

УДК 519.63:532.546

doi 10.26089/NumMet.v18r318

## ЯВНО-НЕЯВНЫЕ АЛГОРИТМЫ УСКОРЕНИЯ РАСЧЕТА ДВУХФАЗНОГО ПРИТОКА К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ С МНОГОСТАДИЙНЫМ ГИДРОРАЗРЫВОМ ПЛАСТА

А. Б. Мазо<sup>1</sup>, М. Р. Хамидуллин<sup>2</sup>

Представлены явно- неявные алгоритмы ускорения счета для решения трехмерной задачи двухфазной фильтрации вблизи горизонтальной скважины, пересеченной трещиной многостадийного гидроразрыва пласта. Ускорение достигается за счет ввода локальных зон, в каждой из которых применяется, в зависимости от локального числа Куранта, явная либо неявная схема для уравнения переноса насыщенности.

**Ключевые слова:** двухфазная фильтрация, гидроразрыв пласта, IMPES-метод, FIM-метод.

**1. Введение.** Математические модели, описывающие приток флюида к горизонтальной скважине (ГС) с многостадийным гидроразрывом пласта (МГРП), основаны на общих уравнениях двухфазной (нефть–вода) фильтрации [1], которые содержат параболическое уравнение для давления  $p$  и гиперболическое уравнение переноса насыщенности  $s$ . Для традиционных моделей разработки пласта, вскрытого системой вертикальных скважин, известны три основных схемы численного решения этой системы уравнений.

Наиболее распространена схема IMPES (Implicit Pressure, Explicit Saturation) [2–4], когда давление рассчитывается по неявной схеме, а насыщенность — по явной. Эта схема условно устойчива, шаги сетки по пространству  $h$  и по времени  $\tau$  должны удовлетворять критерию Куранта–Фридрихса–Леви (КФЛ)

$$\tau \ll \frac{h}{\max(f'|u)} \quad \text{или} \quad C = \frac{\tau \max(f'|u)}{h} \ll 1, \quad (1)$$

где  $u$  — скорость фильтрации,  $f' = df/ds$  — производная функции Баклея–Левверетта. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что величина  $|u|$  резко возрастает в малой окрестности скважин, при этом условие (1) требует решения явной схемы для  $s$  с мелким шагом  $\tau$ , что значительно замедляет численное решение задачи. Известен простой способ ускорения вычислений по схеме IMPES [5]. Область расчета разбивается на несколько зон, в каждой из которых определяется максимум  $|u|$  и соответствующий шаг по времени  $\tau$ , гарантирующий выполнение условия (1). Таким образом, для продвижения расчета на интервал времени  $\Delta t$  в каждой из выделенных зон требуется разное количество временных слоев, определяемое по формуле  $N_s = \Delta t/\tau$ .

Другим распространенным способом ускорения счета является полностью неявная схема FIM (Fully Implicit Method) [6], когда  $p$  и  $s$  рассчитываются по чисто неявной схеме. При этом для нахождения решения нелинейной задачи на каждом временном слое используются итерационные процедуры. Поэтому схема FIM требует больше вычислительных ресурсов на каждом временном слое, однако в отличие от схемы IMPES она безусловно устойчива.

Комбинация преимуществ методов IMPES и FIM реализована в неявном адаптивном методе AIM (Adaptive Implicit Method) [7–9]. Основная идея этого метода заключается в том, чтобы локально применять FIM либо IMPES в зависимости от вычислительной эффективности при соблюдении условия устойчивости вида (1). Особенности применения указанных схем детально исследованы в работе [10].

В рамках рассмотренных расчетных схем используются различные методы вычислительной математики и методы организации вычислений для ускорения решения задач двухфазной фильтрации.

В работе [11] предложен итерационный метод совместного решения задач для насыщенности и давления, ускоряющий расчет на 30% по сравнению с FIM и, в отличие от IMPES, сходящийся при большем числе Куранта  $C$ . Для решения систем линейных алгебраических уравнений используется метод GMRES

<sup>1</sup> Казанский федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, ул. Кремлевская, 18, 420008, Казань; профессор, e-mail: abmazo1956@gmail.com

<sup>2</sup> Казанский федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского ул. Кремлевская, 18, 420008, Казань; аспирант, e-mail: marseille.ksu@gmail.com

(Generalized Minimal Residual) [12] с предобусловливателем AMG (Algebraic Multigrid) [13]. Для пространственной аппроксимации используется метод конечных разностей, а для дискретизации по времени — обратный метод Эйлера. Конструированию оптимальных итерационных методов решения нелинейных задач фильтрации на каждом временном слое посвящена работа [14]. Показано, что нелинейный многосеточный метод эффективнее, чем метод Ньютона; более того, при этом снижаются затраты оперативной памяти. Идея метода заключается в том, что до линеаризации уравнений методом Ньютона используется многоуровневый итерационный метод с предобусловливателем. В [15] рассматриваются различные алгоритмы решения сеточных уравнений, полученных при использовании адаптивных сеток с локальным сгущением.

В последнее время для ускорения моделирования многофазной фильтрации в пласте на подробных сетках применяются параллельные вычисления на многопроцессорной технике. Задача разделяется на несколько подзадач, которые распределяются по процессорам. В работе [16] представлен алгоритм распараллеливания расчета насыщенности, когда в областях, близких к скважинам, применяется метод FIM, а в остальной области — метод IMPES. В работе [17] предложены численные алгоритмы распараллеливания решения задач двухфазной фильтрации на сетках со сгущающимися участками, в которых для расчета насыщенности используется схема AIM. В статье [18] описаны особенности реализации алгоритмов решения данной задачи на гетерогенных вычислительных системах.

В настоящей статье явно-неявные схемы ускорения счета применяются для решения трехмерной задачи двухфазной фильтрации вблизи горизонтальной скважины, пересеченной трещиной многостадийного гидроразрыва пласта. Отличительная особенность данной задачи состоит в том, что скорость фильтрации  $|u|$  возрастает на несколько порядков не только в окрестности ствола ГС, но и в трещине ГРП.

**2. Постановка задачи.** Для иллюстрации эффективности предлагаемых численных алгоритмов рассмотрим следующую модельную задачу с одной трещиной ГРП. Область решения  $D$  представляет собой часть пласта в виде прямоугольного параллелепипеда высоты  $2H$  с закругленными краями, в центре которого имеется вырез  $\gamma$  цилиндрической формы — скважина радиуса  $r_w$  и длины  $L$  (рис. 1). По вертикали область  $D$  ограничена плоскостями  $z = \pm H$ , моделирующими кровлю и подошву пласта. Боковая поверхность  $\Gamma$ , расположенная на расстоянии  $l$  от скважины  $\gamma$ , моделирует контур питания. Ось  $Oy$  направлена вдоль ствола скважины, ортогонально которой расположена трещина ГРП. Берега трещины — пара прямоугольных плоскостей  $F^+$  и  $F^-$  с нормальными в направлениях  $n^\pm = \pm y$  и размерами  $2H \times 2h$ , а также с расстоянием между ними  $2\delta \ll H$  (раскрытие трещины). Трещина имеет проницаемость  $k^f$  и пористость  $m^f$ , много превосходящие абсолютную проницаемость  $k$  и пористость  $m$  пласта. Пласт считается однородным, капиллярными и гравитационными силами пренебрегаем.

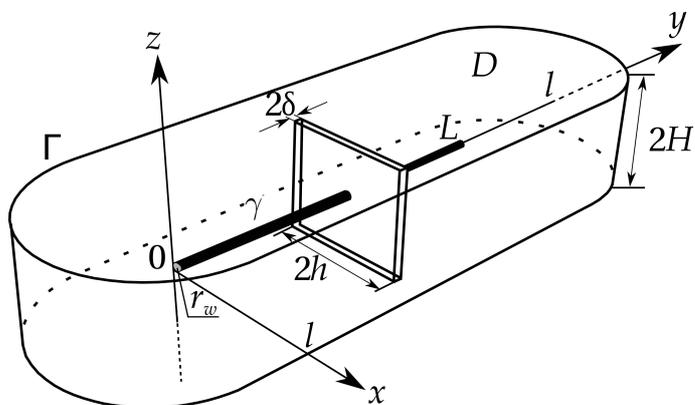


Рис. 1. Схема ГС с единичной трещиной ГРП

В безразмерных переменных уравнения для давления и насыщенности в коллекторе  $D$  имеют вид [1]

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = -\sigma \operatorname{grad} p, \tag{2}$$

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} (f(s)\mathbf{u}) = 0, \tag{3}$$

$$f(s) = \frac{k_w(s)}{\sigma(s)}, \quad \sigma = k_w(s) + K_\mu k_o(s), \quad k_w(s) = s^3, \quad k_o(s) = (1 - s)^3. \tag{4}$$

Здесь  $\beta \sim 10^{-3}$  — упругоемость;  $f(s)$  — функция Баклея–Левверетта;  $k_w(s)$ ,  $k_o(s)$  — относительные фазовые проницаемости воды и нефти соответственно;  $\sigma(s)$  — гидропроводность;  $K_\mu$  — отношение вязкости воды к вязкости нефти.

Безразмерные начальные условия

$$t = 0, \quad (x, y, z) \in D: \quad p = 1, \quad s = 0 \tag{5}$$

означают, что коллектор насыщен нефтью при гидростатическом давлении. Кровля и подошва пласта

(пространственные координаты нормированы на  $H$ ) непроницаемы:

$$z = \pm 1 : \quad u_n = -\sigma \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad (6)$$

где  $n$  — внешняя нормаль.

При  $t > 0$  моделируется процесс заводнения, когда на контуре  $\Gamma$  поддерживается постоянное давление  $p = 1$  и водонасыщенность  $s = 1$ , при этом на скважине  $\gamma$  задано давление  $p = p_\gamma = 0$ . Гидродинамическое взаимодействие коллектора, поверхности  $\gamma$  скважины и поверхностей  $F^\pm$  трещины выражается в непрерывности давления и нормальной скорости фильтрационного потока.

Осредненное по раскрытию  $2\delta$  трещины уравнение для безразмерного давления  $p^f$  записывается следующим образом:

$$\Delta_{xz} p^f + \frac{1}{2M} \sigma \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{F^-}^{F^+} = 0, \quad -h < x < h, \quad -1 < z < 1, \quad M = \frac{k^f \delta}{kH}, \quad (7)$$

$$x = \pm h, \quad z = \pm 1 : \quad \frac{\partial p^f}{\partial n} = 0; \quad p^f = p_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad (x, y, z) \in \gamma.$$

Безразмерное уравнение для водонасыщенности  $s^f$  в трещине выглядит так:

$$m^f \frac{\partial s^f}{\partial t} + \nabla_{xz} (f(s^f) \mathbf{u}^f) + \frac{2\delta}{H} (f(s) u_n) \Big|_{F^-}^{F^+} = 0, \quad \mathbf{u}^f = -\frac{k^f}{k} \sigma(s^f) \text{grad} p^f, \quad \frac{k^f}{k} \gg 1. \quad (8)$$

Подчеркнем, что последний член этого уравнения моделирует приток воды из коллектора в скважину и вычисляется на берегах трещины  $F^+$  и  $F^-$  со стороны коллектора.

Итак, математическая модель двухфазной фильтрации к *добывающей* ГС с МГРП в безразмерном виде состоит из уравнений (2)–(6) в коллекторе  $D$  и (7), (8) в трещинах.

**3. Явная и неявная схемы конечных объемов.** Численное решение задачи строится методом конечных объемов [19]. Для каждого конечного объема  $V_i$ , ограниченного совокупностью граней  $\Gamma_i^j$ , определяются средние давления, насыщенность и нормальные скорости через грани:

$$P_i = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} p dV, \quad S_i = \frac{1}{|V_i| m_i} \int_{V_i} m s dV, \quad u_i^{j,n} = \frac{\sigma_i^j}{h_i} \left( P_i - \sum_j \alpha_i^j P_j \right). \quad (9)$$

Здесь  $m_i$  — средняя пористость конечного объема  $V_i$ ,  $u_i^{j,n}$  — средняя скорость фильтрации через грань  $\Gamma_i^j$  в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}$ ,  $|V_i|$  — величина объема  $V_i$ ,  $\alpha_j$  — коэффициенты коллокации [20, 21],  $h_i$  — расстояние от центра  $V_i$  до точки коллокации. Интегрирование уравнений (2)–(6) в коллекторе  $D$  и (7), (8) по объему  $V_i$  приводит к следующей сеточной схеме.

Для коллектора  $D$  она имеет вид

$$\beta_i \frac{\hat{P}_i - P_i}{\tau} + \sum_j u_i^{j,n} |\Gamma_i^j| = 0, \quad (10)$$

$$m_i |V_i| \frac{\hat{S}_i - S_i}{\tau} + \sum_j f_i^j u_i^{j,n} |\Gamma_i^j| = 0, \quad (11)$$

где  $|\Gamma_i^j|$  — площадь грани. Обозначение  $\hat{P}(t) = P(t + \tau)$  используется для функции на верхнем временном слое.

Аналогично записываются уравнения в трещине для плоского конечного объема  $V^f_i$ , границы которого  $\Gamma_i^j$  являются отрезками прямых. Давление определяется уравнением

$$\sum_j (u^f)_i^{j,n} |\Gamma_i^j| + \frac{1}{2M} |V^f_i| \left[ \frac{P_i^f - P^+}{h_i^+} + \frac{P_i^f - P^-}{h_i^-} \right] = 0, \quad (u^f)_i^{j,n} = \frac{\sigma(S^f)}{h_i} \left( P_i^f - \sum_j \alpha_i^j P_j^f \right), \quad (12)$$

где  $h_i^\pm$  — расстояния от центра плоского объема  $V^f_i$  до центров КО коллектора, примыкающих к берегам трещины  $F^\pm$ , и  $P^\pm$  — средние давления в этих конечных объемах. Уравнение конечных объемов для водонасыщенности в трещине имеет вид

$$m_i^f |V_i^f| \frac{\hat{S}_i^f - S_i^f}{\tau} + \sum_j f_i^j (u^f)_i^{j,n} |\Gamma_i^j| + f(S^\pm) Q_w = 0, \quad Q_w = \frac{2\delta}{H} \left[ \frac{P^+ - P_i^f}{h_i^+} + \frac{P^- - P_i^f}{h_i^-} \right], \quad (13)$$

где  $Q_w$  описывает приток к элементу трещины из коллектора,  $S^\pm$  — средние насыщенности в КО коллектора, примыкающих к берегам трещины  $F^\pm$ , а  $S_i^{fj}$  — водонасыщенность на грани  $\Gamma_i^j$ ; по схеме “upwind”

$$\text{ее значение определяется знаком скорости } (u^f)_i^{j,n}: \quad S_i^{fj} = \begin{cases} S_i^f, & (u^f)_i^{j,n} > 0, \\ S_j^f, & (u^f)_i^{j,n} < 0. \end{cases}$$

Явная по насыщенности схема IMPES в уравнениях (11), (13) получается, если в качестве аргумента функции Баклея–Левретта взять насыщенность на текущем временном слое. Если же использовать  $\hat{S}$  на верхнем временном слое, то получим полностью неявную схему FIM.

**4. Алгоритм решения задачи.** Решение задачи для отыскания давлений  $\hat{P}, \hat{P}^f$  по уравнениям (2), (7) и насыщенностей  $\hat{S}, \hat{S}^f$  по уравнениям (11), (13) на верхнем временном слое выполняется в несколько этапов:

1) вычисляются давления  $\hat{P}_i, \hat{P}_i^f$  по уравнениям (10) и (12), в которых коэффициенты вычисляются через насыщенности  $S_i, S_i^f$  с текущего временного слоя;

2) вычисляются суммарные расходы через все грани конечных объемов в коллекторе (9) и трещинах ГРП (12);

3) вычисляются насыщенности  $\hat{S}_i$  в коллекторе и трещинах  $\hat{S}_i^f$ .

Этапы 1–2 одинаковы для схем IMPES и FIM, а этап 3 различается: в схеме IMPES насыщенность вычисляется по явным формулам, а в схеме FIM требуется решать отдельную задачу. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Для метода FIM уравнение (11) в операторном виде может быть записано как система нелинейных уравнений для задачи в коллекторе:

$$A\hat{S} = F(S), \quad \text{где} \tag{14}$$

$$Ay = y + \frac{\tau}{|V|m} \sum_j f^j(y) u^{j,n} |\Gamma^j|, \quad F(S) = S. \tag{15}$$

Для решения системы (14) используется метод Ньютона

$$\dot{A}_k(y^{k+1} - y^k) + Ay^k = F, \tag{16}$$

где  $k = 0, 1, \dots$  — номер итерации;  $\dot{A}_k$  — линейный оператор — производная Гато оператора  $A$  в точке  $y^k$ :

$$\dot{A}_k z = z + \frac{\tau}{|V|m} \sum_j f'^j(y^k) u^{j,n} |\Gamma^j| z. \tag{17}$$

Решение задачи (16) на каждой итерации предполагает решение линейной системы уравнений

$$\dot{A}_k \xi^{k+1} = r, \quad r = F - Ay^k, \quad \xi^{k+1} = y^{k+1} - y^k.$$

Аналогично строится итерационный процесс Ньютона (16) для уравнения (13), при этом вместо (15) и (17) имеем

$$\begin{aligned} Ay &= y + \frac{\tau}{|Vf|m^f} \sum_j f(y) (u^f)^{j,n} |\Gamma^j| + f(y^\pm) Q_w, \\ \dot{A}_n z &= z + \frac{\tau}{|Vf|m^f} \left[ \sum_j f'(y^k) (u^f)^{j,n} |\Gamma^j| z + f'(y^\pm) Q_w z \right], \\ F &= S^f. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь  $f'$  — производная функции  $f$ .

Начальное приближение  $y^0$  в итерационном процессе (16) для обеих задач задается как функция насыщенности на текущем временном слое:  $y^0 = S$ . Расчеты показали, что при таком начальном приближении не всегда обеспечивается сходимость метода Ньютона. В этой связи предварительно выполняется несколько приближений к решению  $\hat{S}$  с помощью двухслойного итерационного процесса

$$B \frac{S^{(k+1)} - S^{(k)}}{\lambda} + AS^{(k)} = F, \tag{19}$$

где  $k$  — номер итерации,  $B$  — предобуславливатель,  $\lambda$  — итерационный шаг. В качестве  $B$  для задачи (14), (15) выбирался линейный оператор

$$By = y + \frac{\tau}{|V|m} \sum_j y u^{j,n} |\Gamma^j|, \tag{20}$$

а для задачи (14), (18) — оператор:

$$By = y + \frac{\tau}{|Vf|m^f} \sum_j y (u^f)^{j,n} |\Gamma^j| + f(y^\pm) Q_w. \tag{21}$$

Заметим, что предобуславливатели (20), (21) отличаются от нелинейных операторов  $A$  (15), (18) только тем, что вместо нелинейной функции Баклея–Левверетта  $f(y)$  (см. (4)) используется линейная функция  $y$ . Обе эти функции монотонны и совпадают на границах изменения насыщенности  $y = 0$  и  $y = 1$ .

При реализации численной схемы операторы  $A$ ,  $B$ ,  $\dot{A}$  аппроксимировались на сетке конечных объемов с существенным сгущением к скважине (см. рис. 6); минимальный размер элемента  $\sqrt[3]{|V|}$  равен 0.004, максимальный — 0.46, общее количество ячеек сетки  $N = 10^5$ ; шаг по времени выбирался  $\tau = 0.1$ . В ходе численных экспериментов было установлено, что при указанных параметрах схемы для сходимости метода Ньютона достаточно сделать один-два шага по методу (19) при  $\lambda = 0.6$ . Графики сходимости по норме невязки  $r$  приведены на рис. 2; цифрами у кривых обозначено количество предварительных итераций по методу (19).

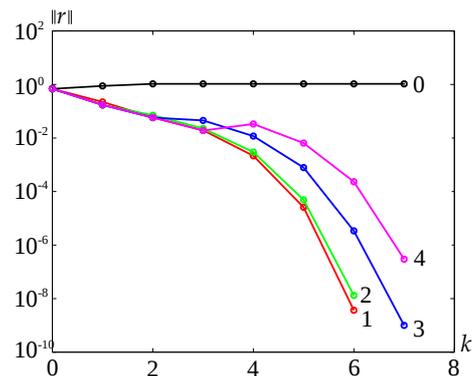


Рис. 2. Сходимость итерационного процесса для схемы FIM при  $\tau = 0.1$

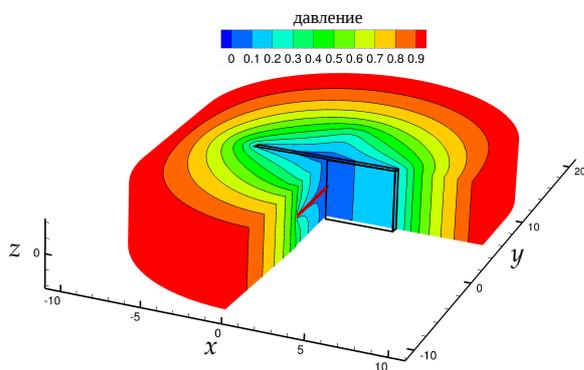


Рис. 3. Распределение давления в расчетной области  $D$  на момент  $t = \tau$

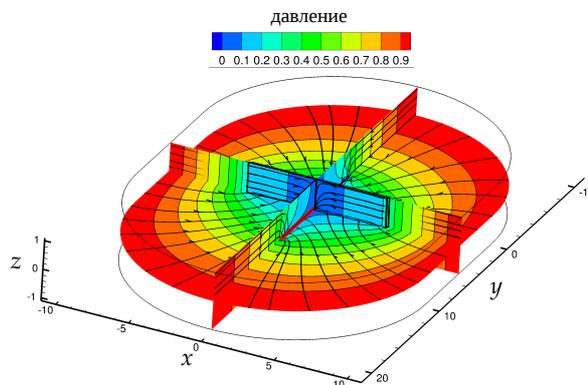


Рис. 4. Линии тока и распределение давления в сечениях однородного пласта, содержащего ГС с одиночной трещиной ГРП

**5. Модельная задача притока к ГС с трещиной ГРП.** Предложенные алгоритмы тестировались при решении модельной задачи фильтрации в однородном пласте. Безразмерные параметры задачи следующие: проницаемость  $k = 1$ , пористость  $m = 0.2$ , толщина пласта  $2H = 2$ , радиус контура питания  $l = 10$ , радиус скважины  $r_w = 10^{-2}$ , ее длина  $L = 10$ , длина трещины  $h = 3$  и ее проводимость  $M = 10$ , отношения вязкостей  $K_\mu = 0.1$ . Тесты проводились на персональном компьютере Intel(R) Core(TM) i3 CPU 540 3.07 GHz. Системы уравнений для давления  $P$ ,  $P^f$  и насыщенности  $S$ ,  $S^f$  решались итерационно стабилизированным методом бисопряженных градиентов (BCGS — Bi-Conjugate Gradient Squared [22]) с предобуславливателем AMG. Итерации прекращались при снижении нормы невязки до значений  $\|r\| \leq 10^{-6}$ .

На рис. 3 приведено распределение давления в расчетной области  $D$  на момент  $t = \tau$ .

Линии тока и поле давления в сечениях однородного пласта, содержащего горизонтальную скважину с одиночной трещиной ГРП, показаны на рис. 4. Хорошо видно, как разделяется приток флюида с контура: одна часть попадает в трещины, другая — непосредственно в скважину.

На рис. 5 показано распределение насыщенности в пласте на различные моменты времени заводнения; моментам  $t_1, t_2, t_3, t_4$  соответствуют значения обводненности продукции скважины 0, 0, 43, 98%. Видно,

что наличие трещины ускоряет движение изосат в той части пласта, где возникают зоны пониженного давления (рис. 3). Следует отметить, что продвижение изосат к торцам скважины происходит заметно медленнее, чем к основной части ствола. Это связано с тем, что вблизи торцов скважины структура потока обладает сферической симметрией, а на остальной части — радиальной. Известно [1], что время полного отбора жидкости при сферической симметрии потока осуществляется за больший период времени, чем при радиальной симметрии.

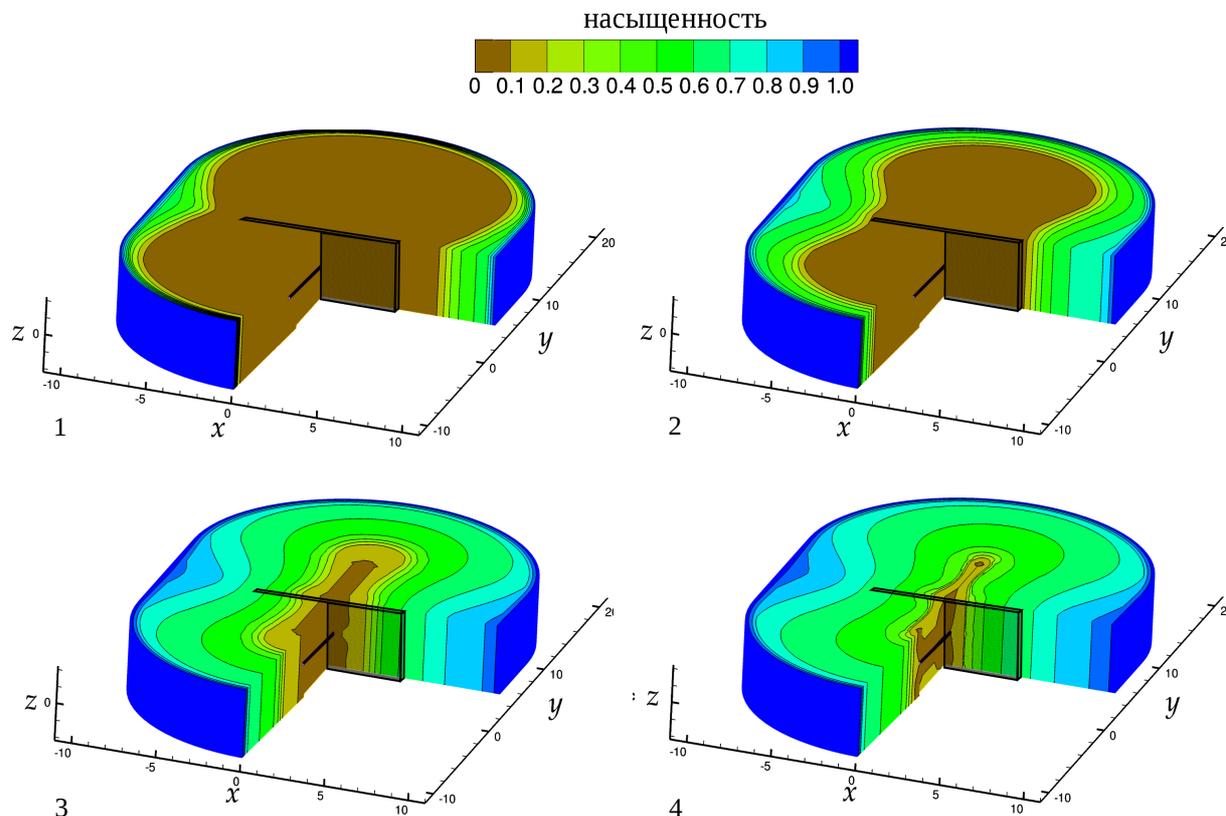


Рис. 5. Распределение насыщенности при заводнении пласта, содержащего ГС с одиночной трещиной ГРП:  
1)  $t_1 = 0.25$ ; 2)  $t_2 = 0.5$ ; 3)  $t_3 = 0.75$ ; 4)  $t_4 = 1.07$

**6. Вычислительная эффективность явно-неявной схемы.** Для рассматриваемой модельной задачи схема IMPES устойчива при  $\tau < 10^{-3}$ . Время  $t^*$  решения модельной задачи при  $N = 10^5$  по этой схеме до момента  $t = 1.07$ , в котором обводненность достигает 98%, составляет около полутора суток. Это время используем как эталон для оценки ускорения по комбинированной схеме, при которой область расчета  $D$  разбивается на локальные зоны, в части которых применяется схема IMPES, а в другой части — FIM.

Разделение области на локальные зоны будем производить по модулю скорости. Для этого применяется следующий алгоритм: для заданного распределения насыщенности рассчитывается поле давления, а затем скорости на гранях КО. Зная скорости на гранях, определяется допустимый шаг по времени  $\tau_i$ , обеспечивающий выполнение условия (1) в каждом КО  $V_i$ . Разделение области происходит путем группирования КО по значениям  $\tau_i$ . Такой способ разделения приводит к тому, что выделяются зоны в малой окрестности скважины, на ее торцах и вблизи трещины ГРП. Перестроение локальных зон будем производить на каждый шаг расчета давления и скоростей фильтрации.

При реализации явной схемы IMPES для насыщенности использование разных шагов по времени в локальных зонах требует согласования численных решений на гранях, разделяющих ячейки сетки. Пусть  $V_i$  и  $V_j$  — два конечных объема, разделенных гранью  $\Gamma_i^j$ , в которых используются временные шаги  $\tau_i$  и  $\tau_j$ . Если скорость фильтрации  $\mathbf{u}$  направлена от ячейки  $V_i$  к  $V_j$ , то в  $j$ -м уравнении схемы конечных объемов значение насыщенности  $S_i$  в ячейке, расположенной вверх по потоку, используется как граничное условие на грани  $\Gamma_i^j$ . Согласование численных решений на грани  $\Gamma_i^j$  осуществляется по-разному в зависимости от соотношения шагов  $\tau_i$  и  $\tau_j$ . Если  $\tau_j = K \cdot \tau_i$ ,  $K > 1$ , то для обеспечения консервативности сеточной схемы при вычислении потока воды на грани используется среднее арифметическое значение функции

Баклея–Левретта  $f^i = K^{-1} \sum_{k=1}^K f(S_i^{(k)})$ ,  $S_i^{(k)} = S_i(t + k \cdot \tau_i)$ . Если же, напротив,  $\tau_i = K \cdot \tau_j$ ,  $K > 1$ , то для восполнения функции  $S_i$  в моменты времени  $t + k \cdot \tau_j$ ,  $k = 1, \dots, K-1$  используется линейная интерполяция по значениям на текущем и верхнем временных слоях.

В неявном методе FIM используется насыщенность с верхнего временного слоя, поэтому согласование решений в локальных зонах не требуется. Следует отметить, что задача для вычисления насыщенности  $S$  во всех зонах решается отдельно, независимо от методов, применяемых в соседних локальных зонах.

В таблице приведено процентное распределение ячеек в локальных зонах при  $N_z = 5$  на моменты времени  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  и  $t_4$ .

На рис. 6 изображена сетка конечных объемов, покрывающая область  $D$ . Особенности построения сетки таковы: сгущение вблизи скважины, торцы скважины моделируются в виде полусфер, которые получаются в результате натягивания структурированной кубической сетки на сферу (рис. 6.1). В оставшейся области строится структурированная цилиндрическая сетка КО (рис. 6.2), далее сферическая и цилиндрическая сетки объединяются с помощью преобразования координат по уравнению Лапласа [23] (рис. 6.3). Сетка вдоль ствола скважины строится путем “выдавливания” двумерной сетки в плоскости  $Oxz$ .

Процентное распределение ячеек в локальных зонах при  $N_z = 5$

Индекс зоны	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$
1	100	82	59	1	1
2	0	16	24	3	1
3	0	2	17	16	4
4	0	0	0	48	7
5	0	0	0	32	87

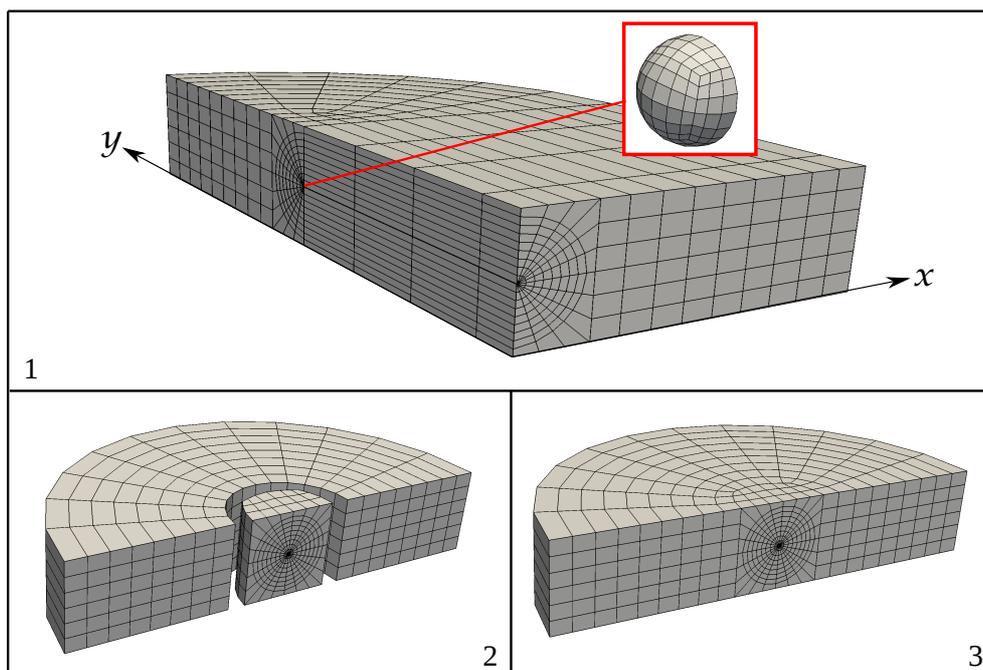


Рис. 6. Сетка конечных объемов

На рис. 7 показана зависимость расчетного времени решения задачи от количества зон  $N_z$  при различных значениях числа элементов  $N$  сетки. Здесь  $T = t_c/t_0$  — относительное время расчета,  $t_c$  — это абсолютное время расчета,  $t_0$  — время расчета по схеме IMPES при прочих идентичных настройках для  $N_z = 1$ . Видно, что чем больше число ячеек сетки  $N$ , тем существеннее ускорение от количества локальных зон. При  $N = 10^5$  разделение области ускоряет расчет приблизительно в три раза для  $N_z = 10$ . Дальнейшее увеличение количества локальных зон слабо влияет на ускорение.

Дополнительное ускорение счета можно получить, используя полностью неявную схему FIM в некоторых локальных зонах. Поскольку одна итерация неявной схемы требует больших вычислительных затрат, чем один шаг по явной схеме, то применение FIM-метода оправдано только в тех локальных зонах, где  $N_s$  на порядок больше единицы (соответствует одному шагу по времени). В ходе численных экспериментов было установлено, что применение FIM-метода оправдано для  $N_s > 50$ .

На рис. 8 показано относительное расчетное время решение задачи при  $N = 10^5$  с различным числом

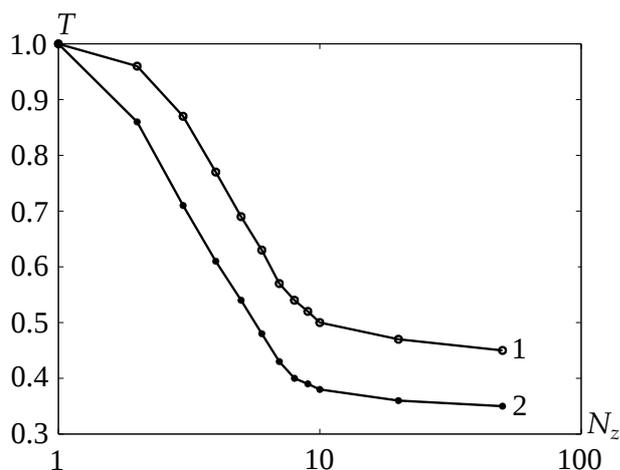


Рис. 7. Относительное время решения  $T$  задачи по схеме IMPES при различном числе ячеек сетки: 1)  $N = 10^4$ , 2)  $N = 10^5$

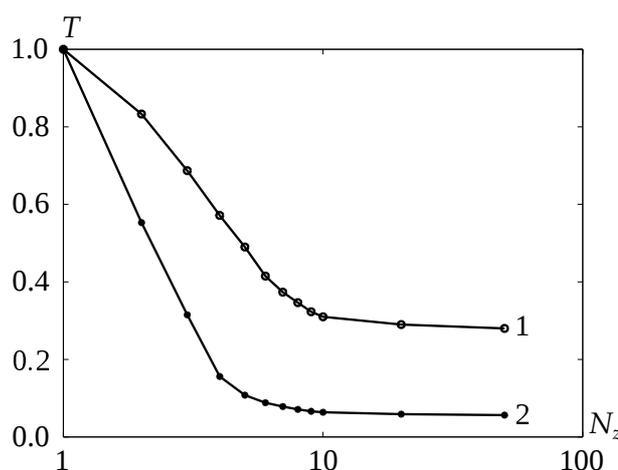


Рис. 8. Относительное время решения  $T$  задачи для IMPES (1) и AIM (2) методов при  $N = 10^5$

локальных зон. Видно, что использование FIM-метода в совокупности с локальными зонами (AIM) дает ускорение расчета на порядок для  $N_z = 5$  и в 14 раз для  $N_z = 10$ . Дальнейшее увеличение зон практически не дает выигрыша в скорости расчета. Расчеты показали, что для рассматриваемой задачи оптимальным оказалось деление области на 6 локальных зон с использованием AIM-метода.

**7. Выводы.** Разработаны алгоритмы ускорения решения задачи двухфазной фильтрации на участке пласта, содержащего горизонтальную скважину с одиночной трансверсальной трещиной ГРП в трехмерной постановке со сгущением сетки в прискважинной области. Ускорение достигается за счет программного разбиения области расчета на локальные зоны, в каждой из которых выбирается свой шаг по времени. Наибольшее ускорение, в сравнении с IMPES, обеспечивается использованием явно-неявных схем по насыщенности в трещине и прискваженных зонах.

Предложенные алгоритмы ускорения допускают параллельные вычисления в локальных зонах, поэтому в перспективе планируется использование многопроцессорной техники для аппаратного ускорения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства республики Татарстан в рамках научных проектов № 15-41-02699 и № 15-41-02698.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993.
2. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982.
3. Coats K.H. Reservoir simulation // Petroleum Engineering Handbook. Chapter 48. Richardson: SPE Press, 1987.
4. Shen R., Gao S. Numerical simulation of production performance of fractured horizontal wells considered conductivity variation // Proc. 3rd International Conference on Computer and Electrical Engineering. Vol. 53, No. 2.36. Singapore: IACSIT Press, 2012.
5. Shangaraeva A.I., Shevchenko D.V. Speed up of the oil saturation numerical algorithm for the plane-parallel filtration // Applied Mathematical Sciences. 2015. 9. 7467–7474.
6. Appleyard J.R., Cheshire I.M., Pollard R.K. Special techniques for fully-implicit simulators // Proc. of the European Symposium on Enhanced Oil Recovery. New York: Elsevier, 1981. 395–408.
7. Thomas G.W., Thurnau D.H. Reservoir simulation using an adaptive implicit method // SPE Journal. 1983. 23, N 5. 759–768.
8. Fung L.S.-K., Collins D.A., Nghiem L.X. An adaptive implicit switching criterion based on numerical stability analysis // SPE Reservoir Engineering. 1989. 4, N 1. 45–52.
9. Watts J.W., Shaw J.S. A new method for solving the implicit reservoir simulation matrix equation // Proc. SPE Reservoir Simulation Symposium. The Woodlands, Texas, USA. January 31–February 2, 2005. doi: 10.2118/93068-MS
10. Марченко Н.А., Пергамент А.Х., Попов С.Б., Семилетов В.А., Томин П.Ю. Иерархия явно-неявных разностных схем для решения задач многофазной фильтрации. Препринт ИПМ № 97. М.: Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2008.
11. Lu B., Alshaalan T., Wheeler M.F. Iteratively coupled reservoir simulation for multiphase flow // Proc. SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Anaheim, California, USA. November 11–14, 2007. doi: 10.2118/110114-MS
12. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to numerical analysis. New York: Springer, 2002.

13. *Hackbusch W.* Multi-grid methods and applications. Berlin: Springer, 1985.
14. *Christensen M.C., Eskildsen K.L., Engsig-Karup A.P., Wakefield M.* Nonlinear multigrid for reservoir simulation // *SPE Journal*. 2016. **21**, N 3. 0888–0898.
15. *Mulder W.A., Gmeling-Meyling R.H.J.* Numerical simulation of two-phase flow using locally refined grids in three space dimensions // *SPE Advanced Technology Series*. 1993. **1**, N 1. doi 10.2118/21230-PA.
16. *Shiralkar G.S., Fleming G.C., Watts J.W., et al.* Development and field application of a high performance, unstructured simulator with parallel capability // *Proc. SPE Reservoir Simulation Symposium*. The Woodlands, Texas, USA. January 31–February 2, 2005. doi 10.2118/93080-MS.
17. *Мазуров П.А., Ценаев А.В.* Алгоритмы для распараллеливания решения задач двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками // *Вычислительные методы и программирование*. 2006. **7**. 251–258.
18. *Ценаев А.В.* Использование гетерогенных вычислительных систем для решения задач фильтрации жидкости методами декомпозиции области // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 38–43.
19. *Хамидуллин М.Р.* Численное моделирование притока однофазной жидкости к горизонтальной скважине с трещинами многостадийного гидроразрыва пласта // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2016. **158**, № 2. 287–301.
20. *Мазо А.Б., Поташев К.А., Калинин Е.И., Булыгин Д.В.* Моделирование разработки нефтяных месторождений методом суперэлементов // *Математическое моделирование*. 2013. **25**, № 8. 51–64.
21. *Нижитин К.Д.* Нелинейный метод конечных объемов для задач двухфазной фильтрации // *Математическое моделирование*. 2010. **22**, № 11. 131–147.
22. *Henk A.* Iterative Krylov methods for large linear systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
23. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Том 2. М: Мир, 1991.

Поступила в редакцию  
12.04.2017

---

### Accelerated Explicit-Implicit Algorithms for the Simulation of Two-Phase Flow toward a Horizontal Multistage Hydraulically Fractured Well

A. B. Mazo<sup>1</sup> and M. R. Khamidullin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Kazan Federal University, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics; Kremlevskaya ulitsa 18, Kazan, 420008, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: abmazo1956@gmail.com*

<sup>2</sup> *Kazan Federal University, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics; Kremlevskaya ulitsa 18, Kazan, 420008, Russia; Graduate Student, e-mail: marseille.ksu@gmail.com*

Received April 12, 2017

**Abstract:** Explicit-implicit approximation schemes for the numerical simulation of 3D two-phase flows toward a horizontal multistage hydraulically fractured well are proposed. This approach is based on the division of the computational domain into local subdomains and on using either an explicit or implicit scheme for the saturation transport equation with consideration of a local Courant number.

**Keywords:** two-phase filtration, hydraulic fracturing, IMPES method, FIM method.

#### References

1. K. S. Basniev, I. N. Kochina, and V. M. Maksimov, *Underground Hydrodynamics* (Nedra, Moscow, 1993) [in Russian].
2. K. Aziz and A. Settari, *Petroleum Reservoir Simulation* (Appl. Sci. Publ., London, 1979; Nedra, Moscow, 1982).
3. K. H. Coats, “Reservoir simulation,” in *Petroleum Engineering Handbook* (SPE Press, Richardson, 1987), Chap. 48.
4. R. Shen and S. Gao, “Numerical Simulation of Production Performance of Fractured Horizontal Wells Considered Conductivity Variation,” in *Proc. 3rd Int. Conf. on Computer and Electrical Engineering* (IACSIT Press, Singapore, 2012), Vol. 53, No. 2.36.
5. A. I. Shangaraeva and D. V. Shevchenko, “Speed up of the Oil Saturation Numerical Algorithm for the Plane-Parallel Filtration,” *Appl. Math. Sci.* **9**, 7467–7474 (2015).

6. J. R. Appleyard, I. M. Cheshire, and R. K. Pollard, "Special Techniques for Fully-Implicit Simulators," in *Proc. European Symp. on Enhanced Oil Recovery, Bournemouth, U.K., September 21–23, 1981* (Elsevier, New York, 1981), pp. 395–408.
7. G. W. Thomas and D. H. Thurnau, "Reservoir Simulation Using an Adaptive Implicit Method," *SPE J.* **23** (5), 759–768 (1983).
8. L. S.-K. Fung, D. A. Collins, and L. X. Nghiem, "An Adaptive-Implicit Switching Criterion Based on Numerical Stability Analysis," *SPE Reserv. Eng.* **4** (1), 45–51 (1989).
9. J. W. Watts and J. S. Shaw, "A New Method for Solving the Implicit Reservoir Simulation Matrix Equation," in *Proc. SPE Reservoir Simulation Symposium, The Woodlands, USA, January 31–February 2, 2005*. doi 10.2118/93068-MS
10. N. A. Marchenko, A. Kh. Pergament, S. B. Popov, et al., *Hierarchy of Explicit-Implicit Difference Schemes for Multiphase Filtration Problems*, Preprint No. 97 (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 2008).
11. B. Lu, T. Alshaalan, and M. F. Wheeler, "Iteratively Coupled Reservoir Simulation for Multiphase Flow," in *Proc. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Anaheim, USA, November 11–14, 2007*. doi: 10.2118/110114-MS
12. J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis* (Springer, New York, 2002).
13. W. Hackbusch, *Multi-Grid Methods and Applications* (Springer, Berlin, 1985).
14. M. C. Christensen, K. L. Eskildsen, A. P. Engsig-Karup, and M. Wakefield, "Nonlinear Multigrid for Reservoir Simulation," *SPE J.* **21** (3), 0888–0898 (2016).
15. W. A. Mulder and R. H. J. Gmeling-Meyling, "Numerical Simulation of Two-Phase Flow Using Locally Refined Grids in Three Space Dimensions," *SPE Advanced Technology Series* **1** (1) (1993). doi 10.2118/21230-PA
16. G. S. Shiralkar, G. C. Fleming, J. W. Watts, et al., "Development and Field Application of a High Performance, Unstructured Simulator with Parallel Capability," in *Proc. SPE Reservoir Simulation Symposium, The Woodlands, USA, January 31–February 2, 2005*. doi 10.2118/93080-MS
17. P. A. Mazurov and A. V. Tsepaev, "Parallel Algorithms for Solving Two-Phase Flow Problems with Fine Grid Segments," *Vychisl. Metody Programm.* **7**, 251–258 (2006).
18. A. V. Tsepaev, "Application of Heterogeneous Computing Systems for Solving the Problem of Fluid Flow by Domain Decomposition Methods," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 38–43 (2012).
19. M. R. Khamidullin, "Numerical Simulation of One-Phase Flow to Multi-Stage Hydraulically Fractured Horizontal Well," *Uchen. Zap. Kazan. Gos. Univ. Fiz. Mat.* **158** (2), 287–301 (2016).
20. A. B. Mazo, K. A. Potashev, E. I. Kalinin, and D. V. Bulygin, "Oil Reservoir Simulation with the Superelement Method," *Mat. Model.* **25** (8), 51–64 (2013).
21. K. D. Nikitin, "Nonlinear Finite Volume Method for Two-Phase Flow in Porous Media," *Mat. Model.* **22** (11), 131–147 (2010).
22. A. Henk, *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003).
23. C. A. J. Fletcher, *Computational Techniques for Fluid Dynamics* (Springer, Heidelberg, 1988; Mir, Moscow, 1991).