$  ищем решение уравнений (12), (13) с граничными условиями вида

$$\sigma_{11}|_a = \sigma_{22}|_b = 0, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 1. \tag{16}$$

В этом случае  $U^{(3)} = \frac{1}{2} s_{1212}^* V$ .

После вычисления потенциальной энергии деформаций  $U^{(3)}$  находим  $s_{1212}^* = 2U^{(3)}/V$ . Для определения оставшихся компонент  $s_{1122}^*$ ,  $s_{1112}^*$  и  $s_{2212}^*$  воспользуемся свойством линейности задачи теории упругости.

**3.1.4. Случай 4.** Для нахождения  $s_{1122}^*$  нужно вычислить энергию деформаций  $U^{(4)}$  для объема, на границе области которого заданы условия вида

$$\sigma_{11}|_a = 1, \quad \sigma_{22}|_b = 1, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 0. \quad (17)$$

Как можно видеть, эти граничные условия являются линейной комбинацией граничных условий (14), (15), поэтому для вычисления  $U^{(4)}$  воспользуемся результатами предыдущих рассмотрений:

$$U^{(4)} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(4)} \varepsilon_{ij}^{(4)} dV = \frac{1}{2} \int_V \left( \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right) \left( \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) dV = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(1,2)},$$

где

$$\begin{aligned} U^{(1,2)} &= \frac{1}{2} \int_V \left( \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right) dV = \\ &= \int_V \left[ \frac{1}{E} \left( \sigma_{11}^{(1)} \sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(1)} \sigma_{22}^{(2)} \right) - \frac{\nu}{E} \left( \sigma_{11}^{(1)} \sigma_{22}^{(2)} + \sigma_{11}^{(2)} \sigma_{22}^{(1)} \right) + \frac{2(\nu+1)}{E} \sigma_{12}^{(1)} \sigma_{12}^{(2)} \right] dV \end{aligned}$$

и  $U^{(1)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(1)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(1)}$  и  $U^{(2)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(2)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(2)}$  — рассчитанные энергии, напряжения и деформации для случаев 1 и 2. Тогда коэффициент  $s_{1122}^*$  вычисляется по формуле  $s_{1122}^* = U^{(1,2)}/V$ .

Как видим, свойство линейности задачи позволяет и здесь, и далее обойтись без численного решения задачи (12), (13) с граничными условиями (17) и тем самым сократить время расчетов. Однако возникает необходимость хранения всех компонент напряжений и деформаций для предыдущих трех случаев.

**3.1.5. Случай 5.** Для нахождения  $s_{2212}^*$  нужно вычислить энергию деформаций  $U^{(5)}$  для объема, на границе области которого заданы граничные условия вида

$$\sigma_{11}|_a = 0, \quad \sigma_{22}|_b = 1, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 1.$$

Эти условия суть комбинация граничных условий (15), (16). Поступая аналогично предыдущему, получим

$$U^{(5)} = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(2,3)}, \quad U^{(2,3)} = \frac{1}{2} \int_V \left( \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(3)} + \sigma_{ij}^{(3)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) dV.$$

Коэффициент  $s_{2212}^*$  вычисляется по формуле  $s_{2212}^* = U^{(2,3)}/V$ .

**3.1.6. Случай 6.** Для нахождения  $s_{1112}^*$  нужно вычислить энергию деформаций  $U^{(6)}$  для объема, на границе области которого заданы граничные условия вида

$$\sigma_{11}|_a = 1, \quad \sigma_{22}|_b = 0, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 1.$$

Эти условия суть комбинация граничных условий (14), (16). В этом случае имеем

$$U^{(6)} = U^{(1)} + U^{(eq3)} + U^{(3,3)}, \quad U^{(1,3)} = \frac{1}{2} \int_V \left( \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(3)} + \sigma_{ij}^{(3)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right) dV.$$

Коэффициент  $s_{1112}^*$  вычисляется по формуле  $s_{1112}^* = U^{(1,3)}/V$ .

### 3.2. Алгоритм определения компонент тензора податливости $S^*$ в трехмерном случае.

В трехмерном случае алгоритм нахождения компонент тензора податливости аналогичен двумерному. Тензор  $S^*$  выписывается в виде

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = S^* \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad S^* = \begin{pmatrix} s_{1111}^* & s_{1122}^* & s_{1133}^* & s_{1123}^* & s_{1113}^* & s_{1112}^* \\ & s_{2222}^* & s_{2233}^* & s_{2223}^* & s_{2213}^* & s_{2212}^* \\ & & s_{3333}^* & s_{3323}^* & s_{3313}^* & s_{3312}^* \\ & & & s_{2323}^* & s_{2313}^* & s_{2312}^* \\ sym & & & & s_{1313}^* & s_{1312}^* \\ & & & & & s_{1212}^* \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что объем  $V$  является фиксированным в пространстве прямоугольным параллелепипедом с ребрами, параллельными координатным осям. Введем обозначения граней (рис. 2), полагая, что соответствующая буква обозначает как переднюю, так и параллельную ей заднюю стенку параллелепипеда. Для нахождения компонент  $s_{ijkl}^*$  к граням образца прикладываются соответствующие однородные статические граничные условия, приведенные в табл. 1. По вычисленным значениям энергии деформаций для каждого случая определяются соответствующие компоненты тензора податливости.

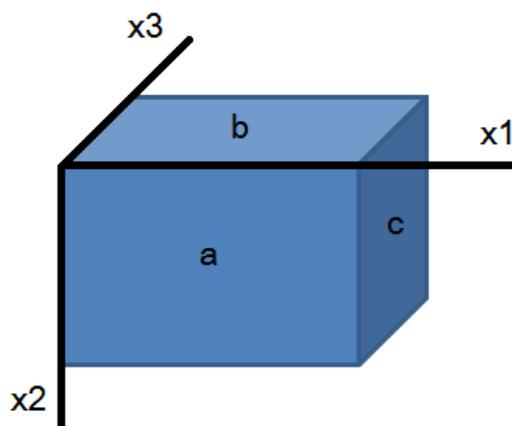


Рис. 2. Обозначения граней куба

Аналогично двумерному случаю для вычисления оставшихся компонент используем свойство линейности и результаты предыдущих рассмотрений, на основании чего для вычисления  $s_{ijkl}^*$  будем использовать соотношения, представленные в табл. 2.

Таблица 1

Граничные условия для нахождения компонент  $s_{ijkl}^*$

$U^{(i)}$	Плоскости $a$	Плоскости $b$	Плоскости $c$	Значение $s_{ijkl}^*$
$U^{(1)}$	$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{11} = 1, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$	$s_{1111}^* = U^{(1)}/V$
$U^{(2)}$	$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{22} = 1, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$	$s_{2222}^* = U^{(2)}/V$
$U^{(3)}$	$\sigma_{33} = 1, \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$	$s_{3333}^* = U^{(3)}/V$
$U^{(4)}$	$\sigma_{23} = 1, \sigma_{33} = \sigma_{13} = 0$	$\sigma_{23} = 1, \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$	$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$	$s_{2323}^* = U^{(4)}/V$
$U^{(5)}$	$\sigma_{13} = 1, \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{13} = 1, \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$	$s_{1313}^* = U^{(5)}/V$
$U^{(6)}$	$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{12} = 1, \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{12} = 1, \sigma_{11} = \sigma_{13} = 0$	$s_{1212}^* = U^{(6)}/V$

Таблица 2

Формулы для вычисления  $s_{ijkl}^*$

$s_{1122}^* = U^{(1,2)}/V$	$s_{1123}^* = U^{(1,4)}/V$	$s_{1113}^* = U^{(1,5)}/V$	$s_{2313}^* = U^{(4,5)}/V$	$s_{3312}^* = U^{(3,6)}/V$
$s_{1133}^* = U^{(1,3)}/V$	$s_{2223}^* = U^{(2,4)}/V$	$s_{2213}^* = U^{(2,5)}/V$	$s_{1112}^* = U^{(1,6)}/V$	$s_{2312}^* = U^{(4,6)}/V$
$s_{2233}^* = U^{(2,3)}/V$	$s_{3323}^* = U^{(3,4)}/V$	$s_{3313}^* = U^{(3,5)}/V$	$s_{2212}^* = U^{(2,6)}/V$	$s_{1312}^* = U^{(5,6)}/V$

В табл. 2 значения  $U^{(k,l)}$  вычисляются по формуле

$$\begin{aligned}
 U^{(k,l)} &= \frac{1}{2} \int_V \left( \sigma_{ij}^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(l)} + \sigma_{ij}^{(l)} \varepsilon_{ij}^{(k)} \right) dV = \int_V \frac{1}{E} \left( \sigma_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(l)} + \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(l)} + \sigma_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(l)} \right) dV - \\
 &- \int_V \frac{\nu}{E} \left( \sigma_{11}^{(k)} \sigma_{22}^{(l)} + \sigma_{11}^{(l)} \sigma_{22}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{33}^{(l)} + \sigma_{22}^{(l)} \sigma_{33}^{(k)} + \sigma_{11}^{(k)} \sigma_{33}^{(l)} + \sigma_{11}^{(l)} \sigma_{33}^{(k)} \right) dV + \\
 &+ \int_V \frac{2(\nu + 1)}{E} \left( \sigma_{12}^{(k)} \sigma_{12}^{(l)} + \sigma_{23}^{(k)} \sigma_{23}^{(l)} + \sigma_{13}^{(k)} \sigma_{13}^{(l)} \right) dV.
 \end{aligned}$$

**4. Численное решение статической задачи теории упругости.** Самая трудоемкая в вычислительном плане составляющая излагаемого подхода к вычислению эффективных параметров приходится на решение серии статических задач теории упругости с заданными на границах внешними напряжениями. В конечном итоге эти задачи сводятся к системам линейных алгебраических уравнений, для решения которых можно применять как прямые, так и итерационные методы. Прямые методы, обладая рядом преимуществ, к сожалению, не подходят здесь для решения трехмерных задач ввиду чрезмерных требований на вычислительные ресурсы. Поэтому мы и выбрали для определения эффективных параметров итерационные методы. Надо отметить, что семейство таких методов чрезвычайно широко [18–22]. Опишем метод, который использовался в наших расчетах.

Итак, пусть требуется решить статическую задачу теории упругости для материала, заполняющего объем  $V$  с границей  $S$ . Система уравнений состоит из уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (18)$$

и закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}u_{k,l}. \quad (19)$$

На границе  $S$  будем задавать статические граничные условия

$$t_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j. \quad (20)$$

Решение задачи (18)–(20) ищется путем отыскания установившегося решения динамической задачи теории упругости в постановке напряжения/скорости смещений с добавлением диссипативных членов в уравнение движения (21):

$$\rho \dot{v}_i + \alpha v_i = \sigma_{ij,j}, \quad (21)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} = C_{ijkl}v_{k,l} \quad (22)$$

с нулевыми начальными условиями при  $t = 0$ :

$$v_i = 0, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (23)$$

и постоянными по времени граничными условиями на границе  $S$ :

$$t_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j. \quad (24)$$

Здесь  $v_i = \dot{u}_i$  — скорость смещения  $i$ -й компоненты вектора перемещения. Выбор коэффициента диссипации  $\alpha$  обсудим ниже в разделе 5.

Для того чтобы показать сходимость задачи (21)–(24) к (18)–(20), воспользуемся следующей теоремой о вириале<sup>4</sup>.

**Теорема 2.** *Осредненная по бесконечному интервалу времени кинетическая энергия механической системы  $T$  равна усредненному по тому же интервалу времени вириалу<sup>5</sup>. Если потенциальная энергия  $U$  является однородной функцией первой степени от обратных значений радиусов-векторов, то выполняется соотношение  $2T = -U$  [23].*

Отсюда следует, что если уменьшать кинетическую энергию системы через искусственно введенный в уравнения механизм затухания, то жесткая связь между кинетической и потенциальной энергией, обеспечиваемая этой теоремой, приводит к уменьшению потенциальной энергии вплоть до ее минимума. Тогда на основании принципа Лагранжа–Дирихле<sup>6</sup> для статически нагруженного тела, который формулируется следующим образом: “Из всех возможных напряженно-деформированных состояний деформируемого твердого тела действительному напряженному состоянию соответствует минимум полной энергии деформации”, можно сделать вывод о том, что решение динамической задачи (21)–(24) сходится к решению стационарной задачи (18)–(20). Для численного решения начально-краевой задачи (21)–(24) мы применяем конечно-разностную схему на сдвинутых сетках [24], коэффициенты которой модифицируются для обеспечения аппроксимации в неоднородных средах [25].

**5. Численные эксперименты.** Начнем с решения статической задачи (12), (13) с граничными условиями (14) в ограниченной области однородной двумерной среды. Эта задача имеет точное решение, для которого  $\sigma_{11}(x, y) = 1$ ,  $\varepsilon_{11}(x, y) = 1/(\lambda + 2\mu)$ ,  $u_1(x, y) = x/(\lambda + 2\mu)$ , а все остальные компоненты вектора смещений, тензоров напряжений и деформаций равны нулю. Одновременно с этим решим краевую динамическую задачу (21)–(22) с нулевыми начальными условиями и граничными условиями (14).

На рис. 3 представлены моментальные снимки компоненты  $\sigma_{11}$  с интервалом в 100 временных шагов  $\Delta t$ , используемых в разностной схеме, и коэффициентом диссипации  $\alpha = 0$ . Как можно видеть, краевые условия  $\sigma_{11} = 1$  возбуждают на двух границах волновое поле, которое распространяется внутрь области.

<sup>4</sup>Сформулирована в 1870 г. Р. Клаузиусом (R. Clausius) и является следствием уравнений движения механической системы при условии, что движение системы происходит в ограниченной области пространства с ограниченными скоростями [23].

<sup>5</sup>Напомним, что в теоретической механике для множества  $N$  точечных частиц вириал определяется как скалярная функция  $\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \mathbf{r}_k$ , где  $\mathbf{F}_k$  и  $\mathbf{r}_k$  — соответственно сила и радиус-вектор  $k$ -й частицы.

<sup>6</sup>Физический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1983, стр. 797.

После того как возбуждение от границ заполнит всю расчетную область, “включаем” параметр  $\alpha > 0$  для обеспечения диссипации волновой составляющей решения и обеспечения его сходимости к точному решению статической задачи (рис. 4). Опытным путем мы установили, что оптимальным является момент “включения” затухания  $T_0$ , равный двойному времени пробега волны от источника возбуждения до самой удаленной точки области.

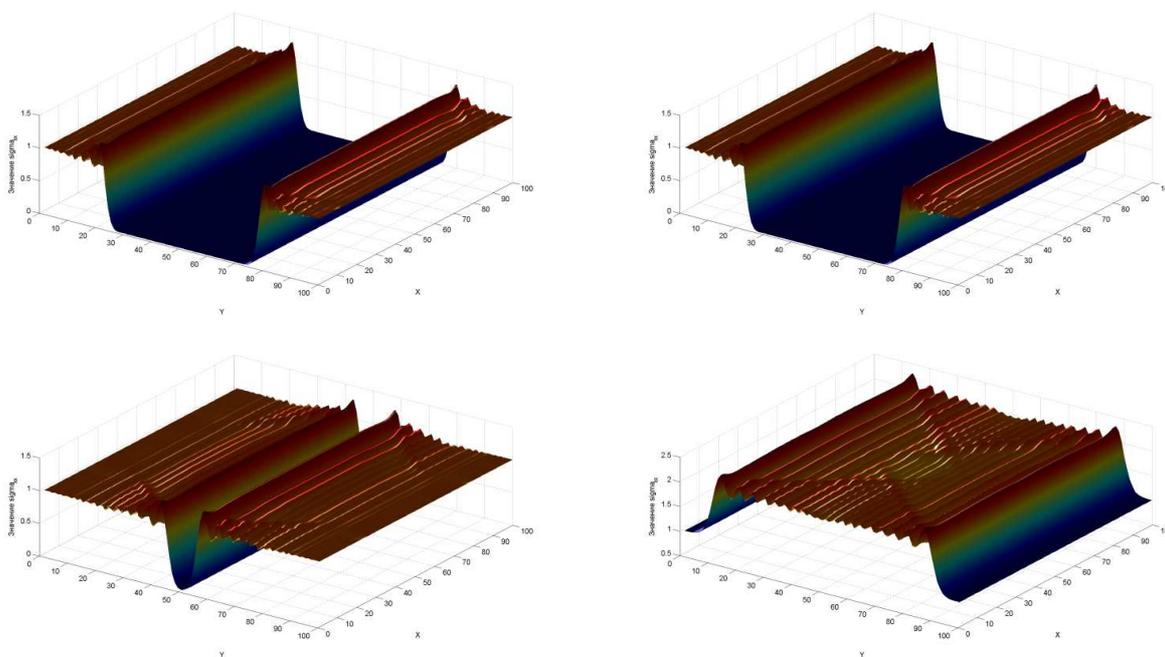


Рис. 3. Снимки волнового поля для компоненты  $\sigma_{11}$  с интервалом в 100 шагов разностной схемы по времени (справа налево и сверху вниз), диссипативный член  $\alpha = 0$

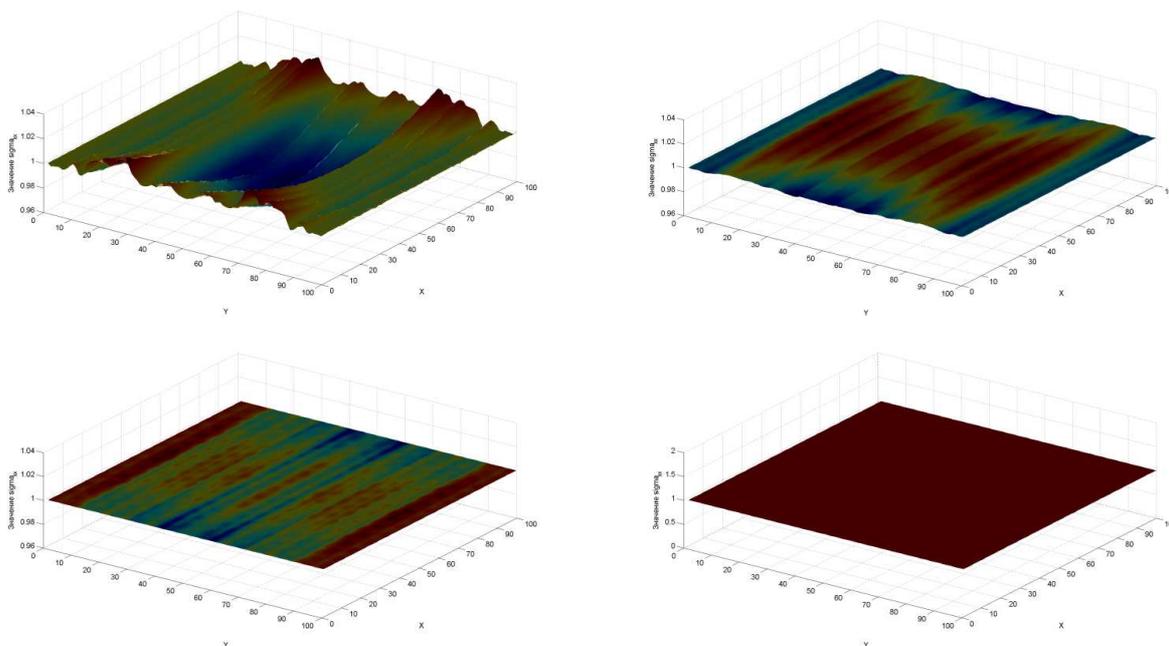


Рис. 4. Снимки волнового поля для компоненты  $\sigma_{11}$  с интервалом в 100 шагов разностной схемы по времени (справа налево и сверху вниз) после включения диссипативного члена

Параметр  $\alpha$  легко подобрать, если в динамической задаче ввести дополнительный источник внутри области и проследить поведение затухания амплитуды возбужденной им волны. На рис. 5 приведен такой

пример для задачи (12), (13) с однородной средой и с начальными условиями (23) и граничными условиями

$$\sigma_{11}|_{x=0} = 1, \quad \sigma_{11}|_{x=1} = 0, \quad \sigma_{22}|_b = 0, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 0.$$

При этом в правой части динамической задачи (21)–(22) помещен точечный источник типа центра расширения с координатами  $(x_0, z_0)$  и импульсом  $f(t)$ :

$$\rho \dot{v}_i + \alpha v_i = \sigma_{ij,j}, \quad (25)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = C_{ijkl} v_{k,l} + f(t) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0). \quad (26)$$

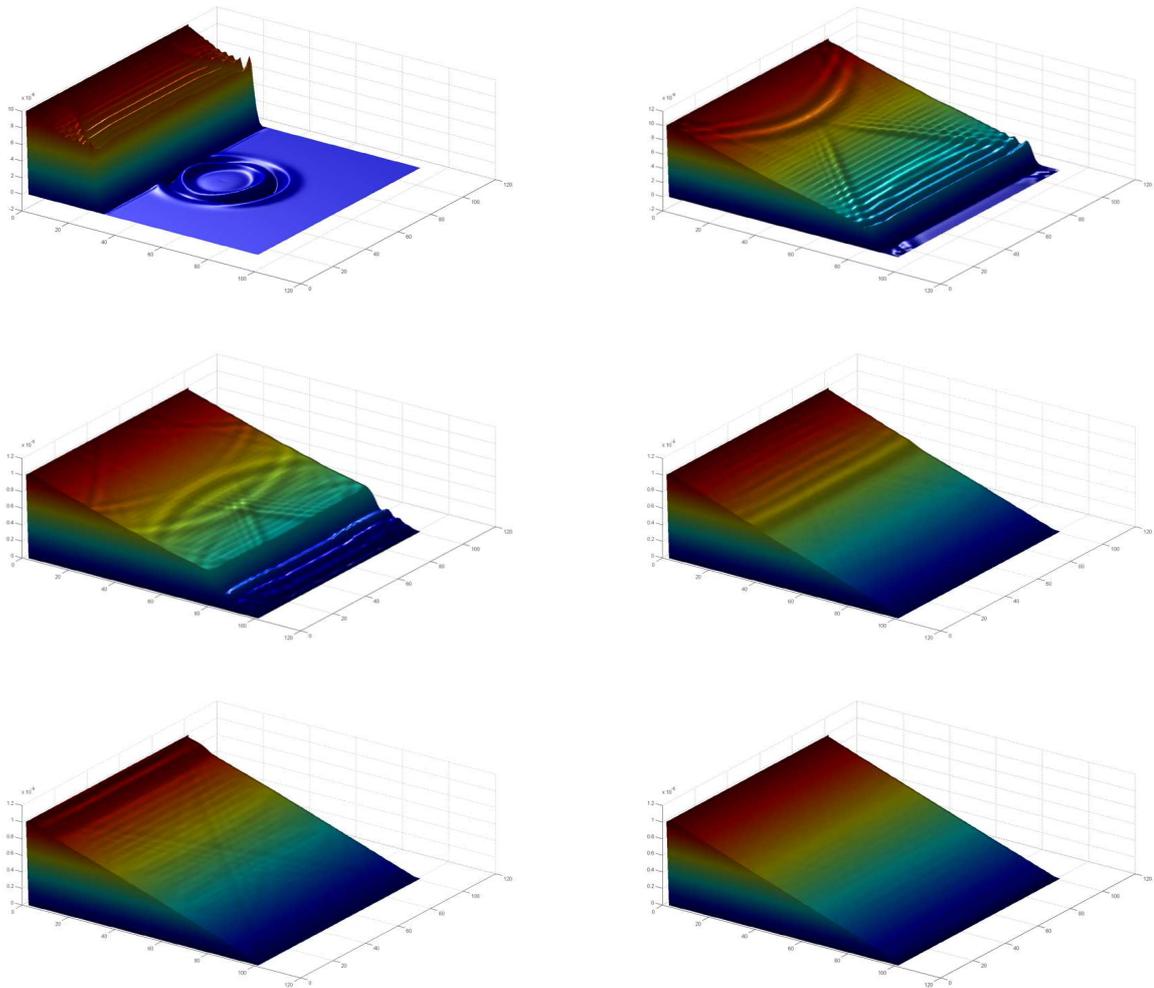


Рис. 5. Снимки волнового поля для компоненты  $\sigma_{11}$  с интервалом в 100 шагов разностной схемы по времени (слева направо и сверху вниз) для задачи (25)–(26) с дополнительным источником внутри области

В численных экспериментах, представленных в этой статье, мы задавали параметр затухания  $\alpha$  следующим образом:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t < T_0, \\ 0.001, & t \geq T_0, \end{cases} \quad (27)$$

где  $T_0$  — двойное время пробега от источника до самой удаленной точки области.

В качестве критерия остановки вычислительного процесса для задачи (21)–(24) мы выбрали малость относительного изменения приближенного решения на двух последующих шагах:

$$\left\| \frac{\sigma_{ij}^{(k)} - \sigma_{ij}^{(k-1)}}{\sigma_{ij}^{(k)}} \right\| \leq \varepsilon, \quad (28)$$

где  $\varepsilon$  — наперед заданное малое значение, определяющее точность нахождения решения. В результате проведения представительной серии численных экспериментов было установлено, что оптимальным значением этого параметра является  $10^{-6}$ .

Таблица 3

Параметры Ламе для некоторых однородных материалов

Материал	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Скорости упругих волн, м/с		Параметры Ламе	
	$\rho$	$V_p$	$V_s$	$\lambda$ , Па	$\mu$
Оргстекло	1180	2670	1121	5446429240	1482836380
Медь	8930	4660	2260	102353560000	45457640000
Сталь	7800	5900	3260	105727440000	82895280000

**5.1. Результаты численных расчетов по построению эффективных моделей среды.**

**5.1.1. Образцы из однородного изотропного материала.** В этом случае вычисленные эффективные параметры должны совпадать со свойствами исходного образца. Будем считать, что образцы размера  $N \times N$  в двумерном случае и размера  $N \times N \times N$  в трехмерном случае (в обоих случаях  $N = 200$ ) заполнены однородным изотропным упругим материалом с параметрами Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  из табл. 3. В результате вычислений мы должны получить следующие матрицы жесткости

— в двумерном случае:  $C^* = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$

— аналогичную матрицу в трехмерном случае:  $C^* = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ sym & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix}.$

Таблица 4

Результаты расчетов эффективных параметров для двумерного случая

Материал	Точные значения	Вычисленные значения
Оргстекло	$s_{1111}^* = s_{2222}^* = 2.04674668999 * 10^{-10}$ $s_{1212}^* = 6.743832384258 * 10^{-10}$ $s_{1122}^* = -1.325169502 * 10^{-10}$ $s_{1112}^* = s_{2212}^* = 0$ $\lambda + 2\mu = c_{1111}^* = c_{2222}^* = 8412102000$ $\mu = c_{1212}^* = 1482836380$ $\lambda = c_{1122}^* = 5446429240$ $c_{1112}^* = c_{2212}^* = 0$	$s_{1111}^* = s_{2222}^* = 2.04674668998 * 10^{-10}$ $s_{1212}^* = 6.743832384259 * 10^{-10}$ $s_{1122}^* = -1.325169502 * 10^{-10}$ $s_{1112}^* = s_{2212}^* = 5.169 * 10^{-26}$ $\lambda + 2\mu = c_{1111}^* = c_{2222}^* = 8412102000.07$ $\mu = c_{1212}^* = 1482836379.99$ $\lambda = c_{1122}^* = 5446429240.07$ $c_{1112}^* = c_{2212}^* = 0$
Медь	$s_{1111}^* = s_{2222}^* = 7.1668145826 * 10^{-12}$ $s_{1212}^* = 2.1924599198594 * 10^{-11}$ $s_{1122}^* = -3.79548501661 * 10^{-12}$ $s_{1112}^* = s_{2212}^* = 0$ $\lambda + 2\mu = c_{1111}^* = c_{2222}^* = 193920308000$ $\mu = c_{1212}^* = 45610868000$ $\lambda = c_{1122}^* = 102698572000$ $c_{1112}^* = c_{2212}^* = 0$	$s_{1111}^* = s_{2222}^* = 7.1668145827 * 10^{-12}$ $s_{1212}^* = 2.1924599198590 * 10^{-11}$ $s_{1122}^* = -3.79548501660 * 10^{-12}$ $s_{1112}^* = s_{2212}^* = -1.615 * 10^{-27}$ $\lambda + 2\mu = c_{1111}^* = c_{2222}^* = 193920307998.5$ $\mu = c_{1212}^* = 45610868000.007$ $\lambda = c_{1122}^* = 102698571998.7$ $c_{1112}^* = c_{2212}^* = 0$

Расчеты проводились с критерием остановки (28) для параметра  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Вычисленные значения эффективных параметров для двумерного случая приведены в табл. 4. Время счета задачи 2 минуты на персональном компьютере с 8-ядерным процессором. В трехмерном случае расчеты проводились на

кластере ССКЦ СО РАН, для расчета использовались 6 узлов Intel Xeon X5670. Полученные значения эффективных параметров для трехмерного случая приведены в табл. 5. Время счета задачи для определения всех упругих параметров 45 минут. Поскольку по схеме алгоритма сначала определяются компоненты тензора податливости и уже по ним восстанавливаются компоненты тензора жесткости, то в табл. 4 и 5 приводятся значения компонент обоих тензоров.

Таблица 5

Результаты расчетов эффективных параметров для трехмерного случая

Материал	Точные значения	Вычисленные значения
Сталь	$s_{1111}^* = s_{2222}^* = s_{3333}^* = 4.71130755 * 10^{-12}$ $s_{2323}^* = s_{1313}^* = s_{1212}^* = 1.206341301 * 10^{-11}$ $s_{1122}^* = s_{1133}^* = s_{2233}^* = -1.320398959 * 10^{-12}$ Остальные $s_{ijkl}^* = 0$ $c_{1111}^* = c_{2222}^* = c_{3333}^* = 271518000000$ $\mu = s_{2323}^* = s_{1313}^* = s_{1212}^* = 82895280000$ $\lambda = c_{1122}^* = c_{1133}^* = c_{2233}^* = 105727440000$ Остальные $c_{ijkl}^* = 0$	$s_{1111}^* = s_{2222}^* = s_{3333}^* = 4.71130754 * 10^{-12}$ $s_{2323}^* = s_{1313}^* = s_{1212}^* = 1.206341304 * 10^{-11}$ $s_{1122}^* = s_{1133}^* = s_{2233}^* = -1.320398957 * 10^{-12}$ Остальные $s_{ijkl}^* \approx 10^{-23}$ $c_{1111}^* = c_{2222}^* = c_{3333}^* = 271518000633.1$ $\mu = s_{2323}^* = s_{1313}^* = s_{1212}^* = 82895279858.3$ $\lambda = c_{1122}^* = c_{1133}^* = c_{2233}^* = 105727440302.8$ Остальные $c_{ijkl}^* \approx 10^{-1}$

**5.1.2. Образцы из однородных изотропных слоев.** Следующие тестовые расчеты в двумерном случае проводились для моделей разных размеров, имеющих один или несколько плоских слоев с упругими свойствами, отличными от вмещающей среды.

Результаты сравнивались с эффективными параметрами, найденными методом осреднения Шенберга для случая системы тонких параллельных слоев [26]. Разница в полученных значениях эффективного тензора жесткости вычислялась как фробениусова норма.

Рассмотрим прямоугольный образец размера  $N \times N$ , заполненный однородным материалом (вмещающая среда) со следующими упругими параметрами:  $V_p = 5000$  м/с,  $V_s = 3000$  м/с,  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>. Внутри образца есть прослой цементующего материала толщины  $Lz$  с параметрами глины  $V_p = 2200$  м/с,  $V_s = 750$  м/с,  $\rho = 2600$  кг/м<sup>3</sup> (рис. 6).



Рис. 6. Модель среды с прослоем

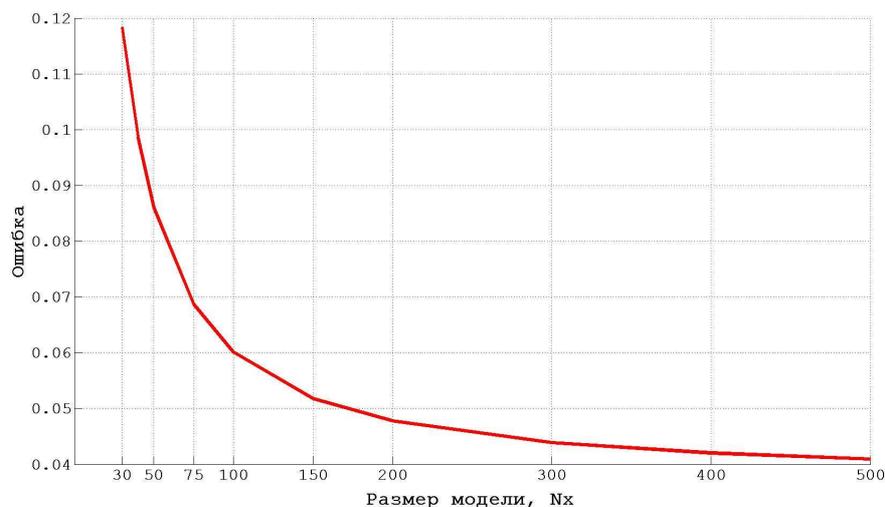


Рис. 7. Изменение ошибки при увеличении размера модели вдоль горизонтального прослоя

В первой серии расчетов проводилось изменение размера модели вдоль прослоя при фиксированном

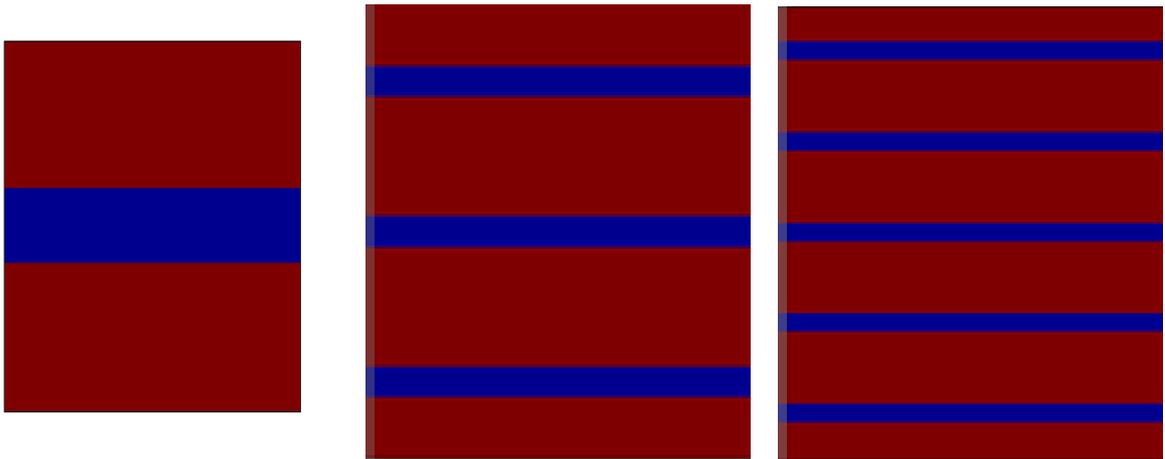


Рис. 8. Модель среды с несколькими прослоями

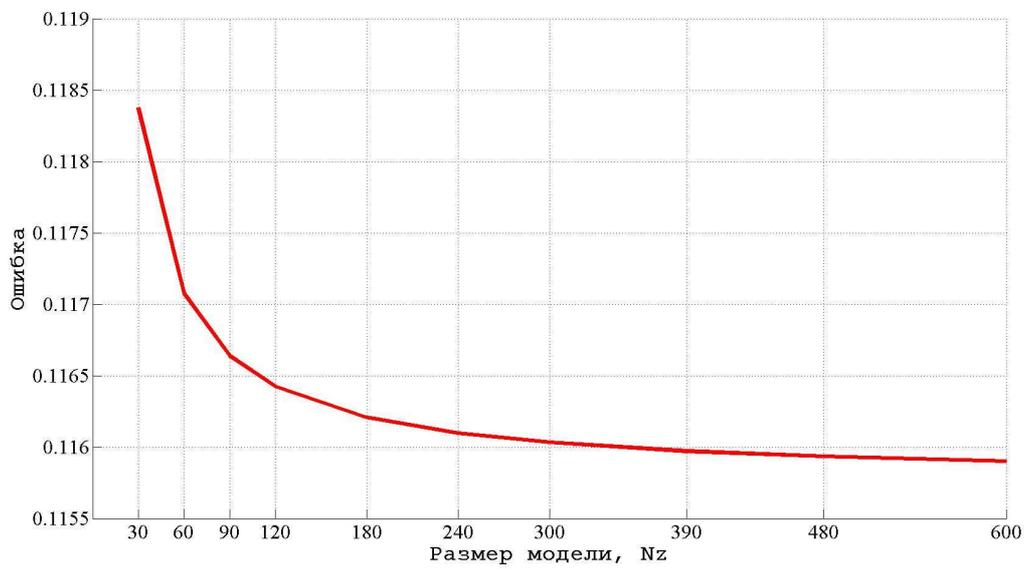


Рис. 9. Изменение ошибки при увеличении размера модели поперек прослоя

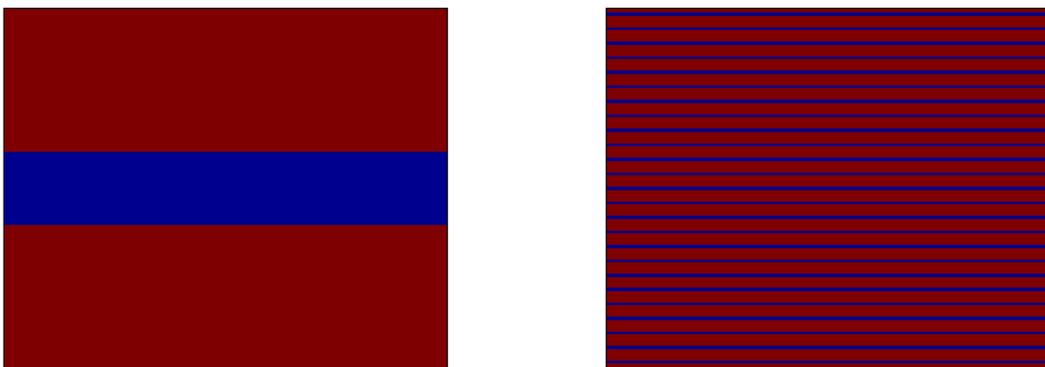


Рис. 10. Измельчение прослоев

размере поперек:

$$Nx = 30, 40, 50, 75, 100, 150, 200, 300, 400, 500; \quad Nz = 30; \quad Lz = 10.$$

Полученные результаты расчетов представлены в виде графика на рис. 7. Видно, что при увеличении размера модели вдоль прослой ошибка по сравнению с результатами, полученными по методу Шенберга, уменьшается; в случае размера модели  $500 \times 30$  ошибка составляет 4%.

Во второй серии расчетов проводилось изменение размера модели поперек слоя при фиксированном размере вдоль прослой. Количество прослоев увеличивалось пропорционально увеличению размера:

$$Nx = 30; \quad Nz = 30, 60, 90, 120, 180, 240, 300, 390, 480, 600; \quad Lz = 10.$$

При толщине  $Nz = 30$  в модели присутствует один прослой с  $Lz = 10$ , при толщине  $Nz = 60$  в модели присутствуют два прослоя с  $Lz = 10$  и так далее (рис. 8). Результаты расчетов приведены на рис. 9. В этом случае тоже имеем хорошее согласование с параметрами эффективной среды, найденными методом осреднения Шенберга [26].

В третьей серии расчетов размер модели оставался фиксированным, но менялись размеры слоев и их количество. В этих расчетах

$$Nx = 500; \quad Nz = 500; \quad Lz = 100, 50, 20, 10, 5, 4, 2, 1.$$

Слои измельчались с коэффициентами в следующей последовательности (рис. 10): 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

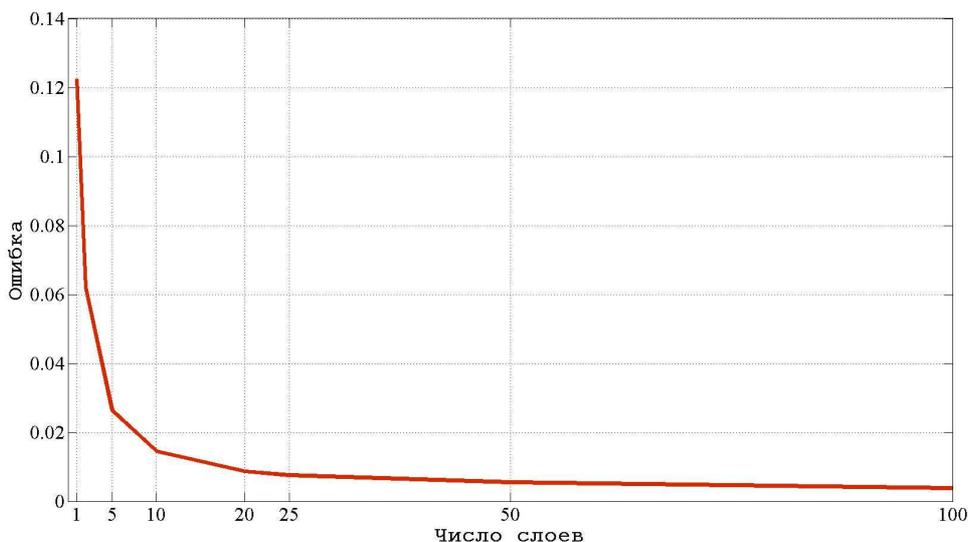


Рис. 11. Изменение ошибки при фиксированном размере модели с меняющимся размером и количеством слоев

Результаты третьей серии расчетов показали, что при увеличении количества прослоев ошибка по сравнению с результатами, полученными по методу Шенберга, уменьшается; при количестве в 100 слоев ошибка составляет меньше одного процента (рис. 11).

Следующая серия тестовых расчетов выполнялась для прослоев, наклоненных под углом  $45^\circ$  (рис. 12). Количество прослоев увеличивалось с увеличением размера образца, который выбирался последовательно равным

$$Nx = Nz = 30, 60, 90, 120, 180, 240, 300, 390, 480, 600$$

при толщине прослой цементующего материала  $Lz = 10$ . Результаты сравнения с осреднением по методу Шенберга приведены на рис. 14.

Для следующей серии численных расчетов мы выбрали угол наклона прослоев равным  $30^\circ$ . Толщина прослой составляет 3 узла сетки. Для каждого варианта модели оценивалась ошибка по сравнению с результатом осреднения по методу Шенберга. Результаты оформлены в виде табл. 6 и набора графиков на рис. 15.

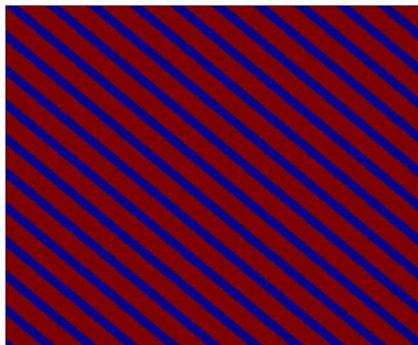


Рис. 12. Квадратная модель с прослоями под углом 45°

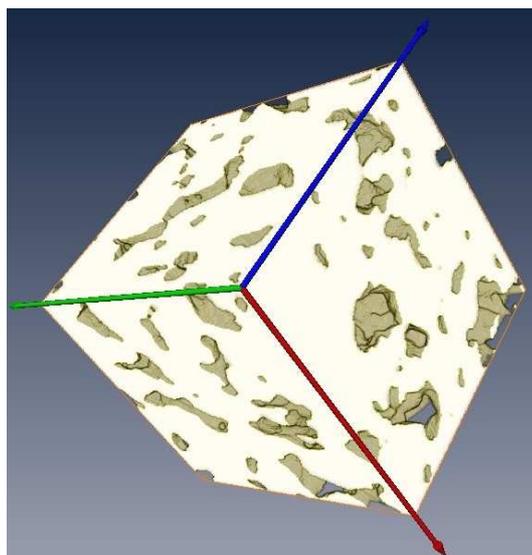


Рис. 13. Цифровой образец ядра

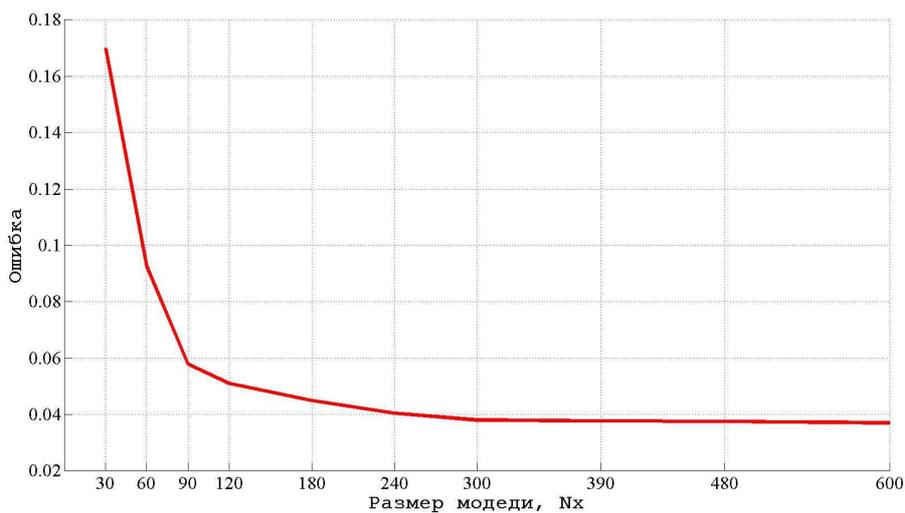


Рис. 14. Изменение ошибки при увеличении размера модели с прослоем под углом 45°

Таблица 6  
Ошибки по сравнению с результатами осреднения по методу Шенберга

Nz	Nx						
	10	20	40	80	160	320	640
10	0.1578	0.1398	0.1304	0.1258	0.1236	0.1225	0.1219
20	0.1351	0.1120	0.1006	0.0956	0.0933	0.0921	0.0916
40	0.0970	0.0814	0.0719	0.0688	0.0679	0.0676	0.0675
80	0.0592	0.0511	0.0451	0.0429	0.0431	0.0435	0.0438
160	0.0329	0.0289	0.0257	0.0243	0.0244	0.0250	0.0254
320	0.0174	0.0154	0.0138	0.0130	0.0130	0.0134	0.0137
640	0.0090	0.0079	0.0071	0.0067	0.0067	0.0069	0.0071

Заключительный численный эксперимент мы провели для трехмерной сегментированной цифровой модели керна карбонатной породы. Цифровой образец в виде куба  $165 \times 165 \times 165$  с пустотно-поровым пространством изображен на рис. 13.

Скелет характеризуется упругими параметрами  $V_p = 6000$  м/с,  $V_s = 4000$  м/с,  $\rho = 2600$  кг/м<sup>3</sup>, а пустоты заполнены жидкостью с параметрами  $V_p = 1500$  м/с,  $V_s = 0$  м/с,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Время счета задачи на 6 узлах Intel Xeon X5670 составило 27 минут. В табл. 7 приведены значения эффективных параметров, полученные для этого образца.

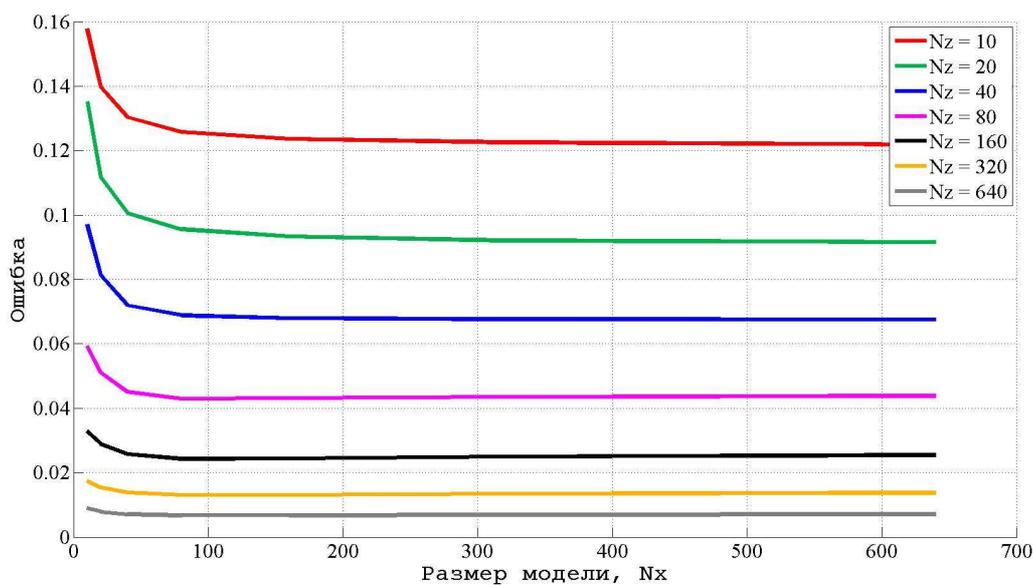


Рис. 15. Изменение ошибки при увеличении размера модели вдоль прослая и поперек прослая при фиксированной толщине прослая в 3 пикселя под углом  $30^\circ$

Таблица 7

Значения эффективных параметров, полученные для 3D образца

$c_{1111}^* = c(1, 1) = 58446214305.4$	$c_{2233}^* = c(2, 3) = 8026109657.0$
$c_{2222}^* = c(2, 2) = 54625181098.6$	$c_{2223}^* = c(2, 4) = 265672923.2$
$c_{3333}^* = c(3, 3) = 53407388431.8$	$c_{2213}^* = c(2, 5) = -38707517.1$
$c_{2323}^* = c(4, 4) = 24089711272.7$	$c_{2212}^* = c(2, 6) = 252997767.6$
$c_{1313}^* = c(5, 5) = 24690129043.7$	$c_{3323}^* = c(3, 4) = 171563203.4$
$c_{1212}^* = c(6, 6) = 25265719999.2$	$c_{3313}^* = c(3, 5) = -166949456.1$
$c_{1122}^* = c(1, 2) = 8152474212.6$	$c_{3312}^* = c(3, 6) = -42341917.3$
$c_{1133}^* = c(1, 3) = 8196905918.0$	$c_{2313}^* = c(4, 5) = 155820605.6$
$c_{1123}^* = c(1, 4) = 3542140.4$	$c_{2312}^* = c(4, 6) = -162975813.3$
$c_{1113}^* = c(1, 5) = -316482765.9$	$c_{1312}^* = c(5, 6) = 299057444.6$
$c_{1112}^* = c(1, 6) = 162857232.1$	

**6. Заключение.** В настоящее время физические характеристики образцов керна, поднятых из скважин при их бурении, определяются путем проведения лабораторных экспериментов. Такие эксперименты выполняются на специальном, чрезвычайно дорогостоящем уникальном оборудовании. В частности, для определения упругих параметров используются различного рода прессы, обеспечивающие широкий спектр нагрузок на образцы, и прецизионное измерение вызываемых ими деформаций. Необходимо подчеркнуть, что это не такой быстрый процесс, так как необходима реализация различных нагрузок. Кроме того, всегда существует опасность разрушения образца в процессе выполнения лабораторных экспериментов. Особенно для образцов, ослабленных в процессе бурения и неизбежной декомпрессии во время подъема из скважины.

В то же время, зачастую образцы сохраняют свою исходную структуру, которая отчетливо проявляется в трехмерных цифровых томографических изображениях. Именно на основе таких изображений

и анализа вещественного состава образцов и строится трехмерная цифровая модель ядра. Ее последующее использование позволяет перейти от дорогостоящих и чрезвычайно ресурсоемких лабораторных экспериментов с реальными образцами к методике реконструкции их физических параметров на основе численного моделирования. Наличие такой трехмерной цифровой модели ядра позволяет помимо упругих параметров определять и ряд других не менее важных его свойств. В частности, путем проведения численного моделирования потоков в построенных образцах можно определять гидродинамические характеристики сред, в том числе и такие важные, как проницаемость.

Исследования, представленные в данной статье, выполнены при частичной поддержке РФФИ (гранты 16-05-0800, 18-55-20002), а также проекта № 66 “Разработка научных основ технологий сбора и обработки сейсмических данных в условиях развитого ледового покрова в транзитной зоне и на шельфе Северного Ледовитого океана” программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Поисковые фундаментальные научные исследования в интересах развития Арктической зоны Российской Федерации”.

Работа выполнена с использованием оборудования Центров коллективного пользования высокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова, ЦКП Сибирского суперкомпьютерного центра ИВМиМГ СО РАН и Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев А.С., Костин В.И., Хайдуков В.Г., Чеверда В.А. Восстановление двумерных возмущений скорости вертикально-неоднородной акустической среды по данным многократного перекрытия (линеаризованная постановка) // Геология и геофизика. 1997. **38**, № 12. 1980–1992.
2. Протасов М.И., Чеверда В.А. Построение сейсмических изображений в истинных амплитудах // Доклады РАН. 2006. **407**, № 4. 528–532.
3. Лисица В.В., Поздняков В.А., Решетова Г.В., Хайдуков В.Г., Чеверда В.А., Шиликов В.В. Рассеянные волны: численное моделирование и построение изображений. Часть 1: Двумерные среды // Технологии сейсморазведки. 2013. № 1. 46–58.
4. Протасов М.И., Решетова Г.В., Чеверда В.А. Выявление зон трещиноватости на основе взвешенного суммирования многокомпонентных данных и спектрального анализа изображений // Технологии сейсморазведки. 2014. № 1. 59–66.
5. Протасов М.И., Решетова Г.В., Чеверда В.А. Построение трехмерных дифракционных сейсмических изображений по данным 3D-сейсморазведки на основе асимметричного суммирования и спектральной фильтрации // Геофизика. 2017. № 2. 14–21.
6. Гадьяльшин К.Г., Колохин Д.Р., Лисица В.В., Протасов М.И., Решетова Г.В., Хачкова Т.С., Чеверда В.А., Козяев А.А., Колесов В.А., Мерзлякина А.С., Шиликов В.В. Оценка возможности выделения тонких кавернозных прослоев по рассеянным волнам в трещиноватом разрезе Юрубчено-Тохомского месторождения // Технологии сейсморазведки. 2017. № 1. 56–62.
7. Иванов М.К., Бурлин Ю.К., Калмыков Г.А., Карнюшина Е.Е., Коробова Н.И. Петрофизические методы исследования ядерного материала (терригенные отложения). М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2008.
8. Andra H., Combaret N., Dvorkin J., Glatt E., Han J., Kabel M., Keehm Y., Krzikalla F., Lee L., Madonna C., Marsh M., Mukerji T., Saenger E.H., Sain R., Saxena N., Ricker S., Wiegmann A., Zhan X. Digital rock physics benchmarks. Part I: Imaging and segmentation // Computers and Geosciences. 2013. **50**. 25–32.
9. Andra H., Combaret N., Dvorkin J., Glatt E., Han J., Kabel M., Keehm Y., Krzikalla F., Lee L., Madonna C., Marsh M., Mukerji T., Saenger E.H., Sain R., Saxena N., Ricker S., Wiegmann A., Zhan X. Digital rock physics benchmarks. Part II: Computing effective properties // Computers and Geosciences. 2013. **50**. 33–43.
10. Sain R. Numerical simulation of pore-scale heterogeneity and its effects on elastic, electrical and transport properties. Ph.D. Dissertation. Stanford: Stanford Univ., 2010.
11. Bazaikin Ya., Gurevich B., Iglauer S., Khachkova T., Kolyukhin D., Lebedev M., Lisitsa V., Reshetova G. Effect of CT image size and resolution on the accuracy of rock property estimates // Journal of Geophysical Research. 2017. **122**, N 5. 3635–3623.
12. Шермергор Т.Д. Теория упругости микroneоднородных сред. М.: Наука, 1977.
13. Сендецки Дж. Упругие свойства композитов. Т. 2. Механика композитных материалов. М.: Мир, 1978.
14. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982.
15. Aboudi J. Mechanics of composite materials: a unified micromechanical approach. Amsterdam: Elsevier, 1991.
16. Zhang W., Dai G., Wang F., Sun S., Bassir H. Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures // Acta Mechanica Sinica. 2007. **23**, N 1. 77–89.
17. Saxena N., Mavko G. Estimating elastic moduli of rocks from thin sections: digital rock study of 3D properties from 2D images // Computers and Geosciences. 2016. **88**. 9–21.
18. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука. 2013.
19. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003.
20. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2013.

21. Erlangga Y.A., Vuik C., Oosterlee C.W. On a class of preconditioners for solving the Helmholtz equation // Applied Numerical Mathematics. 2004. **50**, N 3–4. 409–425.
22. Belonosov M., Dmitriev M., Kostin V., Neklyudov D., Tcheverda V. An iterative solver for the 3D Helmholtz equation // Journal of computational physics. 2017. **345**. 330–344.
23. Ландау Л.Д., Lifshits E.M. Механика. М.: Наука, 1988.
24. Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method // Geophysics. 1986. **51**, N 4. 889–901.
25. Vishnevsky D., Lisitsa V., Tcheverda V., Reshetova G. Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves // Geophysics. 2014. **79**, N 4. T219–T232.
26. Schoenberg M., Muir F. A calculus for finely layered anisotropic media // Geophysics. 1989. **54**, N 5. 581–589.

Поступила в редакцию  
02.11.2017

---

## A Numerical Method to Estimate the Effective Elastic Moduli of Rocks from Two- and Three-Dimensional Digital Images of Rock Core Samples

G. V. Reshetova<sup>1</sup> and T. S. Khachkova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: kgv@nmsf.ssc.ru*

<sup>2</sup> *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptiyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Junior Scientist, e-mail: KhachkovaTS@ipgg.sbras.ru*

Received November 2, 2017

**Abstract:** A numerical method to estimate the effective elastic moduli of rocks from two- and three-dimensional digital images of rock core samples is proposed. The method is based on the energy equivalence principle for deformations caused by the homogeneous boundary static conditions that simulate a physical experiment. On this basis, the effective compliance tensor of a representative volume of an inhomogeneous medium is determined. A specific feature of the proposed algorithm is a new scheme for calculating the stress-strain static state of a sample by solving the corresponding problem of dynamic elasticity theory using the relaxation method. The obtained numerical results are discussed. The proposed method is verified using homogeneous samples with specified properties as well as for layered materials with effective parameters obtained according to the Schoenberg method. In conclusion, the effective parameters for a three-dimensional core sample are presented.

**Keywords:** effective parameters, representative volume, energy equivalence principle, homogeneous boundary conditions, relaxation method.

### References

1. A. S. Alekseev, V. I. Kostin, V. G. Khaidukov, and V. A. Cheverda, “Recovery of Two-Dimensional Perturbations of the Velocity of a Vertically-Inhomogeneous Medium from Multicoverage Data (Linearized Formulation),” *Geolog. Geofiz.* **38** (12), 1980–1992 (1997) [*Russ. Geol. Geophys.* **38** (12), 2012–2025 (1997)].
2. M. I. Protasov and V. A. Cheverda, “True-Amplitude Seismic Imaging,” *Dokl. Akad. Nauk* **407** (4), 528–532 (2006) [*Dokl. Earth Sci.* **407** (2), 441–445 (2006)].
3. V. V. Lisitsa, V. A. Pozdnyakov, G. V. Reshetova, et al., “Scattered Seismic Responses: Simulation and Imaging. Part 1. Two-Dimensional Media,” *Tekhnol. Seismorazvedki*, No. 1, 46–58 (2013).
4. M. I. Protasov, G. V. Reshetova, and V. A. Tcheverda, “Recovery of Fracture Zones by Weighted Summation of Multicomponent Data and Image Spectrum Analysis,” *Tekhnol. Seismorazvedki*, No. 1, 59–66 (2014).
5. M. I. Protasov, G. V. Reshetova, and V. A. Tcheverda, “3D Diffraction Imaging of 3D Seismic Data on the Basis of Asymmetric Summation and Spectral Filtering,” *Geofizika*, No. 2, 14–21 (2017).

6. K. G. Gadylyshin, D. R. Kolyukhin, V. V. Lisitsa, et al., “Use of Scattered Wavefield to Locate Fine Cavernous Layers in Fractured Formations of Yurubcheno–Tokhomsкое Field,” *Tekhnol. Seismorazvedki*, No. 1, 56–62 (2017).
7. M. K. Ivanov, Yu. K. Burlin, G. A. Kalmykov, et al., *Petrophysical Methods of Studying a Core Material (Terrigenous Deposits)* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2008) [in Russian].
8. H. Andra, N. Combaret, J. Dvorkin, et al., “Digital Rock Physics Benchmarks — Part I: Imaging and Segmentation,” *Comput. Geosci.* **50**, 25–32 (2013).
9. H. Andra, N. Combaret, J. Dvorkin, et al., “Digital Rock Physics Benchmarks — Part II: Computing effective properties,” *Comput. Geosci.* **50**, 33–43 (2013).
10. R. Sain, *Numerical Simulation of Pore-Scale Heterogeneity and its Effects on Elastic, Electrical and Transport Properties*, PhD Thesis (Stanford Univ., Stanford, 2010).
11. Ya. Bazaikin, B. Gurevich, S. Iglauer, et al., “Effect of CT Image Size and Resolution on the Accuracy of Rock Property Estimates,” *J. Geophys. Res.* **122** (5), 3635–3647 (2017).
12. T. D. Shermergor, *The Theory of Elasticity of Microinhomogeneous Media* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].
13. G. P. Sendeckyj (Ed.), *Composite Materials, Vol. 2: Mechanics of Composite Materials* (Academic, New York, 1974; Mir, Moscow, 1978).
14. R. M. Christensen, *Mechanics of Composite Materials* (Wiley, New York, 1979; Mir, Moscow, 1982).
15. J. Aboudi, *Mechanics of Composite Materials: A Unified Micromechanical Approach* (Elsevier, Amsterdam, 1991).
16. W. Zhang, G. Dai, F. Wang, et al., “Using Strain Energy-Based Prediction of Effective Elastic Properties in Topology Optimization of Material Microstructures,” *Acta Mech. Sin.* **23** (1), 77–89 (2007).
17. N. Saxena and G. Mavko, “Estimating Elastic Moduli of Rocks from Thin Sections: Digital Rock Study of 3D Properties from 2D Images,” *Comput. Geosci.* **88**, 9–21 (2016).
18. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobelkov, *Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 2013) [in Russian].
19. A. A. Samarskii and A. V. Gulin, *Numerical Methods of Mathematical Physics* (Nauchnyi Mir, Moscow, 2003) [in Russian].
20. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (SIAM Press, Philadelphia, 2003; Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013).
21. Y. A. Erlangga, C. Vuik, and C. W. Oosterlee, “On a Class of Preconditioners for Solving the Helmholtz Equation,” *Appl. Numer. Math.* **50** (3–4), 409–425 (2004).
22. M. Belonosov, M. Dmitriev, V. Kostin, et al., “An Iterative Solver for the 3D Helmholtz Equation,” *J. Comput. Phys.* **345**, 330–344 (2017).
23. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics* (Nauka, Moscow, 1988; Butterworth Heinemann, Oxford, 2001).
24. J. Virieux, “*P*-*SV* Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity–Stress Finite-Difference Method,” *Geophysics* **51** (4), 889–901 (1986).
25. D. Vishnevsky, V. Lisitsa, V. Tcheverda, and G. Reshetova, “Numerical Study of the Interface Errors of Finite-Difference Simulations of Seismic Waves,” *Geophysics* **79** (4), T219–T232 (2014).
26. M. Schoenberg and F. Muir, “A Calculus for Finely Layered Anisotropic Media,” *Geophysics* **54** (5), 581–589 (1989).