

УДК 519.6; 517.958:5

doi 10.26089/NumMet.v18r323

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПОСЛОЙНОЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ТОМОГРАФИИ С ДАННЫМИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. В. Гончарский<sup>1</sup>, С. Ю. Романов<sup>2</sup>, С. Ю. Серёжников<sup>3</sup>

Статья посвящена разработке эффективных методов решения обратных задач волновой томографии. Предложена новая схема послойной томографии трехмерных объектов с экспериментальными данными, которые измеряются на цилиндрической поверхности. Такая схема обеспечивает измерение как отраженных, так и проходящих волн и легко реализуема на практике. Для решения обратной задачи используется математическая модель, которая хорошо описывает как дифракционные эффекты, так и эффект поглощения ультразвукового излучения. Предложены эффективные численные методы восстановления скоростного разреза по экспериментальным томографическим данным на цилиндрической поверхности. Разработанные методы ориентированы в первую очередь на диагностику рака молочной железы на ранних стадиях заболевания. Обратные задачи ультразвуковой томографии являются нелинейными и очень сложными с вычислительной точки зрения. Численные алгоритмы реализованы на графических процессорах. Эффективность разработанных алгоритмов иллюстрируется модельными расчетами.

**Ключевые слова:** ультразвуковая томография, послойная томография, волновое уравнение, коэффициентная обратная задача, графические процессоры, суперкомпьютеры.

**1. Введение.** Настоящая статья посвящена разработке методов ультразвуковой томографии для диагностики мягких тканей в медицине. Дифференциальная диагностика рака молочной железы является одной из самых актуальных проблем современной медицины. Существенного прогресса в лечении рака молочной железы можно достичь, если удастся диагностировать заболевание на ранних стадиях его развития, когда размер новообразований не превосходит 2–3 мм.

Используемые в настоящее время рентгеновские томографы обладают достаточным разрешением, но не могут применяться для регулярных обследований. Использование ЯМР-томографов ограничивает высокая цена оборудования. Наиболее перспективными для регулярных обследований могли бы быть ультразвуковые методы. Однако все существующие в настоящее время ультразвуковые приборы не являются томографическими. Получаемые этими приборами изображения выявляют лишь границы неоднородностей и не позволяют осуществлять характеризацию тканей с достаточно высоким разрешением. Разработка ультразвуковых томографов высокого разрешения для исследования мягких тканей является одной из важнейших задач современной медицины.

В настоящее время разработкой ультразвуковых томографов для дифференциальной диагностики рака молочной железы интенсивно занимается несколько групп в Германии, США, России. Разработки находятся на уровне макетов и прототипов [1–3]. Основные проблемы в акустической томографии связаны с нелинейностью обратных задач восстановления томографического изображения. Особенностью задачи является низкий контраст объекта — разница в скорости звука в здоровых и пораженных тканях не превосходит 10% [4]. Один из подходов в ультразвуковой томографии заключается в использовании упрощенных линеаризованных моделей [5, 6]. Однако упрощенная модель позволяет осуществлять лишь грубую характеризацию тканей, ее точности недостаточно для обнаружения мелких и низкоконтрастных неоднородностей. В работе [2] линейная модель усовершенствована с помощью метода синтезированной апертуры. В работе [3] используется параболическое приближение, которое работает в схеме на прохождении в небольшом диапазоне углов. Разработан макет томографического устройства, в котором используются высокие частоты в диапазоне 1.5 МГц.

Наиболее перспективным является использование волновых моделей, позволяющих учесть дифракцию, рефракцию, переотражение и поглощение ультразвука. Восстановление томографического изобра-

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: romanov60@gmail.com

<sup>3</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; электроник, e-mail: s2110sj@gmail.com

жения в волновой модели требует решения нелинейных обратных задач большой размерности. Обратная задача в такой постановке рассматривается как коэффициентная обратная задача для волнового уравнения. Существует метод решения таких задач с помощью функции Грина, однако он имеет огромную вычислительную сложность [7, 8].

Прорывные результаты в области решения задач ультразвуковой томографии в волновых моделях были получены в последние годы в работах [9–12]. В разных постановках получено точное представление для градиента функционала невязки между экспериментальными данными и смоделированным волновым полем [13–15]. На основе представления для градиента разработаны эффективные итерационные алгоритмы [16, 17].

В существующих прототипах ультразвуковых томографов [2, 3, 18] в основном используются высокие частоты — в диапазоне 1.5 МГц и выше. Зачастую это связано с использованием лучевых моделей, поскольку чем выше частота, тем точнее лучевая модель. Однако высокие частоты сильно поглощаются в тканях [4]. Математические модели, которые описывают процесс поглощения, не являются совершенными, что приводит к значительным ошибкам модели [19, 20]. С этой точки зрения перспективным направлением представляется низкочастотная волновая томография, где используются частоты до 500 кГц. Это направление получило развитие в работах [21–23].

Основная идея низкочастотной акустической томографии состоит в том, что для низких частот проще обеспечить прецизионное измерение волнового фронта рассеянного излучения. При частотах менее 500 кГц для этих целей вполне можно использовать детекторы размером порядка 2 мм, расположенные с шагом тоже порядка 2 мм. Для решения этой задачи на частотах 1.5 МГц необходимо располагать приемники с шагом менее 1 мм либо использовать очень большое число источников.

Одной из основных математических проблем решения обратных задач акустической томографии является их нелинейность, которая приводит к тому, что функционал невязки между измеренными детекторами и смоделированным волновым полем не является выпуклым. Как следствие, использование градиентных методов минимизации функционала гарантирует сходимость лишь к локальному, но не к глобальному минимуму. В связи с этим важной проблемой является выбор начального приближения.

Настоящая статья посвящена изучению возможностей послойной схемы ультразвуковых томографических исследований 3D-объектов с данными на цилиндрической поверхности. В этой схеме в каждом выделенном слое решается задача восстановления двумерной структуры трехмерного объекта. Разработаны эффективные алгоритмы послойного восстановления скоростного разреза исследуемого объекта в модели, учитывающей как дифракционные эффекты, такие как дифракция, рефракция и переотражение волн, так и поглощение ультразвука.

**2. Математическая постановка обратной задачи и методы ее решения.** В задаче акустической томографии необходимо восстанавливать внутреннюю структуру объекта по измерениям акустического давления  $u(\mathbf{r}, t)$  на некоторой поверхности, окружающей объект.

На рис. 1 приведена схема послойной акустической томографии, в которой восстановление скоростного разреза исследуемого объекта осуществляется независимо в каждой плоскости. Область G на рис. 1 представляет собой сечение исследуемого 3D-объекта в плоскости, в которой расположены источники зондирующих импульсов (помечены цифрой 1) и приемники ультразвукового излучения (помечены цифрой 2). Объект находится в однородной среде L с известными свойствами. Измерения акустического поля в каждом слое производятся вращающимся массивом детекторов (помечены 2), так что в процессе измерения детекторы принимают все положения (помечены 3) на окружности S, являющейся сечением цилиндрической поверхности, окружающей объект. Такая схема эксперимента позволяет собирать данные как на прохождение, так и на отражение и вполне может быть использована для ультразвуковой томографии.

В настоящей работе используется скалярная волновая модель, которая описывает все волновые эффекты, такие как дифракция ультразвука, рефракция, переотражение и т.п. В скалярной волновой модели

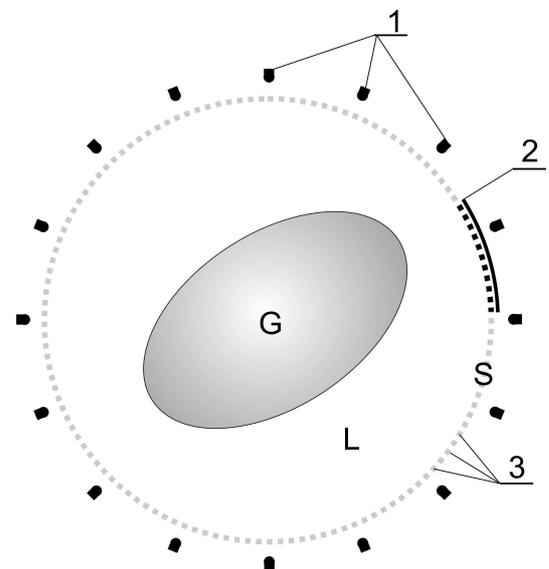


Рис. 1. Схема эксперимента

акустическое давление  $u(\mathbf{r}, t)$  описывается уравнением в частных производных гиперболического типа.

Важным параметром в скалярной модели является поглощение ультразвука в среде. Для описания процессов поглощения ультразвука в настоящей работе используется простейшая модель, в которой поглощение не зависит от частоты [19]. В такой модели обратная задача ультразвуковой томографии является коэффициентной обратной задачей, в которой необходимо по данным измерений волнового поля на цилиндрической поверхности  $S$  при разных положениях источников восстановить коэффициенты  $c(\mathbf{r})$  и  $a(\mathbf{r})$  в уравнении

$$c(\mathbf{r})u_{tt}(\mathbf{r}, t) + a(\mathbf{r})u_t(\mathbf{r}, t) - \Delta u(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}) \cdot f(t); \tag{1}$$

$$u(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = 0, \quad u_t(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial_n u(\mathbf{r}, t)|_{ST} = p(\mathbf{r}, t). \tag{2}$$

Здесь  $c(\mathbf{r}) = 1/v^2(\mathbf{r})$ , где  $v(\mathbf{r})$  — скорость звука в среде;  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$  — положение точки в плоскости  $xy$  исследуемого сечения;  $u(\mathbf{r}, t)$  — акустическое давление;  $\Delta$  — оператор Лапласа по переменной  $\mathbf{r}$ . Зондирующий импульс, генерируемый точечным источником в точке  $\mathbf{q}$ , описывается функцией  $f(t)$ ;  $\partial_n u(\mathbf{r}, t)|_{ST}$  — производная вдоль нормали к границе  $S$ , где  $(\mathbf{r}, t) \in S \times (0, T)$ ;  $T$  — время измерения. Функция  $p(\mathbf{r}, t)$  известна,  $a(\mathbf{r})$  описывает поглощение в среде. Соотношения (2) представляют собой условия Неймана на границе расчетной области и начальные условия.

Предполагается, что неоднородность среды вызвана изменениями скорости звука и коэффициента поглощения, а вне исследуемой области скорость звука постоянна и равна  $c^{-0.5}(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r}) = v_0 = \text{const}$ , где  $v_0$  — известная величина. Функция  $a(\mathbf{r})$  вне исследуемой области равна 0. Эта простейшая модель распространения волн с учетом поглощения (1) может использоваться для описания ультразвуковых волн в мягких тканях.

Рассматриваемая коэффициентная обратная задача относится к некорректно поставленным задачам. Методы решения таких задач были разработаны в [24, 25]. Сформулируем обратную задачу как задачу минимизации функционала невязки

$$\Phi(u(c, a)) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_S (u(\mathbf{s}, t) - U(\mathbf{s}, t))^2 \, ds \, dt \tag{3}$$

по его аргументу  $(c, a)$ . Здесь  $U(\mathbf{s}, t)$  — экспериментальные данные на границе  $S$  за время  $(0, T)$ , а  $u(\mathbf{s}, t)$  — решение прямой задачи (1)–(2) при заданных коэффициентах  $c(\mathbf{r}) = 1/v^2(\mathbf{r})$  и  $a(\mathbf{r})$ . Заметим, что при использовании нескольких источников зондирующего излучения функционал невязки представляет собой сумму значений невязки (3), полученных для каждого источника.

Представления для градиента  $\Phi'(c, a)$  функционала невязки в различных постановках для двух- и трехмерного случая были получены в работах [26, 27]. В строгой математической постановке выражения для градиента функционала невязки для обратной задачи (1)–(2) в модели, учитывающей как дифракционные эффекты, так и поглощение, было получено в работах авторов [11, 12, 22].

Градиент  $\Phi'(u(c, a)) = \{\Phi'_c(u), \Phi'_a(u)\}$  функционала (3) относительно вариации скорости звука и коэффициента поглощения  $\{dc, da\}$ , имеет вид

$$\Phi'_c(u(c)) = \int_0^T w_t(\mathbf{r}, t)u_t(\mathbf{r}, t) \, dt, \quad \Phi'_a(u(a)) = \int_0^T w_t(\mathbf{r}, t)u(\mathbf{r}, t) \, dt. \tag{4}$$

Здесь  $u(\mathbf{r}, t)$  — решение основной задачи (1)–(2), а  $w(\mathbf{r}, t)$  — решение “сопряженной” задачи при заданных  $c(\mathbf{r}), a(\mathbf{r}), u(\mathbf{r}, t)$ :

$$c(\mathbf{r})w_{tt}(\mathbf{r}, t) - a(\mathbf{r})w_t(\mathbf{r}, t) - \Delta w(\mathbf{r}, t) = 0; \tag{5}$$

$$w(\mathbf{r}, t = T) = 0, \quad w_t(\mathbf{r}, t = T) = 0, \quad \partial_n w|_{ST} = u|_{ST} - U. \tag{6}$$

В тех точках границы  $S$ , где экспериментальные данные отсутствуют, ставится граничное условие  $\partial_n w|_{ST} = 0$ . Таким образом, для вычисления градиента (4) необходимо решить прямую задачу (1)–(2) и “сопряженную” задачу (5)–(6).

Имея выражение для градиента (4), можно построить различные итеративные алгоритмы минимизации функционала невязки. Приведем простейший вариант — метод наискорейшего спуска. Будем считать, что найдены коэффициенты  $c^{(n)}$  и  $a^{(n)}$  на  $n$ -й итерации. Для построения следующего итерационного

приближения вычислим градиент  $\{\Phi'_c(u), \Phi'_a(u)\}$  в точке  $\{c^{(n)}, a^{(n)}\}$  и решим задачу минимизации одномерного функционала в направлении градиента. В качестве следующего итерационного приближения выберем точку  $\{c^{(n+1)}, a^{(n+1)}\} = \arg \min_{\alpha > 0} \Phi(c^{(n)} - \alpha \Phi'_c, a^{(n)} - \alpha \Phi'_a)$  и т.д. Методы минимизации, основанные на явном представлении градиента, позволяют предложить эффективные численные алгоритмы приближенного решения задач акустической томографии.

**3. Численные методы.** Для решения двумерной обратной задачи в каждом сечении будем использовать метод конечных разностей на равномерных сетках. В такой постановке решение дифференциальных уравнений сводится к решению разностных уравнений. На области изменения аргументов введем равномерную дискретную сетку

$$x_i = ih, \quad 0 \leq i < n; \quad y_j = jh, \quad 0 \leq j < n; \quad t_k = k\tau, \quad 0 \leq k < T,$$

где  $h$  — шаг сетки по пространственным переменным,  $\tau$  — шаг сетки по времени. Параметры  $h$  и  $\tau$  связаны условием устойчивости Куранта:  $\sqrt{2}c^{-0.5}\tau < h$ . Здесь  $c^{-0.5} = v$  является скоростью звука. Для аппроксимации уравнения (1) используем следующую разностную схему 2-го порядка:

$$c_{ij} \frac{u_{ij}^{k+1} - 2u_{ij}^k + u_{ij}^{k-1}}{\tau^2} + a_{ij} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k-1}}{\tau} - \frac{\Delta u_{ij}^k}{h^2} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $u_{ij}^k = u(x_i, y_j, t_k)$  — значение  $u(\mathbf{r}, t)$  в точке  $(i, j)$  в момент времени  $k$ ;  $c_{ij}$  и  $a_{ij}$  — значение  $c(\mathbf{r})$  и  $a(\mathbf{r})$  в точке  $(i, j)$ . Первое слагаемое аппроксимирует  $c(\mathbf{r})u_{tt}(\mathbf{r}, t)$ , а второе —  $a(\mathbf{r})u_t(\mathbf{r}, t)$ . Символом  $\Delta$  обозначен дискретный лапласиан, который вычисляется по формуле

$$\Delta u_{ij}^k = -4u_{ij}^k + (u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k).$$

Выделяя член  $u_{ij}^{k+1}$  для  $(k+1)$ -го шага по времени, получим явную формулу для расчета распространения звуковой волны последовательно по времени. Аналогично выписывается разностная схема для  $w$  “в обратном времени”. Время  $T$  выбирается достаточно большим, чтобы прошедшие и отраженные от объекта волны успевали дойти до приемников. В качестве граничных условий для модельных расчетов в настоящей статье использовалось условие неотражения [28] вида  $\partial_n u|_{ST} = -c^{-0.5} \partial_t u|_{ST}$ .

С помощью технологии OpenCL численный метод был реализован на графических процессорах. Вычисление градиента (4), включающее в себя вычисление волновых полей  $u(\mathbf{r}, t)$  и  $w(\mathbf{r}, t)$  согласно (5)–(6), представляет наибольшую вычислительную сложность. Поскольку градиент (4) суммируется по всем источникам, целесообразно проводить расчеты для одной точки восстанавливаемого сечения для всех источников в одном потоке (thread).

Схема распараллеливания вычислений на графическом процессоре приведена на рис. 2. Каждый из параллельных потоков производит вычисления для одной точки восстанавливаемого двумерного сечения. На каждом шаге по времени сначала загружаются коэффициенты  $c(\mathbf{r})$  и  $a(\mathbf{r})$ , затем последовательно обновляются значения волновых полей  $u(\mathbf{r}, t)$  и  $w(\mathbf{r}, t)$  в массивах  $D_i$  для каждого  $i$ -го источника,  $i = 1, \dots, M$ . При этом частичная сумма градиента по пройденным источникам накапливается в регистрах GPU. После того как массивы данных для всех источников будут обработаны, значения градиента  $\Phi'_c$  и  $\Phi'_a$  записываются в оперативную память.

Каждый массив данных  $D_i$  содержит значения  $u(\mathbf{r}, t)$  и  $w(\mathbf{r}, t)$  для трех шагов по времени для вычисления волнового поля по формуле (7). Таким образом, необходимый объем памяти составляет  $24 \times N^2 \times M$

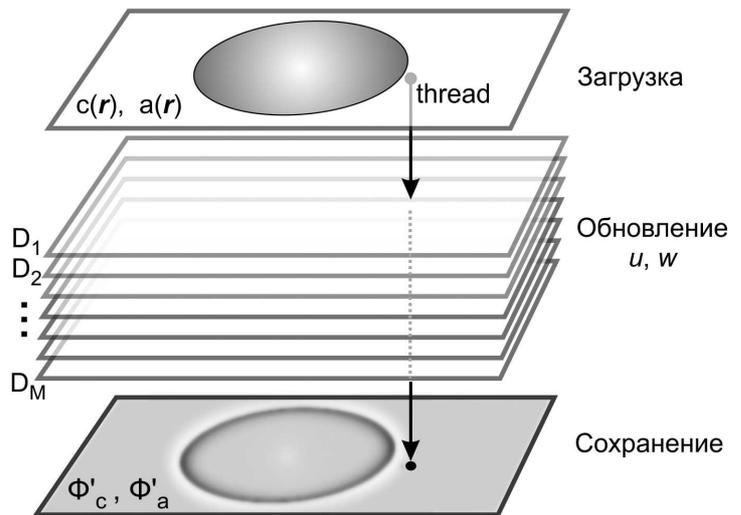


Рис. 2. Схема распараллеливания вычисления градиента на GPU

байт, где  $N$  — размер расчетной сетки по одной координате,  $M$  — число источников. Для 16 источников и  $N = 800$  объем данных составляет  $\approx 250$  Мб. Для хранения значений  $u(\mathbf{r}, t)$  и  $w(\mathbf{r}, t)$  на границе расчетной области  $S$  необходимо еще  $32 \times N \times T \approx 75$  Мб памяти, где  $T$  — общее число шагов по времени. Из условия устойчивости разностной схемы  $T \approx 2.5N$ . Таким образом, современные графические карты с объемом памяти 1 Гб и выше позволяют разместить все данные в оперативной памяти.

Максимальная производительность GPU для рассмотренного алгоритма достигается при количестве источников на один графический процессор не менее 10. Слишком малое количество источников приводит к недоиспользованию ресурсов современных графических процессоров. Время расчета одной итерации градиентного спуска на графической карте NVidia Tesla X2070 составило 10 секунд для 16 источников, расчетной сетки размером  $800 \times 800$  и 2200 шагов по времени. Если проводить расчеты отдельно для каждого источника и затем суммировать результаты, время расчета составит  $\approx 25$  секунд.

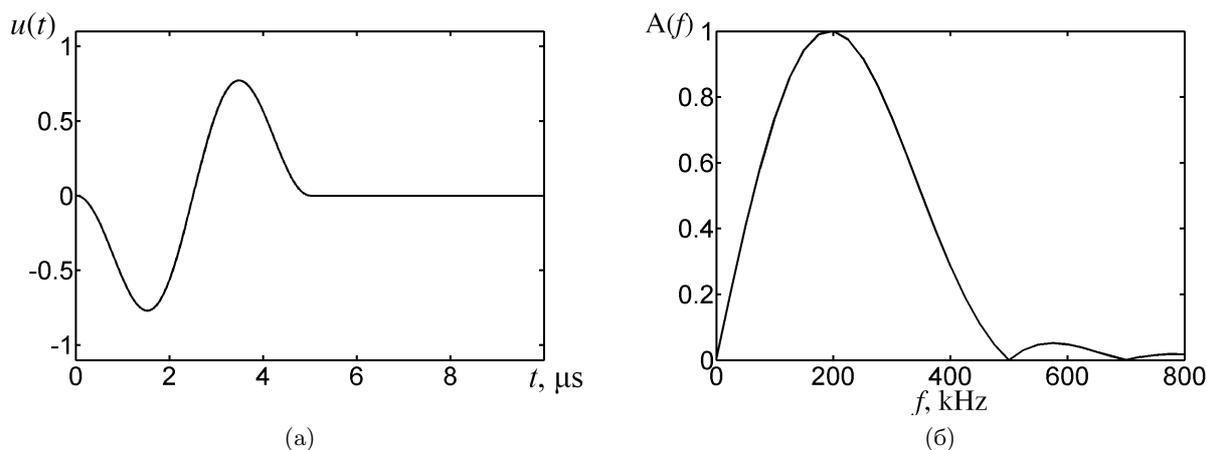


Рис. 3. Форма зондирующего импульса (а) и его спектр (б)

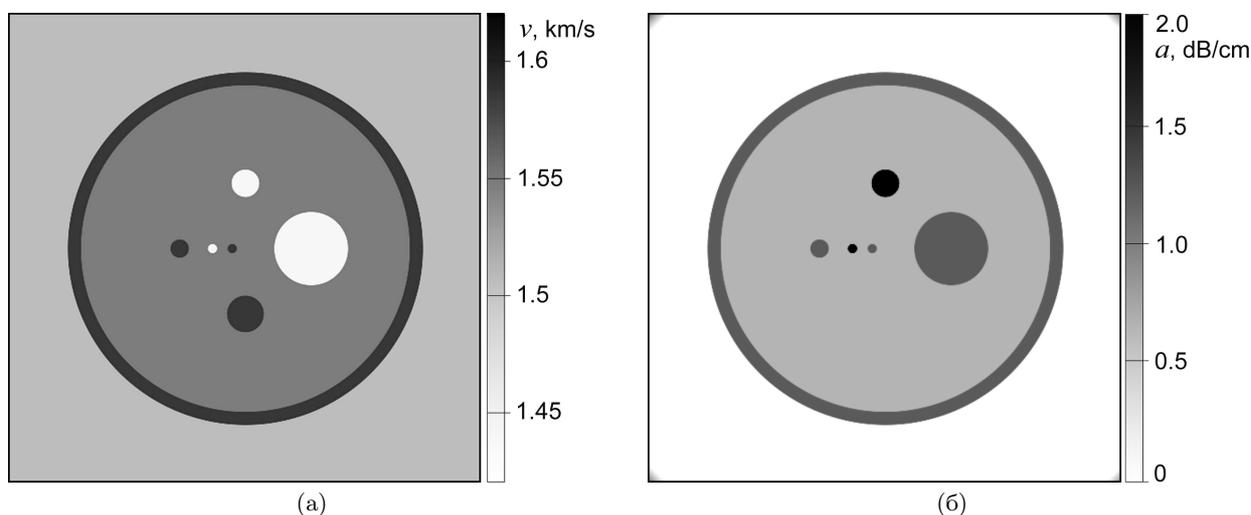


Рис. 4. Изображения фантома скорости звука (а) и коэффициента поглощения (б)

**4. Модельные расчеты.** Схема модельного эксперимента для задачи послойной ультразвуковой томографии приведена на рис. 1. Исследуемый объект погружен в водную среду  $L$  со скоростью распространения  $c_0 = 1500$  м/с и коэффициентом поглощения, равным нулю. В модельной задаче использовалось 16 источников зондирующих импульсов, расположенных вокруг объекта в плоскости исследуемого сечения. Форма импульса представлена на рис. 3а, а его спектр — на рис. 3б. Длительность зондирующих импульсов составляла 5 мкс, что соответствует средней длине волны  $\lambda = 7.5$  мм. Центральная частота спектра составляет 200 кГц. Вращающийся массив детекторов пробегает окружность  $S$  диаметром 150 мм. Расчетная сетка содержит  $800 \times 800$  точек.

Вычислительный эксперимент состоял в решении прямой задачи распространения ультразвуковых волн и расчете сигналов  $U(\mathbf{s}, t)$  на детекторах, расположенных в точках  $\mathbf{s}$  окружности  $S$ . Затем получен-

ные данные  $U(\mathbf{s}, t)$  использовались для решения обратной задачи восстановления скорости звука  $c(\mathbf{r})$  и коэффициента поглощения  $a(\mathbf{r})$ .

Точное изображение (фантом) скорости звука и поглощения, для которого решалась прямая задача, приведен на рис. 4. На рис. 4а приведена скорость звука  $c(\mathbf{r})$  фантома в исследуемом сечении, на рис. 4б — коэффициент поглощения  $a(\mathbf{r})$ .

Параметры фантома выбирались близкими к параметрам мягких тканей: диапазон изменения скорости звука  $c(\mathbf{r})$  составляет 1400–1600 м/с, диапазон изменения коэффициента поглощения  $a(\mathbf{r})$  — до 1 дБ/см. Скорость звука  $c_0$  в окружающей среде равна 1500 м/с. В используемой модели распространения волн (1)–(2) поглощение не зависит от частоты. Начальное приближение выбиралось равным параметрам окружающей среды:  $c_0 = 1500$  м/с,  $a_0 = 0$ . Реконструированные изображения скоростного разреза  $c(\mathbf{r})$  и коэффициента поглощения  $a(\mathbf{r})$  получены после 100 итераций метода градиентного спуска.

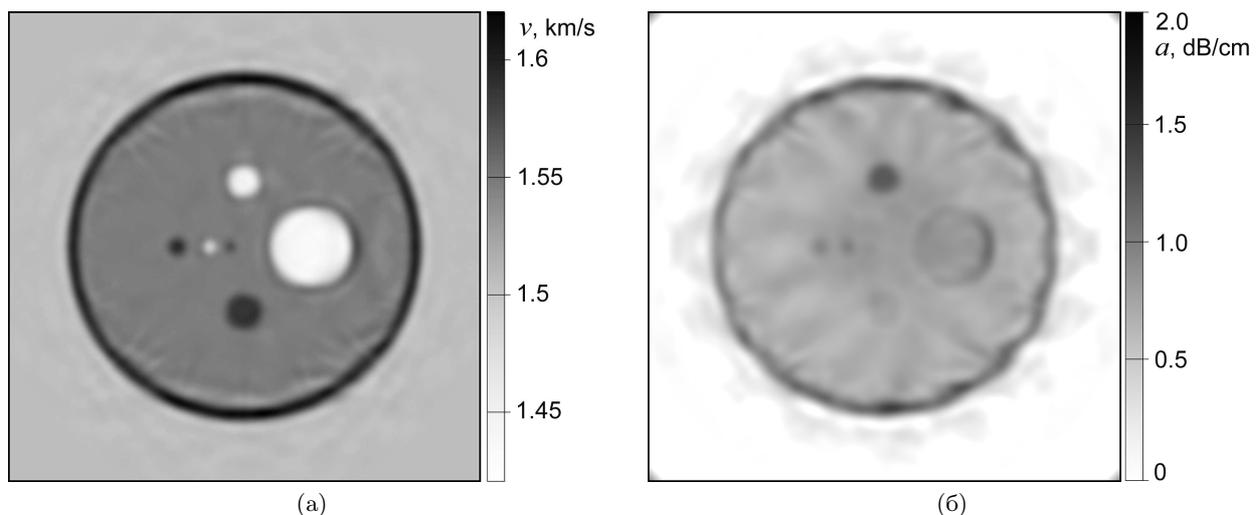


Рис. 5. Восстановленные изображения скорости звука (а) и коэффициента поглощения (б)

На рис. 5а приведено восстановленное изображение скорости звука в исследуемой плоскости. На рис. 5б приведено восстановленное изображение коэффициента поглощения. Несмотря на относительно большую длину волны в 7.5 мм, разрешающая способность восстановления скоростного разреза составляет порядка 2 мм. Размер в 2 мм имеют самые мелкие включения на рис. 4а. Сравнение рис. 5а и рис. 5б показывает, что скоростной разрез восстанавливается намного лучше, чем коэффициент поглощения. Это связано с тем, что  $a(\mathbf{r})$  является коэффициентом при первой производной  $u_t$ , а  $c(\mathbf{r})$  — при второй производной  $u_{tt}$  в уравнении (1).

Поглощение является значимым фактором, поскольку даже для низких частот оно может достигать 6–12 дБ. Поэтому даже если мы пытаемся восстановить только скорость звука  $c(\mathbf{r})$ , то необходимо учитывать поглощение в модели распространения волн. В модели, не учитывающей поглощение, разница между измеренным и смоделированным волновыми полями всегда будет оставаться очень большой, т.е. математическая модель будет плохо описывать физические процессы распространения ультразвуковых волн.

Расчеты проводились на суперкомпьютере “Ломоносов” СКЦ МГУ [29]. Один графический процессор NVidia Tesla X2070 суперкомпьютера использовался для расчета градиента функционала невязки параллельно для всех 16 источников в одном исследуемом сечении. Для получения восстановленного изображения нужно около 100 итераций градиентного спуска. Время расчета составило 15 минут. Для достижения приемлемого времени расчета в реальных задачах послойной томографии, содержащих десятки сечений, необходимо использовать суперкомпьютер с несколькими десятками графических процессоров.

**5. Заключение.** Настоящая статья посвящена разработке эффективных методов решения обратных задач ультразвуковой томографии. Предложена послойная схема томографических исследований с данными на цилиндрической поверхности, легко реализуемая на практике.

Обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача для гиперболического уравнения. Математическая модель описывает такие явления, как дифракция, рефракция, переотражение и поглощение ультразвуковых волн в мягких тканях. Особенностью рассматриваемых задач диагностики является то, что разница скоростей распространения акустических волн в мягких тканях и в воде составляет не более 10%. Это означает, что контраст изображения по скорости является очень низким. Задача

состоит в восстановлении неоднородностей в исследуемом объекте при таком низком контрасте.

Важнейшей проблемой интерпретации данных ультразвуковой томографии является нелинейность обратной коэффициентной задачи. Нелинейность приводит к тому, что функционал невязки между экспериментальным и смоделированным волновыми полями не является выпуклым. Как следствие, градиентные методы минимизации функционала не могут обеспечить сходимость к глобальному минимуму с произвольного начального приближения. Наиболее естественным начальным приближением, которое было использовано в модельных задачах, является  $c_0 = \text{const}$ .

Модельные расчеты показали высокую эффективность предложенных методов. Скоростной разрез восстанавливается намного лучше, чем коэффициент поглощения. Важным результатом работы является то, что восстановление скоростного разреза необходимо осуществлять в рамках математической модели, учитывающей как дифракционные эффекты, так и поглощение. Алгоритмы решения обратной задачи послышной ультразвуковой томографии хорошо распараллеливаются на графических процессорах.

Разработанные методы ориентированы на дифференциальную диагностику рака молочной железы. Кроме медицины, метод акустической томографии может найти применение в задачах неразрушающего контроля [30] и сейсмологии.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01065). Работы проводились в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д. Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в фантомах мягких биотканей по экспериментальным данным ультразвукового томографирования // Акустический журнал. 2015. **61**, № 2. 254–273.
2. Jiřík R., Peterlík I., Ruiter N., et al. Sound-speed image reconstruction in sparse-aperture 3-D ultrasound transmission tomography // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2012. **59**, N 2. 254–264.
3. Wiskin J., Borup D., Johnson S., et al. Three-dimensional nonlinear inverse scattering: quantitative transmission algorithms, refraction corrected reflection, scanner design, and clinical results // The Journal of the Acoustical Society of America. 2013. **133**, N 5. 3229–3229.
4. Mamou J., Oelze M.L. Quantitative ultrasound in soft tissues. Dordrecht: Springer, 2013.
5. Schmidt S., Duric N., Li C., et al. Modification of Kirchhoff migration with variable sound speed and attenuation for acoustic imaging of media and application to tomographic imaging of the breast // Medical Physics. 2011. **38**, N 2. 998–1007.
6. Saha R.K., Sharma S.K. Validity of a modified Born approximation for a pulsed plane wave in acoustic scattering problems // Physics in Medicine and Biology. 2005. **50**, N 12. 2823.
7. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Харченко С.А. Обратная задача акустической диагностики трехмерных сред // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2006. **7**. 113–121.
8. Гончарский А.В., Романов С.Ю. О двух подходах к решению коэффициентных обратных задач для волновых уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. **52**, № 2. 263–269.
9. Natterer F., Wubbeling F. A propagation-backpropagation method for ultrasound tomography // Inverse Problems. 1995. **11**, N 6. 1225–1232.
10. Beilina L., Klibanov M.V., Kokurin M.Yu. Adaptivity with relaxation for ill-posed problems and global convergence for a coefficient inverse problem // Journal of Mathematical Sciences. 2010. **167**, N 3. 279–325.
11. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography // Inverse Problems. 2013. **29**, N 7. doi 10.1088/0266-5611/29/7/075004.
12. Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y. A computer simulation study of soft tissue characterization using low-frequency ultrasonic tomography // Ultrasonics. 2016. **67**. 136–150.
13. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Итерационные методы решения обратных задач ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2015. **16**. 464–475.
14. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю. Задачи волновой томографии с неполным диапазоном данных // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2014. **15**. 274–285.
15. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Об одной задаче ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2011. **12**. 317–320.
16. Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y. Supercomputer technologies in tomographic imaging applications // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2016. **3**, N 1. 41–66.
17. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Суперкомпьютерные технологии в разработке методов решения обратных задач в УЗТ-томографии // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2012. **13**. 235–238.
18. Duric N., Littrup P., Li C., et al. Breast ultrasound tomography: bridging the gap to clinical practice // Proc. SPIE 8320 Medical Imaging 2012: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. 2012. doi: 10.1117/12.910988.

19. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Inverse problems of ultrasound tomography in models with attenuation // *Physics in Medicine and Biology*. 2014. **59**, N 8. 1979–2004.
20. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Iterative methods for solving coefficient inverse problems of wave tomography in models with attenuation // *Inverse Problems*. 2017. **33**, N 2. doi 10.1088/1361-6420/33/2/025003.
21. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data // *Wave Motion*. 2014. **51**, N 3. 389–404.
22. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Низкочастотная трехмерная ультразвуковая томография // *Доклады Академии наук*. 2016. **468**, № 3. 268–271.
23. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Суперкомпьютерные технологии в задачах проектирования томографических диагностических комплексов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016.
24. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // *Докл. АН СССР*. 1963. **151**, № 3. 501–504.
25. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-posed problems: theory and applications. Dordrecht: Kluwer, 1994.
26. *Natterer F.* Sonic imaging // *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*. New York: Springer, 2015. 1253–1278.
27. *Beilina L., Klivanov M.V.* Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems. New York: Springer, 2012.
28. *Engquist B., Majda A.* Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // *Mathematics of Computation*. 1977. **31**. 629–651.
29. *Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И. и др.* Практика суперкомпьютера “Ломоносов” // *Открытые системы*. 2012. № 7. 36–39.
30. *Базулин А.Е., Базулин Е.Г., Вopilкин А.Х. и др.* Применение трехмерной когерентной обработки в ультразвуковом контроле // *Дефектоскопия*. 2014. **50**, № 2. 46–65.

Поступила в редакцию  
22.06.2017

---

## Inverse Problems of Layer-by-Layer Ultrasonic Tomography with the Data Measured on a Cylindrical Surface

A. V. Goncharsky<sup>1</sup>, S. Yu. Romanov<sup>2</sup>, and S. Yu. Seryozhnikov<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru*

<sup>2</sup> *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: romanov60@gmail.com*

<sup>3</sup> *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Electronic Engineer, e-mail: s2110sj@gmail.com*

Received June 22, 2017

**Abstract:** This paper is dedicated to developing efficient methods to solve inverse problems of wave tomography. The proposed new scheme of layer-by-layer tomography of 3D objects uses the experimental data measured on a cylindrical surface. This scheme provides the measurements of both the reflected and the transmitted waves and can easily be implemented in practice. The mathematical model used to solve the inverse problem takes into account the ultrasound diffraction and absorption effects. The authors developed efficient numerical methods to reconstruct the sound speed cross section using the tomographic data measured on the cylindrical surface. These methods are aimed primarily at early breast cancer diagnosis. The inverse problems of ultrasonic tomography are nonlinear and very computationally expensive. The efficiency of the developed methods is illustrated via numerical simulations. The numerical algorithm is implemented on GPU.

**Keywords:** ultrasonic tomography, layer-by-layer tomography, wave equation, coefficient inverse problem, graphics processors, supercomputers.

## References

1. V. A. Burov, D. I. Zotov, and O. D. Rumyantseva, “Reconstruction of the Sound Velocity and Absorption Spatial Distributions in Soft Biological Tissue Phantoms from Experimental Ultrasound Tomography Data,” *Akust. Zh.* **61** (2), 254–273 (2015) [*Acoust. Phys.* **61** (2), 231–248 (2015)].
2. R. Jiřík, I. Peterlík, N. Ruitter, et al., “Sound-Speed Image Reconstruction in Sparse-Aperture 3-D Ultrasound Transmission Tomography,” *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **59** (2), 254–264 (2012).
3. J. Wiskin, D. Borup, S. Johnson, et al., “Three-Dimensional Nonlinear Inverse Scattering: Quantitative Transmission Algorithms, Refraction Corrected Reflection, Scanner Design, and Clinical Results,” *J. Acoust. Soc. Am.* **133** (5), 3229–3229 (2013).
4. J. Mamou and M. L. Oelze (Eds.), *Quantitative Ultrasound in Soft Tissues* (Springer, Dordrecht, 2013).
5. S. Schmidt, N. Duric, C. Li, et al., “Modification of Kirchhoff Migration with Variable Sound Speed and Attenuation for Acoustic Imaging of Media and Application to Tomographic Imaging of the Breast,” *Med. Phys.* **38** (2), 998–1007 (2011).
6. R. K. Saha and S. K. Sharma, “Validity of a Modified Born Approximation for a Pulsed Plane Wave in Acoustic Scattering Problems,” *Phys. Med. Biol.* **50** (12), 2823–2836 (2005).
7. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. A. Kharchenko, “The Inverse Problem of Acoustic Diagnosis for Three-Dimensional Media,” *Vychisl. Metody Programm.* **7**, 113–121 (2006).
8. A. V. Goncharskii and S. Yu. Romanov, “Two Approaches to the Solution of Coefficient Inverse Problems for Wave Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **52** (2), 263–269 (2012) [*Comput. Math. Math. Phys.* **52** (2), 245–251 (2012)].
9. F. Natterer and F. Wubbeling, “A Propagation-Backpropagation Method for Ultrasound Tomography,” *Inverse Probl.* **11** (6), 1225–1232 (1995).
10. L. Beilina, M. V. Klibanov, and M. Yu. Kokurin, “Adaptivity with Relaxation for Ill-Posed Problems and Global Convergence for a Coefficient Inverse Problem,” *J. Math. Sci.* **167** (3), 279–325 (2010).
11. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, “Supercomputer Technologies in Inverse Problems of Ultrasound Tomography,” *Inverse Probl.* **29** (7), (2013). doi 10.1088/0266-5611/29/7/075004
12. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, “A Computer Simulation Study of Soft Tissue Characterization Using Low-Frequency Ultrasonic Tomography,” *Ultrasonics* **67**, 136–150 (2016).
13. A. V. Goncharsky and S. Yu. Romanov, “Iterative Methods for Solving Inverse Problems of Ultrasonic Tomography,” *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 464–475 (2015).
14. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, “Problems of Limited-Data Wave Tomography,” *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 274–285 (2014).
15. A. V. Goncharsky and S. Yu. Romanov, “On a Problem of Ultrasonic Tomography,” *Vychisl. Metody Programm.* **12**, 317–320 (2011).
16. A. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, “Supercomputer Technologies in Tomographic Imaging Applications,” *Supercomput. Frontiers Innov.* **3** (1), 41–66 (2016).
17. A. V. Goncharsky and S. Yu. Romanov, “Supercomputer Technologies in the Development of Methods for Solving Inverse Problems in Ultrasound Tomography,” *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 235–238 (2012).
18. N. Duric, P. Littrup, C. Li, et al., “Breast Ultrasound Tomography: Bridging the Gap to Clinical Practice,” in *Proc. SPIE 8320 Medical Imaging 2012: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy* (2012). doi: 10.1117/12.910988
19. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, “Inverse Problems of Ultrasound Tomography in Models with Attenuation,” *Phys. Med. Biol.* **59** (8), 1979–2004 (2014).
20. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, “Iterative Methods for Solving Coefficient Inverse Problems of Wave Tomography in Models with Attenuation,” *Inverse Probl.* **33** (2), (2017). doi 10.1088/1361-6420/33/2/025003
21. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, “Inverse Problems of 3D Ultrasonic Tomography with Complete and Incomplete Range Data” *Wave Motion* **51** (3), 389–404 (2014).
22. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, “Low-Frequency Three-Dimensional Ultrasonic Tomography,” *Dokl. Akad. Nauk* **468** (3), 268–271 (2016) [*Dokl. Phys.* **61** (5), 211–214 (2016)].
23. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, *Supercomputing Technologies in the Design Problems of Tomographic Diagnostics* (Politekh. Univ., St. Petersburg, 2016) [in Russian].
24. A. N. Tikhonov, “Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **151** (3), 501–504 (1963) [*Sov. Math. Dokl.* **5** (4), 1035–1038 (1963)].
25. A. Bakushinsky and A. Goncharsky, *Ill-Posed Problems: Theory and Applications* (Kluwer, Dordrecht, 1994).

26. F. Natterer, "Sonic Imaging," in *Handbook of Mathematical Methods in Imaging* (Springer, New York, 2015), pp. 1253–1278.
27. L. Beilina and M. V. Klibanov, *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems* (Springer, New York, 2012).
28. B. Engquist and A. Majda, "Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves," *Math Comp.* **31**, 629–651 (1977).
29. V. V. Voevodin, S. A. Zhumatii, S. I. Sobolev, et al., "The Lomonosov Supercomputer in Practice," *Otkrytye Sistemy*, No. 7, 36–39 (2012).
30. A. E. Bazulin, E. G. Bazulin, A. Kh. Vopilkin, et al., "Application of 3D Coherent Processing in Ultrasonic Testing," *Defektoskopiya* **50** (2), 46–65 (2014) [*Russ. J. Nondestruct. Test.* **50** (2), 92–108 (2014)].