

УДК 517.97; 539.376; 539.214; 539.3

doi 10.26089/NumMet.v18r430

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ПАНЕЛЕЙ

К. С. Бормотин<sup>1</sup>

Представлена математическая модель обратных задач формообразования тонкостенных панелей, учитывающая пластические деформации и деформации ползучести и позволяющая описывать различные технологические процессы. Построен итерационный метод решения обратных задач формообразования и доказана его сходимость при условиях, зависящих от параметров процессов. Численные решения обратных задач, полученные методом конечных элементов, согласуются с условиями сходимости.

**Ключевые слова:** обратные задачи формообразования, пластичность, ползучесть, упругость, вариационные неравенства, достаточные условия единственности, итерационные методы, метод конечных элементов.

**Введение.** Как известно, в современном авиастроении увеличивается использование монолитных панелей сложной пространственной формы, что требует поиска технологических процессов их изготовления с обеспечением высоких требований по точности и качеству изделий. Технологические задачи формообразования крупногабаритных изделий используются в современном отечественном и зарубежном авиастроении [1–4]. Математическая формулировка для этих процессов может быть представлена в виде прямой и обратной задачи формообразования [5, 6]. В настоящей статье в обратной задаче формообразования определяются внешние кинематические воздействия, под действием которых в течение заданного времени должно происходить неупругое деформирование, обеспечивающее заданную остаточную конфигурацию после разгрузки.

В ряде работ разрабатывались математические формулировки указанных задач, учитывающие деформирование в условиях только лишь пластичности или только ползучести, а разгрузку — в условиях упругости [6–11]. На основе этих моделей строились итерационные методы, доказывалась единственность решения и сходимость методов. В частности, в работах [8, 9] показана сходимость итерационного метода при выборе коэффициента  $0 < \alpha^k < 2$ . Ряд расчетов задач в этих работах показывают неустойчивость при достижении некоторой величины отклонений приближений от искомого решения и сужение области выбора коэффициента  $\alpha^k$  при учете геометрической нелинейности [11]. Расчеты таких задач с помощью регуляризации решения значительно не улучшают результат [10].

Учет различных технологических процессов в обратных задачах формообразования требует общих постановок и обоснование корректности в общем случае. В нашей работе разрабатывается метод решения обратных задач формообразования, обобщенный на случай возникновения пластических деформаций и деформаций ползучести и на случай учета геометрической нелинейности. Условия сходимости метода зависят от модели задачи.

**1. Формулировка обратных задач формообразования.** Пусть  $\Omega \subset R^3$  — ограниченная область с достаточно регулярной границей  $S$ . Ниже используются функциональные пространства Соболева измеримых по Лебегу функций, имеющих обобщенные производные заданного порядка. Применяются стандартные обозначения норм [12]. Обозначим через  $u = (u_1, u_2, u_3)$  и  $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$  векторы текущих и остаточных перемещений  $u \in [H^1(Q)]^3$  и  $\tilde{u} \in [H^1(\tilde{Q})]^3$ , где  $Q = \Omega \times [0 \leq t \leq T]$  и  $\tilde{Q} = \Omega \times [0 \leq t \leq \tilde{T}]$ . Точкой сверху обозначаются скорости текущих и остаточных перемещений  $\dot{u}$  и  $\dot{\tilde{u}}$ . Скалярное произведение

в  $L_2(S)$  имеет вид  $(\dot{u}, \dot{v}) = \int_S \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i \dot{v}_i dS$ . Введем следующие нормы:

$$\|\dot{u}\|_{L^2(S)} = \|\dot{u}\| = \left( \int_S \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i^2 dS \right)^{1/2}, \quad \|\dot{u}\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i^2 d\Omega + \sum_{i,j} \int_{\Omega} \dot{u}_{i,j}^2 d\Omega \right)^{1/2},$$

<sup>1</sup> Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет (ФГБОУ ВПО “КнАГТУ”), Институт компьютерного проектирования машиностроительных технологий и оборудования, просп. Ленина, 27, 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре; профессор, e-mail: cvmi@knastu.ru

где через запятую обозначено дифференцирование  $\dot{u}_{i,j} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}$ .

Для постановки задач формообразования используются функционалы вариационного принципа Хилла [13], описывающие задачи квазистатического деформирования. Обратная задача кинематического формообразования формулируется методом штрафа [12] в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом [8, 9]

$$J(\dot{u}(t), \dot{u}(\tilde{t})) = \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\dot{u}(t) - \dot{u}^*(t)\|^2 + a(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) + a(\dot{u}(\tilde{t}), \dot{u}(\tilde{t})) + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\dot{u}(\tilde{t}) - \dot{u}^*(\tilde{t})\|^2, \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0, \quad u_i^*(0) = 0, \quad u_i(0) = 0,$$

где  $\dot{u}^*(\tilde{t})$  и  $\dot{u}^*(t)$  — заданные остаточные скорости перемещений тела и текущие скорости перемещений в моменты времени  $\tilde{t}$  и  $t$  (переменные  $\tilde{t}$  и  $t$  в условиях ползучести представляют время, а в условиях упругости и пластичности — параметр деформирования); переменная  $t \in [0, T]$  — время деформирования тела под нагрузкой;  $\tilde{t} \in [0, \tilde{T}]$  — время разгрузки; для случая бесконечно малых деформаций потенциальные формы определяются в виде [14]

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{u}))}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{u})} \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{v}) d\Omega, \quad a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{u}))}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{u})} \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{v}) d\Omega,$$

$$W(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijpl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{pl} - c_{ijpl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{pl}^n, \quad W(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} \tilde{c}_{ijpl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{pl} - \tilde{c}_{ijpl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{pl}^n,$$

где  $c_{ijpl}$ ,  $\tilde{c}_{ijpl}$  — компоненты тензора упругих констант;  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  — компоненты скоростей текущих и остаточных деформаций;  $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$  — компоненты скоростей неупругих деформаций,  $i, j, p, l = 1, 2, 3$ :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}). \quad (2)$$

Так как в (1) условия на скорости перемещений учитываются с помощью штрафных коэффициентов, то в вариационном принципе кинематически допустимым полем скоростей перемещений будет поле скоростей перемещений, учитывающее условия закрепления. Условия, исключая жесткие перемещения тела, в задаче деформирования и разгрузки должны быть одинаковыми. Далее будем понимать под произвольным полем скоростей перемещений скорости перемещений, учитывающие данные условия.

В зависимости от моделируемого технологического процесса формообразования, при котором, в частности, происходит деформирование в условиях пластичности, а затем при высоких температурах в условиях ползучести, компоненты тензора упругих констант могут принимать разные значения, т.е.  $c_{ijpl} = c_{ijpl}(t)$ ,  $\tilde{c}_{ijpl} = \tilde{c}_{ijpl}(\tilde{t})$ , а в качестве скоростей неупругих деформаций могут быть приняты:

1) скорости пластических деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p$  (в этом случае  $t$  — параметр деформирования), где  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ ,  $\lambda > 0$  — функция, требующая определения,  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}$  — вектор в пространстве компонент девиатора тензора напряжений, направленный по нормали к поверхности текучести, уравнение  $f = 0$  определяет поверхность в пространстве компонент девиатора тензора напряжений [14];

2) скорости деформаций ползучести  $\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \dot{\varepsilon}_{ij}^c$ , где, в частности, закон установившейся ползучести может иметь вид  $\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \gamma s_{ij}$ ,  $\gamma = \frac{3}{2} B \bar{\sigma}^{n-1}$ ,  $s_{ij}$  — компоненты девиатора тензора напряжений,  $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$  — эффективное напряжение (интенсивность напряжений),  $B$ ,  $n$  — константы ползучести [14];

3) сумма скоростей пластических деформаций и деформаций ползучести  $\dot{\varepsilon}_{ij}^n = \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \dot{\varepsilon}_{ij}^c$ .

Текущие и остаточные скорости напряжений при бесконечно малых деформациях имеют вид [14]

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} = c_{ijpl} (\dot{\varepsilon}_{pl} - \dot{\varepsilon}_{pl}^n), \quad \dot{\rho}_{ij} = \frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} = c_{ijpl} (\dot{\varepsilon}_{pl} - \dot{\varepsilon}_{pl}^n).$$

Стационарное значение функционала (1) при учете независимости  $\dot{u}(t)$  и  $\dot{u}(\tilde{t})$  будет давать решение квазистатической задачи деформирования под нагрузкой и квазистатической задачи разгрузки. Конечное время нагружения принято равным  $T$ , а время разгрузки —  $\tilde{T}$ , так что время всего процесса формообразования будет равно  $T + \tilde{T}$ .

Пусть имеются функции  $\dot{\sigma}_{ij}^d$  и  $\dot{\epsilon}_{ij}^d$ , которые определяются в виде

$$\dot{\sigma}_{ij}^d = \dot{\rho}_{ij}(\tilde{t}) - \dot{\sigma}_{ij}(t), \quad \dot{\epsilon}_{ij}^d = \dot{\epsilon}_{ij}(\tilde{t}) - \dot{\epsilon}_{ij}(t). \tag{3}$$

Так как  $\dot{\epsilon}_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}(t)$  удовлетворяют условиям совместности деформаций и одинаковым граничным условиям, то их разность  $\dot{\epsilon}_{ij}^d$  тоже будет удовлетворять условиям совместности.

Как было показано в [8, 9], вариационный принцип задачи разгрузки можно представить в следующем виде (учитываются уравнения равновесия  $\dot{\rho}_{ij,j} = 0, \dot{\sigma}_{ij,j} = 0$  в  $\Omega$  и граничные условия  $\dot{\rho}_{ij}n_j = 0$  на  $S$ ):

$$\int_{\Omega} \dot{\rho}_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}^d) \delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega = \int_S \dot{\sigma}_{ij} n_j \delta \dot{u}_i dS + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^d \delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega = 0. \tag{4}$$

В [8, 9] учитывалась только упругая разгрузка, что соответствует принятию в (4)  $\tilde{t} = 0$ . В данном случае в (4) используются скорости напряжений и деформаций в разные моменты времени. Единственность решения (4) определит однозначную связь путей деформирования при нагрузке и разгрузке.

Таким образом, если ввести формулы

$$\dot{\sigma}_{ij}^d = \frac{\partial W^d(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}, \quad \text{где} \quad W^d(\dot{\epsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} \tilde{c}_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl} - c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl} - \tilde{c}_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^n(\tilde{t}) + c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^n(t),$$

то достаточными условиями единственности [13, 14] решения задач деформирования с введенными потенциалами будут в случае бесконечно малых деформаций

$$\int_{\Omega} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega > 0, \quad \int_{\Omega} \Delta \dot{\rho}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega > 0, \quad \int_{\Omega} \Delta \dot{\sigma}_{ij}^d \Delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega > 0 \tag{5}$$

для всех пар непрерывно дифференцируемых полей скоростей перемещений (учитываются соотношения Коши (2)), принимающих заданные значения на границе. Здесь  $\Delta$  означает разность соответствующих величин в любых двух различных формах деформации. С учетом условий (5), функционал (1) выпуклый [13]. Вариация (1) в силу (5) дает вариационное неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon_1} (\dot{u} - \dot{u}^*, \dot{v} - \dot{u}) + a(\dot{u}, \dot{v} - \dot{u}) + a(\dot{u}, \dot{v} - \dot{u}) + \frac{1}{\varepsilon_2} (\dot{u} - \dot{u}^*, \dot{v} - \dot{u}) \geq 0 \quad \forall \dot{v}, \dot{v}.$$

Процессы деформирования представляются в виде кривых — траекторий в пространстве напряжений или деформаций [15]. Рассматриваемые потенциалы являются однозначными функциями, имеющими непрерывные производные [13], что соответствует гипотезе о непрерывной зависимости определяющих соотношений и выражает принцип макродетерминизма [15].

Рассматривая путь деформирования, включающий в себя нагрузку и разгрузку, обозначим при  $\tilde{t} = t + \Delta t$  остаточные скорости напряжений и деформаций через  $\dot{\sigma}_{ij}(t + \Delta t)$  и  $\dot{\epsilon}_{ij}(t + \Delta t)$ , тогда при достаточно малых  $\Delta t$  можно записать

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^d \dot{\epsilon}_{ij}^d d\Omega = a(\dot{u}^d, \dot{u}^d) = \int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{ij}(t + \Delta t) - \dot{\sigma}_{ij}(t)) (\dot{\epsilon}_{ij}(t + \Delta t) - \dot{\epsilon}_{ij}(t)) d\Omega \approx \int_{\Omega} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega.$$

Так как должно выполняться условие (5) и  $\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial W(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}$ , то в случае бесконечно малых  $\Delta \dot{\epsilon}_{ij}$  можно записать  $\int_{\Omega} \frac{\partial^2 W(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{ij} \partial \dot{\epsilon}_{pl}} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{pl} d\Omega > 0$ . Далее будем предполагать выполнение неравенства

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 W(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{ij} \partial \dot{\epsilon}_{pl}} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{pl} d\Omega \geq c \int_{\Omega} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega = c \|\Delta \dot{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad c = c(t) > 0.$$

Используя неравенство Корна [16]  $\|\Delta \dot{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\Delta \dot{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)}$  для  $\Delta \dot{u} \in V$  ( $V$  — замкнутое подпространство  $H^1(\Omega)$ , такое, что  $V \cap R = \{0\}$ , где  $R$  — пространство жестких перемещений) и неравенство  $\|\Delta \dot{u}\|_{L^2(S)} \leq c \|\Delta \dot{u}\|_{H^1(\Omega)}$  [17], можно записать

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 W(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{ij} \partial \dot{\epsilon}_{pl}} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{pl} d\Omega \geq c \|\Delta \dot{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_1 \|\Delta \dot{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq c_2 \|\Delta \dot{u}\|^2, \tag{6}$$

где  $c(t) > 0$ ,  $c_1(t) > 0$ ,  $c_2(t) > 0$ .

В случае, когда конструкция и уровень деформаций не позволяют использовать формулировку, учитывающую бесконечно малые деформации, то рассматриваются геометрически нелинейные задачи. Геометрически нелинейные задачи в данной работе рассматриваются в общей лагранжовой формулировке [14]. В этом случае деформирование происходит в условиях малых деформаций, но больших перемещений и поворотов, что характерно для деформирования криволинейных тонкостенных конструкций, а потенциальные формы определяются в виде

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial E(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} \dot{v}_{i,j} d\Omega, \quad \text{где} \quad E(\dot{u}_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl} - c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl}^n + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{u}_{p,i} \dot{u}_{p,j},$$

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{E}(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} \dot{v}_{i,j} d\Omega, \quad \text{где} \quad \tilde{E}(\dot{u}_{i,j}) = \frac{1}{2} \tilde{c}_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl} - \tilde{c}_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl}^n + \frac{1}{2} \rho_{ij} \dot{u}_{p,i} \dot{u}_{p,j}.$$

Здесь скорости тензора деформаций Грина–Лагранжа записываются в форме

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{p,i} u_{p,j} + u_{p,i} \dot{u}_{p,j}), \quad \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} + \tilde{u}_{p,i} \dot{u}_{p,j}),$$

а текущие и остаточные скорости первого тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа определяются в виде

$$\dot{\Sigma}_{ij} = \frac{\partial E(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} = (\delta_{ip} + u_{i,p}) \dot{\sigma}_{pj} + \dot{u}_{i,p} \sigma_{pj}, \quad \dot{P}_{ij} = \frac{\partial \tilde{E}(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} = (\delta_{ip} + \tilde{u}_{i,p}) \dot{\rho}_{pj} + \dot{u}_{i,p} \rho_{pj}.$$

В этом случае форма  $a(\dot{u}^d, \dot{u}^d)$  представляется как соотношение

$$a(\dot{u}^d, \dot{u}^d) = \int_{\Omega} (\dot{P}_{ij} - \dot{\Sigma}_{ij}) \dot{u}_{i,j}^d d\Omega,$$

а достаточные условия единственности примут вид

$$\int_{\Omega} \Delta \dot{\Sigma}_{ij} \Delta \dot{u}_{i,j} d\Omega > 0, \quad \int_{\Omega} \Delta \dot{P}_{ij} \Delta \dot{u}_{i,j} d\Omega > 0$$

для всех пар непрерывно дифференцируемых полей скоростей перемещений, принимающих заданные значения на границе [13, 14].

В случае бесконечно малых  $\Delta \dot{u}_{i,j}$  можно записать  $\int_{\Omega} \frac{\partial^2 E(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j} \partial \dot{u}_{p,l}} \Delta \dot{u}_{i,j} \Delta \dot{u}_{p,l} d\Omega > 0$  [13]. Известно, что [13, 14]

$$\int_{\Omega} \Delta \dot{\Sigma}_{ij} \Delta \dot{u}_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \left( \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \Delta \dot{u}_{p,i} \Delta \dot{u}_{p,j} \right) d\Omega,$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа. Тогда предположим выполнение неравенства

$$\int_{\Omega} \left( \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \Delta \dot{u}_{p,i} \Delta \dot{u}_{p,j} \right) d\Omega \geq c_3 \|\Delta \dot{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad c_3(t) > 0.$$

Скорости тензора деформаций Грина–Лагранжа имеют дополнительные члены с производными в сравнении со скоростями тензора бесконечно малых деформаций и поэтому, учитывая неравенство Корна, будут удовлетворять соотношениям  $\|\Delta \dot{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} \geq \|\Delta \dot{u}\|$ . Следовательно, можно записать неравенство

$$\int_{\Omega} \Delta \dot{\Sigma}_{ij} \Delta \dot{u}_{i,j} d\Omega \geq c_4 \|\Delta \dot{u}\|, \quad c_4(t) > 0. \quad (7)$$

**2. Итерационный метод решения обратных задач формообразования.** Обобщая неравенства (6), (7), вводятся параметры, при которых предполагается выполнение неравенств

$$a(\Delta \dot{u}, \Delta \dot{u}) \geq \lambda_1 \|\Delta \dot{u}\|^2, \quad a(\dot{u}^d, \dot{u}^d) \geq \lambda \|\dot{u}^d\|^2, \quad (8)$$

где  $\lambda_1(t) > 0, \lambda(t, \bar{t}) > 0$ .

Единственность решения обратной задачи доказана для упругой разгрузки в [8, 9]. Доказательство в данном общем случае с учетом (8) будет аналогичным. В работах [8, 9], учитывая ограничения методом штрафа, а также управление с помощью обратных связей, строится итерационный метод решения обратных задач в виде

$$A_1^k(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^{k+1}) + a(\dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^{k+1}) + a(\dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^*) + A_2^k(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^*) \geq 0 \quad \forall \dot{v}, \quad \forall \dot{u}^*, \quad (9)$$

где  $A_1^k > 0, A_2^k > 0, k = 1, 2, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} A_1^k = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} A_2^k = \infty$ .

**Лемма.** Пусть  $\dot{u}^k$  и  $\dot{u}^k$  – решения задачи деформирования с заданными на поверхности  $S$  граничными условиями и задачи разгрузки. Тогда итерационный процесс (9) решения обратной задачи формообразования на  $S$  представляется в виде

$$\dot{u}^{k+1} = \dot{u}^k + \alpha^k (\dot{u}^* - \dot{u}^k) + \frac{\lambda}{A_1^k} (\dot{u}^k - \dot{u}^k), \quad \alpha^k = \frac{A_2^k}{A_1^k}. \quad (10)$$

**Доказательство.** Пусть в (9)  $\dot{v}_i = \dot{u}_i^{k+1} - \dot{u}_i^k + \dot{u}_i^*, \dot{v}_i = \dot{u}_i^* + \dot{u}_i^k - \dot{u}_i^k$ , тогда

$$A_1^k(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^d) + a(\dot{u}^k, \dot{u}^d) - a(\dot{u}^k, \dot{u}^d) - A_2^k(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^d) \geq 0, \quad (11)$$

где  $\dot{u}_i^d = \dot{u}_i^k - \dot{u}_i^k$ . Но  $a(\dot{u}^k, \dot{u}^d) - a(\dot{u}^k, \dot{u}^d) = a(\dot{u}^d, \dot{u}^d) \geq \lambda \|\dot{u}^d\|^2$ , тогда (11) примет вид

$$(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^d) - \frac{A_2^k}{A_1^k} (\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^d) - \frac{\lambda}{A_1^k} (\dot{u}^k - \dot{u}^k, \dot{u}^d) \geq 0.$$

Данное неравенство определяет операцию проектирования [12], поэтому приходим к итерационному процессу (10) в области  $S$ .

**Теорема.** Пусть  $\dot{u}^k, \dot{u}^k$  – решения задачи деформирования с заданными на поверхности  $S$  граничными условиями и разгрузки. Тогда последовательность  $\{\dot{u}^k\}$ , полученная по методу (10), сходится в  $L_2(S)$  при следующих условиях:

$$0 < \frac{\lambda_1}{A_1^k} < \frac{1}{2},$$

$$\max \left( 1 - \frac{\lambda}{A_1^k} - \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{A_1^k}}, 0 \right) \leq \alpha^k \leq 1 - \frac{\lambda}{A_1^k} + \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{A_1^k}} \quad \text{и} \quad A_1^k \geq 2\lambda \quad \text{при} \quad \beta = \frac{\|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2}{\|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2} \geq 1,$$

$$\max \left( 1 - \frac{\lambda}{A_1^k \beta} - \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{A_1^k \beta} + \left( \frac{\lambda}{A_1^k} \right)^2 \frac{(1-\beta)}{\beta^2}}, 0 \right) \leq \alpha^k \leq 1 - \frac{\lambda}{A_1^k \beta} + \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{A_1^k \beta} + \left( \frac{\lambda}{A_1^k} \right)^2 \frac{(1-\beta)}{\beta^2}}$$

$$\text{и} \quad A_1^k \geq \frac{\lambda(1+\sqrt{\beta})}{\beta} \quad \text{при} \quad 0 < \beta < 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Доказательство.** Пусть  $\dot{u}^*, \dot{u}^*$  – решение обратной задачи формообразования, тогда должно выполняться неравенство

$$a(\dot{u}^*, \dot{v} - \dot{u}^*) + a(\dot{u}^*, \dot{v} - \dot{u}^*) \geq 0 \quad \forall \dot{v}, \quad \dot{v}. \quad (12)$$

Суммированием (9) при  $\dot{v}_i = \dot{u}_i^{k+1} - \dot{u}_i^k + \dot{u}_i^*, \dot{v}_i = \dot{u}_i^k$  и (12) при  $\dot{v}_i = \dot{u}_i^k, \dot{v}_i = 2\dot{u}_i^* - \dot{u}_i^k$  ( $i = 1, 2, 3$ ) получаем неравенство

$$(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^* - \dot{u}^k) \geq \alpha^k \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 + \frac{1}{A_1^k} a(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^* - \dot{u}^k) - \frac{1}{A_1^k} a(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^* - \dot{u}^k).$$

Переходя к исходным обозначениям, можно оценить последнее выражение

$$\begin{aligned} a(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^* - \dot{u}^k) - a(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^* - \dot{u}^k) &= \int_{\Omega} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \Delta \dot{\rho}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \Delta \dot{\rho}_{ij,j} \Delta \dot{u}_i d\Omega - \int_S \Delta \dot{\rho}_{ij} n_j \Delta \dot{u}_i dS = \int_{\Omega} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega. \end{aligned}$$

Аналогично получаем соотношение в случае геометрической нелинейности.

С учетом (8) получается неравенство

$$-(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^k - \dot{u}^*) \geq \alpha^k \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 + \frac{\lambda_1}{A_1^k} \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2.$$

Используя тождество

$$\|x_1 - x_3\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 + 2(x_1 - x_2, x_2 - x_3) + \|x_2 - x_3\|^2,$$

последнее неравенство перепишем в виде

$$\|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k\|^2 + \|\dot{u}^k - \dot{u}^*\|^2 - \|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^*\|^2 \geq 2\alpha^k \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 + 2\frac{\lambda_1}{A_1^k} \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2.$$

Учитывая (10), получим

$$\begin{aligned} \|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k\|^2 &= (\alpha^k)^2 \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 + \left(\frac{\lambda}{A_1^k}\right)^2 \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2 + 2\frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k} (\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^k - \dot{u}^k) = \\ &= (\alpha^k)^2 \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 + \left(\frac{\lambda}{A_1^k}\right)^2 \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2 + \frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k} \left( \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 - \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 - \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2 \right) = \\ &= \left[ (\alpha^k)^2 - \frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k} \right] \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 + \left[ \left(\frac{\lambda}{A_1^k}\right)^2 - \frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k} \right] \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2 + \frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k} \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2. \end{aligned}$$

В этом случае приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \left(1 - 2\frac{\lambda_1}{A_1^k}\right) \|\dot{u}^k - \dot{u}^*\|^2 + \frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k} \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 &\geq \|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^*\|^2 + \\ &+ \left[ 2\alpha^k - (\alpha^k)^2 + \frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k} \right] \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 + \left[ \frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k} - \left(\frac{\lambda}{A_1^k}\right)^2 \right] \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение  $\|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2$  преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 &= \|\dot{u}^* - \dot{u}^k + \dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2 = \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 + \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2 + 2(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^k - \dot{u}^k) \leq \\ &\leq \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 + \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2 + 2\|\dot{u}^* - \dot{u}^k\| \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|. \end{aligned}$$

Здесь использовалось неравенство Коши–Буняковского–Шварца:

$$\left| (\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^k - \dot{u}^k) \right| \leq \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\| \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|.$$

Таким образом, неравенство (13) принимает вид

$$\begin{aligned} \left(1 - 2\frac{\lambda_1}{A_1^k}\right) \|\dot{u}^k - \dot{u}^*\|^2 &\geq \|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^*\|^2 + \left[ 2\alpha^k - (\alpha^k)^2 \right] \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 - \\ &- \left(\frac{\lambda}{A_1^k}\right)^2 \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2 - 2\frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k} \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\| \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) следует, что для выполнения неравенства  $\|\dot{u}^k - \dot{u}^*\|^2 \geq \|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^*\|^2$  должны выполняться следующие условия:

$$0 < 1 - 2\frac{\lambda_1}{A_1^k} < 1,$$

$$\left[ 2\alpha^k - (\alpha^k)^2 \right] \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 - \left(\frac{\lambda}{A_1^k}\right)^2 \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2 - 2\frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k} \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\| \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\| \geq 0.$$

Первое условие имеет вид  $0 < \frac{\lambda_1}{A_1^k} < \frac{1}{2}$ . Второе условие с учетом обозначений

$$a = 2\alpha^k - (\alpha^k)^2, \quad b = 2 \frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k}, \quad c = \left( \frac{\lambda}{A_1^k} \right)^2, \quad x = \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|, \quad y = \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|, \quad \beta = \frac{x^2}{y^2} \quad (15)$$

представляется в виде

$$ax^2 - bxy - cy^2 \geq 0. \quad (16)$$

Здесь  $x, y$  могут принимать разные положительные значения, поэтому при  $b \geq 0, c \geq 0$  должно быть  $a \geq 0$ . В (16) возможны два случая, когда  $\beta \geq 1$  и  $0 < \beta < 1$ .

В первом случае неравенство  $ax^2 - bxy - cy^2 \geq 0$  или  $a - b - c \geq 0$  обеспечит справедливость (16). С учетом обозначений (15) получаем неравенство

$$(\alpha^k)^2 - 2\alpha^k \left( 1 - \frac{\lambda}{A_1^k} \right) + \left( \frac{\lambda}{A_1^k} \right)^2 \leq 0.$$

Для существования решений дискриминант в этом случае должен быть неотрицательным:

$$D = 4 \left( 1 - 2 \frac{\lambda}{A_1^k} \right) \geq 0,$$

что возможно при условии  $A_1^k \geq 2\lambda$ .

С учетом требования положительности  $\alpha^k$ , находим область изменения:

$$\max \left( 1 - \frac{\lambda}{A_1^k} - \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{A_1^k}}, 0 \right) \leq \alpha^k \leq 1 - \frac{\lambda}{A_1^k} + \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{A_1^k}}.$$

Во втором случае неравенство  $ax^2 - (b+c)y^2 \geq 0$  или  $b+c - a\beta \leq 0$  обеспечит справедливость (16). С учетом обозначений (15) получаем неравенство

$$(\alpha^k)^2 \beta - 2\alpha^k \left( \beta - \frac{\lambda}{A_1^k} \right) + \left( \frac{\lambda}{A_1^k} \right)^2 \leq 0.$$

Дискриминант должен быть неотрицательным, т.е.

$$D = 4\beta \left( \beta - \frac{2\lambda}{A_1^k} \right) + 4 \left( \frac{\lambda}{A_1^k} \right)^2 (1 - \beta) \geq 0.$$

Отсюда находим неравенство

$$(A_1^k)^2 \beta^2 - 2\lambda\beta A_1^k + \lambda^2(1 - \beta) \geq 0.$$

Здесь дискриминант имеет вид  $D = 4\beta^3 \lambda^2 > 0$ . Из решения квадратного уравнения определяется наибольший коэффициент  $A_1^k \geq \frac{\lambda(1 + \sqrt{\beta})}{\beta}$ .

В этом случае область изменения  $\alpha^k$  имеет вид

$$\max \left( 1 - \frac{\lambda}{A_1^k \beta} - \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{A_1^k \beta} + \left( \frac{\lambda}{A_1^k} \right)^2 \frac{(1 - \beta)}{\beta^2}}, 0 \right) \leq \alpha^k \leq 1 - \frac{\lambda}{A_1^k \beta} + \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{A_1^k \beta} + \left( \frac{\lambda}{A_1^k} \right)^2 \frac{(1 - \beta)}{\beta^2}}.$$

Из условий на  $\alpha^k$  для рассмотренных случаев видно, что при  $A_1^k \rightarrow \infty$  имеем  $0 < \alpha^k < 2$ .

Таким образом, суммируя (14) по  $k$  от 0 до  $N$  при данных условиях для  $\alpha^k$  и  $A_1^k$ , заключаем, что последовательность  $\{\dot{u}^k - \dot{u}^*\}$  ограничена в  $L^2(S)$  и сходится следующий ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ [2\alpha^k - (\alpha^k)^2] \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 - \left( \frac{\lambda}{A_1^k} \right)^2 \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\|^2 - 2 \frac{\alpha^k \lambda}{A_1^k} \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\| \|\dot{u}^k - \dot{u}^k\| \right] < \infty.$$

Из условия (16) при постоянных  $\alpha^k$  из указанных областей следует сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\dot{u}^* - \dot{u}^k\|^2 < \infty$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{A_1^k} \right)^2 \|\dot{u}^k - \dot{u}^{k+1}\|^2 < \infty.$$

Следовательно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\dot{u}^k - \dot{u}^{k+1}\|^2 = 0$  и из (10)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k\|^2 = 0$ .

Так как последовательность  $\{\dot{u}^k\}$  в  $L_2(S)$  ограничена, то существует элемент  $\dot{u}'$ , такой, что  $\dot{u}^{n_i} \rightarrow \dot{u}'$  при  $n_i \rightarrow \infty$ ; переходя к пределу, получим  $a(\dot{u}', \dot{v} - \dot{u}') + a(\dot{u}^*, \dot{v} - \dot{u}^*) \geq 0$  для всех  $\dot{v}, \dot{u}^*$ . Достаточные условия единственности решения краевых задач обеспечивают единственность решения (12).

**3. Численные результаты решения обратных задач.** Применяя процедуры метода конечных элементов (МКЭ) [14, 18, 19] к вариационным принципам задач деформирования, полученным из функционала (1) при учете независимости  $\dot{u}$  и  $\dot{u}$ , строится система линейных алгебраических уравнений для двух задач

$$K\dot{U} = \dot{R}, \quad \tilde{K}\tilde{U} = \tilde{R}(\dot{U}), \quad (17)$$

где  $K, \tilde{K}$  — симметричные матрицы касательной жесткости, определенные в момент  $t, \tilde{t}$  соответственно;  $\dot{R}$  — вектор скоростей внутренних и внешних сил;  $\tilde{R}$  — вектор скорости сил, обусловленных начальными деформациями и начальными напряжениями. Вычисление проводится пошаговым интегрированием с итерационной процедурой уточнения решения методом Ньютона–Рафсона. В результате решения первой задачи по заданным перемещениям находится деформированная модель с распределением напряжений и деформаций. Решение второй задачи на основе данных о начальных напряжениях и деформациях определяет перемещения разгрузки. После этого можно найти остаточные узловые перемещения  $\tilde{U} = U + \bar{U}$ .

Анализ сходимости метода проводится на примере деформирования квадратной пластинки толщиной  $h = 12$  мм и с длиной стороны  $a = 200$  мм. С целью приближения задачи к реальному производству, а именно задание панели двойной кривизны (например, для обшивок крыла самолета), рассматривается прогиб пластинки, моделирующий кручение [20]. К пластинке прикладываются заданные перемещения с постоянной скоростью. Решение задач проводится с учетом геометрической нелинейности.

Рассматривается 3 варианта моделей материала.

1. Материал пластинки — ЭИ698 ( $T = 750^0$ ) с соответствующими константами и математической моделью определяющих соотношений теории неполной обратимости деформации ползучести [21]. В данной модели учитываются одновременно вязкоупругие, вязкопластические деформации и деформации установившейся ползучести. Время деформирования с заданными перемещениями выбрано 30 ч., а время разгрузки — 10 ч.

2. Материал пластинки — АК4-1Т. Материал изотропен, и его характеристики упругости одинаковы при растяжении и сжатии и равны следующим значениям: модуль Юнга  $E = 7000$  кг/мм<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.4$ . Стадия установившейся ползучести в экспериментах как при сжатии, так и при растяжении описывается законом Нортон с разными значениями коэффициента  $B$  для каждого из этих видов деформирования: сжатие:  $B_1 = 0.25 \times 10^{-14}$  (кг/мм<sup>2</sup>)<sup>-n<sub>1</sub></sup>(час)<sup>-1</sup>,  $n_1 = 8$ ; растяжение:  $B_2 = 0.5 \times 10^{-14}$  (кг/мм)<sup>-n<sub>2</sub></sup>(час)<sup>-1</sup>,  $n_2 = 8$ . Разгрузка упругая. Время деформирования 260 ч.

3. Материал пластинки — АК4-1Т без учета разносопротивляемости, т.е. закон Нортон при  $B_2 = 0.5 \times 10^{-14}$  (кг/мм)<sup>-n<sub>2</sub></sup>(час)<sup>-1</sup>,  $n_2 = 8$ . Время деформирования 260 ч.

Пусть известен прогиб пластинки  $\tilde{u}_3^*(T + \tilde{T})$  в виде узловых перемещений по координате  $x_3$  (на рис. 1 координатная ось  $z$ ), нормальной к поверхности пластинки, который является остаточным, т.е. должен образоваться после деформирования и разгрузки пластинки. На рис. 1 представлена заданная остаточная форма пластинки, для которой необходимо найти упреждающую форму, и ее плоская модель.

Для вычисления задач методом конечных элементов используется система MSC.Marc. Модернизация и расширение возможностей данного программного пакета, в частности задание материала, не входящего в стандартную библиотеку MSC.Marc, проводится с помощью специальных программ пользователя (user's subroutines).

Для определения коэффициентов построенного итерационного метода необходимо вычислить параметры соотношений (8). Это возможно в системе CAE с помощью построения программ пользователя для

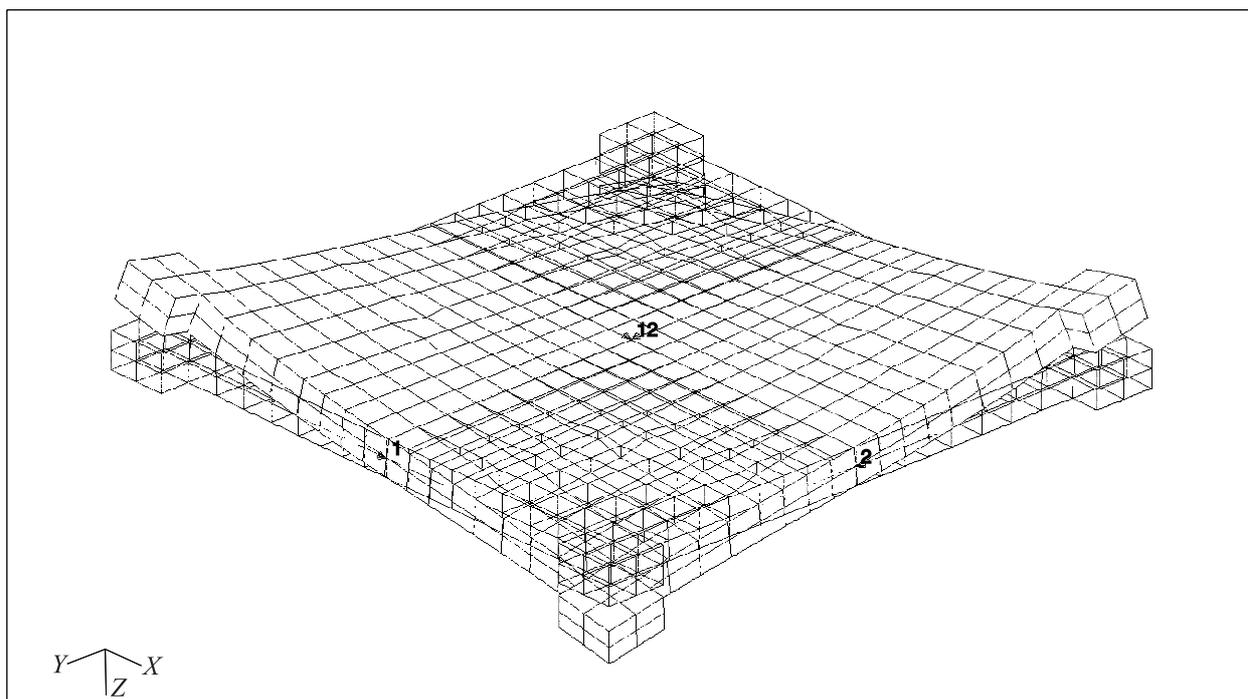


Рис. 1.

вывода результатов. В рассматриваемом случае нагружения можно оценить данные выражения в виде

$$\begin{aligned}
 a(\Delta \dot{u}, \Delta \dot{u}) &= \int_{\Omega} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{i,j} d\Omega \approx \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\Delta_t \sigma_{ij}^{k+1}(t) - \Delta_t \sigma_{ij}^k(t)}{\Delta t} \frac{\Delta_t \varepsilon_{ij}^{k+1}(t) - \Delta_t \varepsilon_{ij}^k(t)}{\Delta t} d\Omega, \\
 a(\dot{u}^d, \dot{u}^d) &= \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^d \dot{\varepsilon}_{ij}^d d\Omega \approx \sum_e \int_{\Omega^e} \left( \frac{\Delta_t \sigma_{ij}^k(t)}{\Delta t} - \frac{\Delta_t \rho_{ij}^k(\tilde{t})}{\Delta \tilde{t}} \right) \left( \frac{\Delta_t \varepsilon_{ij}^k(t)}{\Delta t} - \frac{\Delta_t \tilde{\varepsilon}_{ij}^k(\tilde{t})}{\Delta \tilde{t}} \right) d\Omega, \\
 \|\Delta \dot{u}\|^2 &\approx \int_S \Delta \dot{u}_3^2 dS \approx \sum_e \int_{S^e} \frac{\Delta_t u_3^{k+1}(t) - \Delta_t u_3^k(t)}{\Delta t} dS, \\
 \|\dot{u}^d\|^2 &\approx \int_S (\dot{u}_3^d)^2 dS \approx \sum_e \int_{S^e} \left( \frac{\Delta_t u_3^k(t)}{\Delta t} - \frac{\Delta_t \tilde{u}_3^k(\tilde{t})}{\Delta \tilde{t}} \right) dS
 \end{aligned}$$

для двух разных путей деформирования  $\sigma_{ij}^{k+1}, \varepsilon_{ij}^{k+1}$  и  $\sigma_{ij}^k, \varepsilon_{ij}^k$ , соответствующих разным итерациям, в одинаковый момент времени  $t$ . Здесь  $\Delta_t \sigma_{ij}^k(t)$  — приращение  $\sigma_{ij}^k(t)$  за промежуток времени  $\Delta t$  (приращение времени для разных путей деформирования одинаково),  $\Omega^e, S^e$  — объем элемента и площадь грани элемента. Результаты вычисленных полей напряжений и деформаций выводятся в интегральных точках элементов, а перемещений — в узлах. Таким образом, используя квадратуры Гаусса и формулы Ньютона-Котесса [18, 19] можно найти  $\lambda_1(t), \lambda(t, \tilde{t})$ .

Сходимость итерационного метода оценивается по среднеквадратичной норме:

$$e^k = \frac{\xi^k}{\xi^1}, \quad \xi^k = \left( \sum_S (\tilde{u}_3^k - \tilde{u}_3^*)^2 \right)^{1/2},$$

$S$  — нижняя поверхность панели,  $k$  — номер итерации.

В перемещениях итерационный метод (10) представляется в виде

$$u^{k+1}(T) = u^k(T) + \alpha^k (\tilde{u}^*(\tilde{T}) - \tilde{u}^k(\tilde{T})) + \chi^k (\tilde{u}^k(\tilde{T}) - u^k(T)), \tag{18}$$

где  $\chi^k = \frac{\lambda}{A_1^k}$  и  $\alpha^k$  являются постоянными осредненными величинами, зависящими только от итерации.

В более ранних наших работах [8, 9] рассматривался метод (18) с коэффициентами  $0 < \alpha^k < 2$ ,  $\chi^k = 0$ , причем по результатам расчетов определяется максимальная скорость сходимости при  $\alpha^k = 1$ . Однако при данных параметрах не всегда обеспечивается устойчивость решения при достаточно малых отклонениях от заданной остаточной формы. В данном случае коэффициент вычисляется по максимальным и минимальным значениям в виде

$$\alpha^k = \alpha_{\min}^k + (\alpha_{\max}^k - \alpha_{\min}^k) \times 0.75.$$

Согласно теореме, область коэффициентов  $\alpha^k$  с увеличением штрафных коэффициентов увеличивается, но не превышает значения, равного 2. Для постоянного увеличения штрафных коэффициентов в алгоритме метода принимается  $A_1^k = (k+1)^m \frac{\lambda(1+\sqrt{\beta})}{\beta}$ ,  $m > 0$ , при  $0 < \beta < 1$  (в представленных расчетах неравенство  $0 < \beta < 1$  выполняется уже на второй итерации, первая итерация решается при  $\alpha^k = 1$ ,  $\chi^k = 0$ ). В этом случае выбор коэффициентов метода на каждой итерации зависит только от  $\beta$  и  $m$ . Это подтверждается решениями обратных задач. В таблице представлены расчетные данные задачи с моделью материала 1 и выбором коэффициентов итерационного метода для разных моментов времени ( $\lambda, \beta$  вычислены на второй итерации метода (18)).

Как видно из таблицы, влияние  $t$  и  $\tilde{t}$  на порядок  $\beta$  и сходимость не существенно.

На рис. 2 представлены графики сходимости итерационного метода к решению обратной задачи формообразования для модели 1 при  $\alpha^k = 1$ ,  $\chi^k = 0$  — кривая 1, при  $A_1^k = (k+1)^m \frac{\lambda(1+\sqrt{\beta})}{\beta}$ ,  $m = 0.93$  — кривая 2; модель 2 при  $\alpha^k = 1$ ,  $\chi^k = 0$  — кривая 3, при  $A_1^k = (k+1)^m \frac{\lambda(1+\sqrt{\beta})}{\beta}$ ,  $m = 1$  — кривая 4; модель 3 при  $\alpha^k = 1$ ,  $\chi^k = 0$  — кривая 5, при  $A_1^k = (k+1)^m \frac{\lambda(1+\sqrt{\beta})}{\beta}$ ,  $m = 1.8$  — кривая 6.

Результаты сходимости метода при решении задач с учетом бесконечно малых деформаций аналогичны.

Коэффициенты $\lambda, \beta$				
$t, \text{ч.}$	$\tilde{t}, \text{ч.}$	$\lambda(t, \tilde{t})$	$\beta$	$e^8$
4.2	5	0.41	0.002	0.0034
19.2	8	0.48	0.0028	0.0033

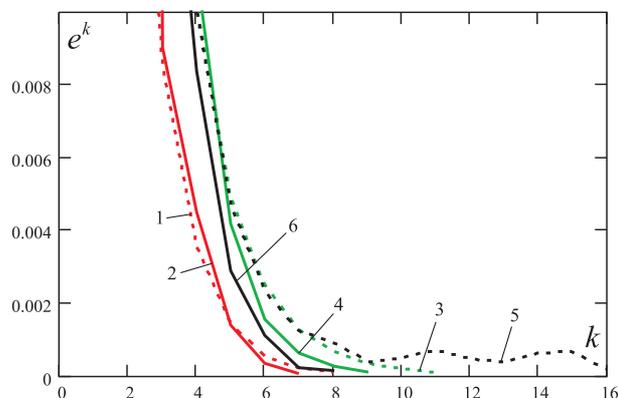


Рис. 2

**4. Заключение.** Таким образом, представляя в общем виде функционалы обратных задач и вводя параметры, характеризующие процесс деформирования, мы построили новый итерационный метод решения и доказали его сходимость. Область выбора коэффициентов метода зависит от уровня отклонений на каждой итерации. Эта область на начальных итерациях меньше, чем указано в работах [8, 9], и не противоречит этим данным. Численные результаты подтверждают выводы теоремы сходимости. Построенный итерационный метод позволяет получать устойчивое решение за меньшее количество итераций по сравнению с методами, рассмотренными в [8, 9]. Разработанный метод с указанными условиями сходимости дает возможность построения автоматизированной программной системы для расчета геометрии оснасток и форм матриц для формообразования крупногабаритных монолитных деталей самолета.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-31-60038 мол\_а\_дк).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adachi T., Kimura S., Nagayama T., Takehisa H., Shimanuki M. Age forming technology for aircraft wing skin // Materials Forum. 2004. 28. 202–207.

2. Zhan L.H., Tan S.G., Huang M.H., Niu J. Creep age-forming experiment and springback prediction for AA2524 // *Advanced Materials Research*. 2012. **457–458**. 122–129.
3. Zhan L., Lin J., Huang M. Study on springback behavior in creep age forming of aluminium sheets // *Advanced Science Letters*. 2013. **19**, N 1. 75–79.
4. Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // *Прикладная механика и техническая физика*. 2010. **51**, № 4. 155–165.
5. Банщикова И.А., Горев Б.В., Сухоруков И.В. Двумерные задачи формообразования стержней в условиях ползучести // *Прикладная механика и техническая физика*. 2002. **43**, № 3. 129–139.
6. Цвелодуб И.Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
7. Цвелодуб И.Ю. Обратные задачи неупругого деформирования // *Изв. АН. Механ. твердого тела*. 1995. № 2. 81–92.
8. Бормотин К.С. Итеративный метод решения обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // *Вычислительные методы и программирование*. 2013. **14**. 141–148.
9. Бормотин К.С. Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2013. **53**, № 12. 2091–2099.
10. Бормотин К.С., Лозгина В.С. Метод решения итеративной регуляризацией обратных задач формообразования деталей // *Вычислительные методы и программирование*. 2014. **15**. 77–84.
11. Бормотин К.С. Численное моделирование задачи формообразования с контактными условиями в режиме пластичности и ползучести // *Интернет-журнал “Науковедение”*. 2014. Вып. 1. 1–13.
12. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
13. Hill R. On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain // *J. Mech. Phys. Solids*. 1957. **5**, N 4. 229–241. Русский перевод: Хилл Р. О единственности и устойчивости в теории конечных упругих деформаций // *Механика: Сб. переводов*. 1958. № 6. 53–65.
14. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
15. Ключников В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1994.
16. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих тел. М.: Изд-во МГУ, 1990.
17. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
18. Wriggers P. *Computational contact mechanics*. Berlin: Springer, 2006.
19. Bathe K.-J. *Finite element procedures*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1982.
20. Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // *Вычислительные методы и программирование*. 2008. **9**. 346–365.
21. Радченко В.П., Саушкин М.Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. М.: Машиностроение, 2005.

Поступила в редакцию  
18.08.2017

---

## A Method for Solving Inverse Problems of Inelastic Deformation of Thin-Walled Panels

K. S. Bormotin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Komsomol'sk-na-Amure State Technical University, Institute for Computer Design of Mechanical Engineering Equipment and Machines; prospekt Lenina 27, Komsomol'sk-na-Amure, 681013, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: cvmi@knastu.ru*

Received August 18, 2017

**Abstract:** A mathematical model for inverse problems of forming thin-walled panels is described. The model takes into account the plastic and creep deformations and allows one to describe various technological processes. An iterative method for solving inverse problems of forming is proposed. Its convergence is proved under the conditions dependent on the parameters of processes. The numerical solutions of inverse problems obtained by the finite element method are in good agreement with the conditions of convergence.

**Keywords:** inverse forming problems, plasticity, creep, elasticity, variational inequalities, sufficient uniqueness conditions, iterative methods, finite element method.

## References

1. T. Adachi, S. Kimura, T. Nagayama, et. al., "Age Forming Technology for Aircraft Wing Skin," *Mater. Forum* **28**, 202–207 (2004).
2. L. H. Zhan, S. G. Tan, M. H. Huang, and J. Niu, "Creep Age-Forming Experiment and Springback Prediction for AA2524," *Adv. Mater. Res.* **457–458**, 122–129 (2012).
3. L. Zhan, J. Lin, and M. Huang, "Study on Springback Behavior in Creep Age Forming of Aluminium Sheets," *Adv. Sci. Lett.* **19** (1), 75–79 (2013).
4. B. D. Annin, A. I. Oleinikov, and K. S. Bormotin, "Modeling of Forming of Wing Panels of the SSJ-100 Aircraft," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **51** (4), 155–165 (2010) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **51** (4), 579–589 (2010)].
5. I. A. Banshchikova, B. V. Gorev, and I. V. Sukhorukov, "Two-Dimensional Problems of Beam Forming under Conditions of Creep," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **43** (3), 129–139 (2002) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **43** (3), 448–456 (2002)].
6. I. Yu. Tselodub, *A Stability Postulate and Its Applications in the Theory of Creep for Metallic Materials* (Hydrodynamics Inst., Novosibirsk, 1991) [in Russian].
7. I. Yu. Tselodub, "Inverse Problems of Inelastic Deformation," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, No. 2, 81–92 (1995).
8. K. S. Bormotin, "An Iterative Method for the Solution of Inverse Shaping Problems under Creep Conditions," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 141–148 (2013).
9. K. S. Bormotin, "Iterative Method for Solving Geometrically Nonlinear Inverse Problems of Structural Element Shaping under Creep Conditions," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **53** (12), 2091–2099 (2013) [*Comput. Math. Math. Phys.* **53** (12), 1908–1915 (2013)].
10. K. S. Bormotin and V. S. Logvina, "A Method of Iterative Regularization for Solving Inverse Problems of Forming Structural Components," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 77–84 (2014).
11. K. S. Bormotin, "Numerical Modeling of a Problem Forming with Contact Conditions in a Plasticity and Creep Mode," *Naukovedenie*, No. 1, 1–13 (2014).
12. F. P. Vasil'ev, *Methods of Optimization* (Faktorial Press, Moscow, 2002) [in Russian].
13. R. Hill, "On Uniqueness and Stability in the Theory of Finite Elastic Strain," *J. Mech. Phys. Solids* **5** (4), 229–241 (1957).
14. S. N. Korobeinikov, *Nonlinear Deformation of Solids* (Izd. Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
15. V. D. Klyushnikov, *Physico-Mathematical Principles of Strength and Plasticity* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1994) [in Russian].
16. O. A. Oleinik, G. A. Iosif'yan, and A. S. Shamaev, *Mathematical Problems in the Theory of Strongly Inhomogeneous Elastic Media* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1990) [in Russian].
17. V. P. Mikhailov, *Partial Differential Equations* (Nauka, Moscow, 1976; Mir, Moscow, 1978).
18. P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics* (Springer, Berlin, 2006).
19. K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures* (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1982).
20. S. N. Korobeinikov, A. I. Oleinikov, B. V. Gorev, and K. S. Bormotin, "Mathematical Simulation of Creep Processes in Metal Patterns Made of Materials with Different Extension Compression Properties," *Vychisl. Metody Programm.* **9**, 346–365 (2008).
21. V. P. Radchenko and M. N. Saushkin, *Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures* (Mashinostroenie, Moscow, 2005) [in Russian].