

УДК 519.633.6

doi 10.26089/NumMet.v18r106

## ИСКУССТВЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПЛАЗМЕ

Е. В. Чижонков<sup>1</sup>

Асимптотическими методами изучается поведение функций, описывающих релятивистский эффект опрокидывания плоских одномерных электронных плазменных колебаний. Полученные формулы порождают различные виды искусственных граничных условий, которые анализируются с помощью численных экспериментов. Специально подобранная комбинация предложенных граничных условий используется для моделирования эффекта опрокидывания в пространственно двумерном случае. Часть расчетов была проведена на СКИФ МГУ “Чебышев” (МГУ им. М.В. Ломоносова).

**Ключевые слова:** численное моделирование, плазменные колебания, эффект опрокидывания, искусственные граничные условия.

**Введение.** При численном решении задач, сформулированных в неограниченной пространственной области, как правило, приходится использовать искусственные граничные условия, т.е. некоторые соотношения для искомых функций, заданные на границе конечной расчетной области. Построение искусственных граничных условий существенно опирается на свойства решения исходной задачи и ориентировано, в первую очередь, на то, чтобы заданные условия на границе оказывали минимальное влияние на решение внутри области. В идеале — не оказывали никакого влияния вообще. Наиболее полный обзор идей и методов построения граничных условий, а также подробная библиография на эту тему имеется в монографии [1]. Однако к рассматриваемому случаю плазменных колебаний подобрать в ней подходящий пример (аналог) не представилось возможным, поэтому приводимые ниже рассуждения и выкладки ориентированы на восполнение этого пробела.

В настоящей статье предлагаются различные искусственные граничные условия для численного моделирования эффекта опрокидывания электронных колебаний в плазме. Уточним, что под опрокидыванием колебаний (близкие термины — *складка*, *перезлест*), как правило, понимают одно из нарушений применимости гидродинамической модели для описания бесстолкновительной холодной плазмы. Более конкретно, лагранжево описание среды теряет смысл, когда происходит пересечение электронных траекторий, а эйлерово описание — при обращении в бесконечность функции, характеризующей плотность электронов. Появление сингулярности плотности математически эквивалентно пересечению траекторий, чему имеется корректное обоснование в монографии [2] (см. также приложение в [3]).

Обсуждаемое пересечение траекторий является формальным следствием разности частот, с которыми колеблются соседние частицы. Однако причины сдвига частоты могут быть самыми различными. Например, в одной из наиболее известных работ, посвященных плазменным колебаниям [4], в качестве таких причин указаны цилиндрическая или сферическая симметрия задачи, пространственная неоднородность начальной концентрации электронов и др. В настоящей работе в качестве причины сдвига частоты рассматривается релятивистский эффект и, как его следствие, опрокидывание плоских одномерных колебаний.

Статья имеет следующую структуру. Сначала для модельной постановки задачи строятся различные виды искусственных граничных условий и проводятся результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие их корректность. Далее приведены рекомендации по использованию искусственных граничных условий. Затем специально подобранная комбинация граничных условий используется при моделировании опрокидывания плоских двумерных колебаний. Полученные данные сопоставляются с результатами, полученными при применении других краевых условий. В заключении систематизированы результаты проведенных исследований.

**1. Постановка модельной задачи.** Рассмотрим следующую задачу: пусть в неограниченной обла-

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; профессор, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.ru

сти  $\{(x, t) : -\infty < x < \infty, t > 0\}$  требуется определить решение системы уравнений

$$\frac{\partial P}{\partial t} + E + V \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} - V + V \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad V = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}}, \quad (1)$$

удовлетворяющее следующим начальным условиям при  $t = 0$ :

$$E^0(x) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 x \exp^2 \left\{-\frac{x^2}{\rho_*^2}\right\}, \quad P^0(x) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $P, V$  — безразмерные импульс и скорость электронов,  $E$  — функция, описывающая безразмерное электрическое поле. Сформулированная задача описывает одномерные плоские релятивистские колебания в холодной, идеальной, релятивистской электронной жидкости (плазме). При этом начальные условия (2) моделируют ситуацию, когда колебания инициируются коротким мощным лазерным импульсом, имеющим гауссово распределение интенсивности по пространству [5, 6];  $a_*, \rho_*$  — параметры импульса.

Приведенная постановка является одной из самых простых, приводящих к опрокидыванию электронных колебаний. Она была подробно изучена в работе [7] как асимптотическими методами, так и численными, причем параллельно — в эйлеровых и лагранжевых переменных. Если искомыми функциями, как в системе (1), являются функции, зависящие от эйлеровых переменных, то главным объектом наблюдения является безразмерная плотность электронов

$$N(x, t) = 1 - \frac{\partial E(x, t)}{\partial x}, \quad (3)$$

так как именно эта функция обращается в бесконечность в момент опрокидывания колебаний. Следует отметить, что в терминах свойств решений квазилинейных гиперболических систем уравнений эффект образования неограниченных производных при ограниченности самого решения принято называть *градиентной катастрофой* [8].

**2. Асимптотический анализ решения.** Преобразуем систему (1) из эйлеровых переменных в лагранжевы:

$$\frac{dP(\xi, t)}{dt} = -E(\xi, t), \quad \frac{dE(\xi, t)}{dt} = V(\xi, t), \quad V = \frac{P(\xi, t)}{\sqrt{1 + P^2(\xi, t)}}, \quad (4)$$

где  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}$  — полная производная по времени.

При этом функция  $R(\xi, t)$ , определяющая смещение частицы с лагранжевой координатой  $\xi$  и траекторией  $x(\xi, t)$ :

$$x(\xi, t) = \xi + R(\xi, t), \quad (5)$$

удовлетворяет уравнению  $\frac{dR(\xi, t)}{dt} = V(\xi, t)$ . Отсюда следует, что значения  $R(\xi, t)$  и  $E(\xi, t)$  совпадают с точностью до постоянной, которая вычисляется из условия равенства нулю электрического поля при отсутствии смещений. Другими словами, в случае плоских одномерных колебаний справедливо

$$R(\xi, t) \equiv E(\xi, t). \quad (6)$$

С учетом тождества (6) основная система уравнений в лагранжевых переменных (4) принимает вид

$$\frac{dP}{dt} = -R, \quad \frac{dR}{dt} = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}} \equiv V. \quad (7)$$

Для преобразования начальных условий (2) в условия для уравнений (7) следует воспользоваться соотношением (5); при этом формула для определения лагранжевой координаты частицы  $\xi$  по начальному распределению  $E^0(x)$  такова:

$$\xi = x(\xi, 0) - E^0(x(\xi, 0)). \quad (8)$$

Заметим, что на некотором расстоянии от начала координат по переменной  $x$  амплитуда колебаний, определяемая величиной  $E^0(x)$ , становится достаточно малой, поэтому уравнения (7) превращаются в слабонелинейные и их приближенные решения можно построить, используя методику теории возмущений [9]. Приведем здесь краткий вывод соответствующих аналитических формул.

Учитывая приближенное представление релятивистской зависимости импульса от скорости

$$P \approx V \left( 1 + \frac{V^2}{2} \right)$$

и исключая смещение  $R$  из системы (7), получим следующее уравнение для скорости  $V$ :

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + 1 \right) V + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} V^3 = 0. \tag{9}$$

Добавим к нему начальные условия из (2)

$$V(\xi, 0) = 0, \quad \frac{dV}{dt}(\xi, 0) = A(\xi). \tag{10}$$

Для малой амплитуды колебаний  $A(\xi)$  представляет интерес приближенное (асимптотическое) решение (9), (10), равномерно ограниченное по переменной  $t$  и отличающееся от точного на величину третьего порядка малости, т.е.  $O(A^3(\xi))$ . В этом случае можно положить

$$A(\xi) \approx -E^0(x) = -\left( \frac{a_*}{\rho_*} \right)^2 x \exp \left\{ -2 \frac{x^2}{\rho_*^2} \right\}, \tag{11}$$

где  $\xi$  и  $x$  связаны, как и выше, соотношением (8).

Прямое разложение решения (9), (10) по степеням малого параметра

$$V(t) = \varepsilon V_1(t) + \varepsilon^2 V_2(t) + \varepsilon^3 V_3(t) + \dots, \quad \varepsilon = A(\xi),$$

как обычно, содержит резонансные слагаемые вида  $t \sin t$ :

$$V(t) = \varepsilon \sin t + \varepsilon^3 \left( -\frac{27}{64} \sin t + \frac{9}{64} \sin 3t - \frac{3}{16} t \sin t \right) + o(\varepsilon^3),$$

следовательно, неприменимо на длительных интервалах времени.

Используя стандартную методику [9], несложно получить поправку к основной частоте колебаний, зависящую от амплитуды. В результате искомое ограниченное решение имеет вид (см. подробный вывод в [7])

$$V(t) = \varepsilon \sin \omega t + \varepsilon^3 \left[ -\frac{27}{64} \sin \omega t + \frac{9}{64} \sin 3\omega t \right] + o(\varepsilon^3), \quad \omega = 1 - \frac{3\varepsilon^2}{16}.$$

Возвращаясь к постановке (9), (10), получаем зависимость частоты колебаний от пространственного распределения начальной амплитуды  $A(\xi)$

$$V(\xi, t) = A(\xi) \sin \left( 1 - \frac{3A^2(\xi)}{16} \right) t + O(A^3(\xi)).$$

При этом слагаемые третьего порядка малости уже не являются растущими во времени в отличие от прямого разложения.

Применим полученный результат к соотношениям (7). В частности, получим, что траектория частицы с точностью до членов третьего порядка малости имеет вид

$$x = \xi - A(\xi) \cos \left( 1 - \frac{3A^2(\xi)}{16} \right) t, \tag{12}$$

где  $\xi$  — лагранжева координата частицы в равновесном положении, не приводящем к возникновению электрического поля. Так как начальная амплитуда колебаний  $A(\xi)$  не является постоянной величиной, то траектории каких-то соседних частиц рано или поздно обязаны пересечься вследствие разницы в частоте колебаний.

Поясним это подробнее, следуя [2] (см. с. 86–94). Перепишем уравнение для траекторий частиц (12) в удобном виде

$$x = \xi - A(\xi) \cos[\omega(\xi)t], \quad \omega(\xi) = 1 + \sigma A^2(\xi), \quad \sigma \neq 0, \tag{13}$$

и предположим, что в точке  $(x, t)$  произошло пересечение траекторий соседних частиц, характеризуемых лагранжевыми координатами  $\xi$  и  $\xi + \Delta\xi$ . Это означает, что кроме равенств (13) справедливо следующее соотношение:

$$x = \xi + \Delta\xi - A(\xi + \Delta\xi) \cos[\omega(\xi + \Delta\xi)t]. \quad (14)$$

Вычтем из (14) первое равенство (13), добавим в правую часть выражение  $\pm A(\xi + \Delta\xi) \cos[\omega(\xi)t]$ , сгруппируем слагаемые и поделим почленно на  $\Delta\xi$ . Будем иметь

$$0 = 1 - \frac{A(\xi + \Delta\xi) - A(\xi)}{\Delta\xi} \cos[\omega(\xi)t] - A(\xi + \Delta\xi) \frac{\cos[\omega(\xi + \Delta\xi)t] - \cos[\omega(\xi)t]}{\Delta\xi}. \quad (15)$$

Переходя в (15) к пределу при  $\Delta\xi \rightarrow 0$ , получим уравнение  $\frac{\partial x}{\partial \xi} = 0$  или, что то же самое

$$0 = 1 - A'(\xi) \cos[\omega(\xi)t] + A(\xi) \sin[\omega(\xi)t] \omega'(\xi) t.$$

После введения обычным образом вспомогательного угла  $\varphi$  полученное уравнение преобразуется к виду

$$A'(\xi) \sqrt{1 + 4t^2 \sigma^2 A^4(\xi)} \cos[\omega(\xi)t + \varphi] = 1. \quad (16)$$

Возможность опрокидывания определяется исключительно разрешимостью уравнения (16). Так как множитель при  $\cos$  монотонно возрастает при увеличении  $t$  и все функции в (16) непрерывны, то явная формула (11) для  $A(\xi)$  гарантирует возникновение эффекта опрокидывания колебаний.

При достаточно малой амплитуде колебаний  $A(\xi) = \varepsilon$  несложно оценить асимптотику по времени наступления момента опрокидывания. Полагая  $|A'(\xi)| = O(\varepsilon)$  и  $|A'(\xi)| \sqrt{1 + 4t^2 \sigma^2 A^4(\xi)} = O(1)$ , имеем

$$t_{wb} = O\left(\frac{1}{|A'(\xi)| A^2(\xi)}\right) = O(\varepsilon^{-3}).$$

Обратим внимание, что эффект опрокидывания при небольшой амплитуде колебаний необходимо возникает вследствие зависимости частоты колебаний от амплитуды, т.е. от условия  $\omega'(\xi) \neq 0$ . В случае нерелятивистских колебаний (также плоских и одномерных) сдвиг частоты колебания частицы отсутствует [10], поэтому колебания небольшой амплитуды продолжают продолжаться неограниченно долго.

**3. Искусственные граничные условия.** Из результатов предыдущего раздела следует, что на некотором расстоянии от точки  $x = 0$ , когда амплитуда колебаний  $E^0(x)$  становится достаточно малой (порядка  $\varepsilon$ ), решение задачи Коши (1), (2) с точностью до  $O(\varepsilon^3)$  описывается асимптотическими формулами

$$\begin{aligned} V_a(x, t) &= -E^0(x) \sin[\omega(x)t] = P_a(x, t), \\ E_a(x, t) &= E^0(x) \cos[\omega(x)t], \\ \omega(x) &= 1 - \frac{3}{16} [E^0(x)]^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Примем эти формулы в качестве основы для построения искусственных граничных условий с целью ограничения размеров расчетной области. Главная задача — максимальное сокращение размеров области, не влияющее на эффект опрокидывания колебаний. Для удобства обозначим расчетную область по переменной  $x$  как  $|x| \leq d$  и будем обсуждать задание граничных условий при  $x = \pm d$ . В терминах асимптотического анализа, проведенного в предыдущем разделе, искусственные граничные условия будут иметь различный порядок относительно параметра  $\varepsilon$  — амплитуды колебаний.

**3.1. Полное затухание колебаний.** Зададим при некотором  $d$  нулевые краевые условия

$$P(\pm d, t) = 0, \quad E(\pm d, t) = 0. \quad (18)$$

С формальной точки зрения такой подход некорректен. Дело в том, что начальная функция  $E^0(x)$  в (2) отлична от нуля на всей оси  $OX$  и задание условий вида (18) сразу формирует разрывное электрическое поле. Это означает, что при  $x = \pm d$ , в силу формулы (3), имеет место сингулярность электронной плотности, т.е. немедленное опрокидывание колебаний.

Однако таким образом дело обстоит только при дифференциальном анализе. При численном анализе (построении приближенных решений в условиях вычислительной погрешности) указанное формальное препятствие несложно преодолеть. Поступим следующим образом. Введем на отрезке  $|x| \leq d$  равномерную сетку с достаточно малым шагом  $h$ . Затем во внутренних узлах сетки  $|x_k| < d$  определим значения

начальной функции как  $E^0(x_k)$ , а в граничных узлах  $x = \pm d$  положим в соответствии с (18) нулевые значения. Далее построим достаточно гладкую функцию, используя выбранные таким образом значения в качестве интерполяционных. В частности, естественный кубический интерполяционный сплайн вполне подойдет для этой цели. Имеющиеся оценки близости интерполирующей функции порядка  $O(h^4)$  (см., например, [11]) приводят к естественному ограничению:  $|E^0(\pm d)|$  должен быть по порядку меньше, чем погрешность интерполяции, а в идеале — совпадать с вычислительной погрешностью, т.е. с ошибками округления данных. Тогда вычислительная устойчивость сплайна “полностью” нивелирует разрыв в начальном условии.

На практике удовлетворить указанному ограничению несложно: достаточно взять  $d$  достаточно большим. Например, полагая  $d = 4.5\rho_*$ , получаем  $\exp^2\left\{-\frac{d^2}{\rho_*^2}\right\} \approx 2.5768 \times 10^{-18}$ . Это означает, что при вычислениях с двойной точностью величина скачка начальной функции  $E$  соизмерима с машинной точностью, т.е. с обычной погрешностью округления данных. Другими словами, при численном моделировании колебаний эффект их опрокидывания на столь отдаленной границе замечен совершенно не будет, что полностью соответствует понятию “искусственной границы”.

Описанный подход к построению искусственных граничных условий — “обрезание” бесконечной области с помощью однородных граничных условий первого рода — является практически весьма удобным и потому наиболее часто используемым. Он порождает граничные условия первого порядка точности —  $O(\varepsilon)$ . Сопоставление численных решений, полученных в переменных Эйлера (с использованием искусственной границы), с решениями в переменных Лагранжа (без использования искусственной границы), проведенное в работах [3, 7, 12], позволило сделать вывод, что “затуханием” колебаний вполне можно пользоваться при численном моделировании эффекта опрокидывания плазменных колебаний. Однако главный недостаток такого подхода — чрезмерное увеличение расчетной области. Искомый эффект опрокидывания, как правило, наблюдается в окрестности начала координаты  $x$  на расстоянии менее  $0.1\rho_*$ , поэтому более 90% вычислений являются своеобразной “платой” за незнание подходящих граничных условий.

**3.2. Линеаризация исходных уравнений.** Из асимптотических формул (17) явно следует, что все искомые функции имеют одинаковое экспоненциальное убывание при увеличении  $|x|$ . Это означает, что, начиная с некоторого  $|x| = d$ , квадратичными слагаемыми в исходных уравнениях (1) можно пренебречь, в силу их малости относительно линейных слагаемых. Другими словами, вполне разумным является задание при  $x = \pm d, t > 0$  краевых условий вида

$$\frac{\partial P}{\partial t} + E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} - V = 0, \quad V = P. \tag{19}$$

При этом начальная функция  $E^0(x)$  никакого изменения не требует. Такой подход порождает граничные условия второго порядка точности —  $O(\varepsilon^2)$ .

Для краевых условий (19) при использовании иллюстративного варианта из [7] ( $a_* = 2.07, \rho_* = 3$ ) была проведена серия вычислительных экспериментов с целью определения подходящего значения параметра  $d$ . Как обычно, основной расчет проводился для уравнений в эйлеровых переменных (1), а контрольный расчет (с любой требуемой точностью) — для уравнений в лагранжевых переменных (7).

Проведенные вычисления показали, что для аккуратного моделирования эффекта опрокидывания вполне достаточно взять  $d = 2.0\rho_*$ . Это означает снижение вычислительных затрат более чем в два раза по сравнению с использованием “затухания” колебаний при одной и той же требуемой точности расчета. Дополнительное удобство граничных условий (19) заключается в том, что их реализация есть упрощение разностных уравнений, используемых во внутренних точках области, заключающееся в простом отбрасывании квадратичных слагаемых.

**3.3. Учет слабой нелинейности исходных уравнений.** Анализ уравнений (1) в приближении слабой нелинейности привел к асимптотическим формулам (17). Равномерная по времени пригодность этих формул базируется на зависимости частоты колебаний от их амплитуды. Это означает, что если в явной форме учитывать изменение частоты колебаний, то можно добиться приемлемости модифицированных граничных условий на меньшем расстоянии от начала координат. Поясним это подробнее.

Рассмотрим частицу с лагранжевой координатой  $\xi = d$  (или с симметричной —  $\xi = -d$ , так как расхождения одинаковы). Ее амплитуда колебаний определяется с помощью (8) как  $E^0(d)$ , поэтому частоту ее колебаний можно вычислить по формуле  $\omega(d) = 1 - \frac{3}{16} [E^0(d)]^2$ . В соответствии с формулами (17) эта частица в произвольный момент времени создает своим смещением электрическое поле в окрестности точки  $x = d$ . Отличие асимптотической формулы от точного решения исходных уравнений (1) или их аналогов в лагранжевых координатах (7) имеет третий порядок малости относительно амплитуды, т.е. в терминах

асимптотического разложения —  $O(\varepsilon^3)$ . При этом отклонение частицы от равновесного положения за период равно нулю. Поэтому для построения искусственных граничных условий третьего порядка точности можно воспользоваться явными формулами (17). Однако представляется более удобным, в первую очередь, для численного решения, применять дифференциальные уравнения, которые порождают решения вида (17). В частности, предлагается при  $x = \pm d$ ,  $t > 0$  использовать граничные условия вида

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \omega(\pm d)E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} - \omega(\pm d)V = 0, \quad V = P. \quad (20)$$

Заметим, что при этом начальная функция  $E^0(x)$  так же, как в предыдущем случае, никакого изменения не требует.

Для краевых условий (20) при использовании параметров из [7] —  $a_* = 2.07$ ,  $\rho_* = 3$  — была проведена серия вычислительных экспериментов с целью определения подходящего значения параметра  $d$ . Проведенные вычисления показали, что для аккуратного моделирования эффекта опрокидывания вполне достаточно взять  $d = 1.3 \rho_*$ . Это означает снижение вычислительных затрат более чем в три раза по сравнению с использованием “затухания” колебаний при одной и той же требуемой точности расчета. Граничные условия (20) тоже легко реализуемы за счет отбрасывания квадратичных слагаемых в используемой разностной схеме и введения поправочного множителя для частоты колебаний.

**3.4. Ухудшение аппроксимации на границе.** Еще одним полезным приемом конструирования искусственных граничных условий является “ухудшение” (или — упрощение) аппроксимации исходных уравнений. Поясним это подробнее.

Возьмем в качестве примера для уравнений (1) простейшую схему с перешагиванием по времени и аппроксимацию центральными разностями для пространственных производных. На сетке  $t_j = j\tau$ ,  $x_k = kh$  будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{P_k^{j+1/2} - P_k^{j-1/2}}{\tau} + E_k^j + \frac{P_{k+1}^{j-1/2} - P_{k-1}^{j-1/2}}{2h} &= 0, \\ \frac{E_k^{j+1} - E_k^j}{\tau} - V_k^{j+1/2} + V_k^{j+1/2} \frac{E_{k+1}^j - E_{k-1}^j}{2h} &= 0. \end{aligned}$$

Эти разностные уравнения обладают аппроксимацией  $O(h^2)$ , однако не могут быть использованы в граничных узлах, например в узле  $x_M = d$ , в силу недоопределенности используемых функций при  $x_{M+1}$ .

Заменим аппроксимации пространственных производных в узле  $x_M = d$  односторонними разностями:

$$\begin{aligned} \frac{P_M^{j+1/2} - P_M^{j-1/2}}{\tau} + E_M^j + \frac{P_M^{j-1/2} - P_{M-1}^{j-1/2}}{h} &= 0, \\ \frac{E_M^{j+1} - E_M^j}{\tau} - V_M^{j+1/2} + V_M^{j+1/2} \frac{E_M^j - E_{M-1}^j}{h} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

В результате порядок аппроксимации ухудшится до  $O(h)$ , зато формулы станут пригодными для расчетов. Аналогично это можно проделать для узла  $x_{-M} = -d$ .

Теперь рассмотрим построенную на границе аппроксимацию (новые искусственные граничные условия) (21) с точки зрения асимптотического анализа. Простое отбрасывание слагаемых вида  $V \frac{\partial E}{\partial x}$ , как в разделе 3.2, порождает условия второго порядка относительно амплитуды колебаний, т.е.  $O(\varepsilon^2)$ . В данном же случае слагаемые не отбрасываются целиком: только в один из сомножителей вносится погрешность порядка  $O(\varepsilon h)$ . Так как второй сомножитель имеет порядок  $O(\varepsilon)$ , то в результате такого подхода вносимая в исходные уравнения погрешность приобретает асимптотику  $O(\varepsilon^2 h)$ . Конечно, условия (21) асимптотически хуже, чем условия (20), но они ничем не уступают условиям (19).

Для краевых условий (21) при использовании параметров из [7] ( $a_* = 2.07$ ,  $\rho_* = 3$ ) была проведена серия вычислительных экспериментов с целью определения подходящего значения параметра  $d$ . Проведенные вычисления показали, что для аккуратного моделирования эффекта опрокидывания вполне достаточно взять  $1.5 \rho_* \leq d \leq 1.8 \rho_*$ . Это означает полное согласование расчетов с имеющимися асимптотическими оценками.

Конечно, следует отметить, что коэффициенты при  $\rho_*$  во всех формулах для  $d$  определялись из численного эксперимента приблизительно, с погрешностью примерно 10%.

В завершение раздела сформулируем рекомендации относительно использования предложенных искусственных граничных условий. Обсуждаемые граничные условия имеют различную ценность для практического использования, поэтому их разумную комбинацию следует выбирать, учитывая специфику конкретной постановки.

Граничные условия первого порядка очень просты и надежны, поэтому могут служить основой для проведения начальных экспериментов. Однако они требуют избыточного количества вычислений, чего следует избегать при больших сериях расчетов.

Граничные условия третьего порядка точности весьма экономны, но практически не применимы для задач размерности два и более по пространственным переменным. Это связано с тем, что в многомерных постановках определить аналитически частоту колебаний лагранжевых частиц представляется маловероятным ввиду сложности задачи (см., например, [13]).

Вышесказанное означает, что в первую очередь рекомендуемыми являются условия второго порядка точности (19). Полезным дополнением к ним могут быть условия вида (21). Оба вида условий легко реализуемы, несложно обобщаются на пространственно многомерные задачи, а также приводят к значительному сокращению малозначимых вычислений за счет уменьшения расчетной области. Кроме того, граничные условия (19) и (21) являются неотражающими в обе стороны, т.е. не препятствуют переносу возмущений при изменении знака у коэффициента переноса (функции  $V(x, t)$ ). Ниже будет показано применение искусственных граничных условий для численного моделирования двумерных релятивистских электронных колебаний в плазме, причем будут задействованы условия (18), (19) и (21).

**4. Постановка общей задачи.** Будем считать плазму холодной, идеальной, релятивистской электронной жидкостью, пренебрегая столкновительными и рекомбинационными эффектами, а также движением ионов. Тогда систему уравнений гидродинамики совместно с уравнениями Максвелла можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{p} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (22)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m \gamma}, \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2 c^2}}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -4 \pi e n \mathbf{v} + c \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (24)$$

где  $e, m$  — заряд и масса электрона (здесь заряд электрона имеет отрицательный знак:  $e < 0$ );  $c$  — скорость света;  $n, \mathbf{p}, \mathbf{v}$  — концентрация (плотность), импульс и скорость электронов;  $\gamma$  — лоренцевский фактор;  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  — векторы электрического и магнитного полей.

В данном случае рассматривается простейшая модель бесстолкновительной плазмы, для которой справедливо так называемое квазигидродинамическое описание, приведенное выше и называемое в литературе просто гидродинамическим. Это приближение хорошо известно и достаточно подробно описано в учебниках и монографиях (см., например, [14–17]).

Представляет интерес поведение решения задачи Коши для системы (22)–(24) в неограниченной области  $\{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0\}$ , поэтому будем считать, что заданы подходящие начальные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{x}, t = 0) &= \mathbf{p}^0(\mathbf{x}), & n(\mathbf{x}, t = 0) &= n^0(\mathbf{x}), \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t = 0) &= \mathbf{E}^0(\mathbf{x}), & \mathbf{B}(\mathbf{x}, t = 0) &= \mathbf{B}^0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (25)$$

Термин “подходящие” в данном случае означает, что они не противоречат уравнениям Максвелла и/или их следствиям, например

$$\operatorname{div} \mathbf{B}^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}^0(\mathbf{x}) = 4 \pi (n^0(\mathbf{x}) - n_i^0(\mathbf{x})),$$

где  $n_i^0(\mathbf{x})$  — начальное распределение плотности ионов в плазме, а также имеют подходящую асимптотику убывания на бесконечности.

Если начальные условия (25) обладают некоторой спецификой, то уравнение (22) можно преобразовать к более удобному виду. Имеет место утверждение.

**Утверждение.** Пусть задача Коши (22)–(25) имеет достаточно гладкое (дважды непрерывно дифференцируемое по всем независимым переменным и ограниченное вместе с указанными производными) решение, имеющее подходящую асимптотику убывания на бесконечности, и начальные функции  $\mathbf{B}^0(\mathbf{x}), \mathbf{p}^0(\mathbf{x})$  связаны соотношением

$$\mathbf{B}^0(\mathbf{x}) + \frac{c}{e} \operatorname{rot} \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) = 0. \quad (26)$$

Тогда уравнение (22) может быть представлено в следующей форме:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = e \mathbf{E} - m c^2 \nabla \gamma. \quad (27)$$

**Доказательство.** Если функции  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\gamma$  связаны алгебраическими соотношениями (23):  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma}$ ,  $\gamma = \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2 c^2}}$ , то непосредственной проверкой устанавливается справедливость равенства

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{p} = m c^2 \nabla\gamma - [\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{p}]. \quad (28)$$

После подстановки (28) в уравнение (22) получим

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = e \mathbf{E} - m c^2 \nabla\gamma + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{A}], \quad (29)$$

где использовано обозначение для вспомогательного векторного поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \frac{c}{e} \text{rot } \mathbf{p}. \quad (30)$$

Покажем, что при условии (26) поле  $\mathbf{A}$  тождественно равно нулю в произвольный момент времени. Применим к векторному уравнению (29) операцию  $\text{rot}$  и исключим из полученного соотношения  $\text{rot } \mathbf{E}$ , воспользовавшись уравнением Максвелла (24). В результате получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{A}]. \quad (31)$$

Из уравнения (31) следует, что соленоидальное векторное поле  $\mathbf{A}$  (равенство  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  является следствием (30)) “вморожено” в плазму аналогично магнитному полю. Это означает, что если зафиксировать некоторый контур  $L$  и взять произвольную поверхность  $S$ , опирающуюся на этот контур, то для потока  $\Psi_L = \iint_S (\mathbf{A}\mathbf{n}) dS$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности  $S$ , обычным образом (см., например, [18],

с. 131–132) выводится уравнение  $\frac{\partial \Psi_L}{\partial t} = 0$ . Из этого уравнения следует, что поток векторного поля  $\mathbf{A}$  в контуре  $L$  сохраняется при его движении:  $\Psi_L \equiv \text{const}$ .

Заметим, что подходящая асимптотика убывания функций на бесконечности требуется исключительно для конечности используемых интегралов и справедливости интегрирования по частям.

Вспоминая начальное условие (26):  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t = 0) \equiv \mathbf{A}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^0(\mathbf{x}) + \frac{c}{e} \text{rot } \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) = 0$ , делаем вывод, что для произвольного контура  $L$  справедливо равенство  $\Psi_L = 0$ , т.е. само векторное поле  $\mathbf{A}$  в каждый момент времени тождественно равно нулю. Утверждение доказано.

**Замечание.** Из доказанного утверждения следует, что при начальном условии (26) для достаточно гладкого решения системы (22)–(24) справедливо равенство

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) + \frac{c}{e} \text{rot } \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (32)$$

Для стационарных нерелятивистских уравнений это соотношение хорошо известно (см., например, [19, 20]) и связывается, в первую очередь, с безвихревым движением плазмы. Для нестационарных релятивистских уравнений соотношение (32), видимо, впервые появилось в работе [21] и названо “закон сохранения обобщенного вихря”. Настоящая работа не претендует на новизну в плане какого-либо физического смысла известных уравнений (22)–(24). Приведенное утверждение преследует практическую цель — несколько упростить исходные уравнения для аналитического и численного исследования в конкретном рассматриваемом случае плазменных колебаний, порождаемых начальными условиями в виде градиента некоторой функции.

Сформулируем постановку задачи о плоских двумерных релятивистских электронных колебаниях в ограниченной области, опираясь на преобразованное уравнение (27) и на исходные уравнения (23), (24).

Рассмотрим базовые уравнения в предположении, что решение определяется только  $x$ - и  $y$ -компонентами вектор-функций  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $z$ -компонентой вектор-функции  $\mathbf{B}$  и отсутствует зависимость от переменной  $z$ . Тогда двумерные скалярные уравнения в эйлеровых переменных можно записать в следующем безразмерном виде [13, 22, 23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial \theta} + E_x + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (P_x^2 + P_y^2) &= 0, & \frac{\partial P_y}{\partial \theta} + E_y + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial y} (P_x^2 + P_y^2) &= 0, \\ \gamma = \sqrt{1 + P_x^2 + P_y^2}, & \frac{\partial E_x}{\partial \theta} = N \frac{P_x}{\gamma} + \frac{\partial B_z}{\partial y}, & \frac{\partial E_y}{\partial \theta} = N \frac{P_y}{\gamma} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, & (33) \\ N = 1 - \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right), & \frac{\partial B_z}{\partial \theta} = - \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Основой для обезразмеривания переменных кроме указанных выше констант служат:  $n_0$  — значение невозмущенной электронной плотности и  $\omega_p = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m}\right)^{1/2}$  — плазменная частота. В частности, используются обозначения для переменных:  $\theta = \omega_p t$ ,  $x = \frac{\omega_p}{c} x_1$ ,  $y = \frac{\omega_p}{c} x_2$ ,  $N = \frac{n}{n_0}$ . Безразмерные компоненты электрического поля  $(E_x, E_y)$ , импульса  $(P_x, P_y)$  и магнитного поля  $B_z$  обозначаются прежними символами, чтобы сохранить смысловую преемственность с исходными уравнениями.

Начальные условия при  $\theta = 0$  определим как

$$\begin{aligned} E_x &= \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 x \exp^2 \left\{ -\frac{x^2 + \alpha y^2}{\rho_*^2} \right\}, & P_x &= P_y = 0, \\ E_y &= \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \alpha y \exp^2 \left\{ -\frac{x^2 + \alpha y^2}{\rho_*^2} \right\}, & B_z &= 0, \end{aligned} \tag{34}$$

где параметр  $\alpha$  определяет свойства симметрии рассматриваемой задачи. При  $\alpha = 1$  решение обладает аксиальной симметрией, т.е. все искомые функции зависят только от величин  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $\theta$ . В частности, это моделирует ситуацию, когда кильватерная волна инициируется коротким лазерным импульсом, имеющим круговое поперечное сечение. При  $\alpha = 1 + \Delta$ ,  $\Delta \neq 0$ , количество осей симметрии у решения становится меньше: не более двух (с учетом четности/нечетности), что соответствует форме эллипса для поперечного сечения инициирующего лазерного импульса. Отметим, что начальное электрическое поле в (34) является безвихревым, т.е. представимо в виде градиента функции, моделирующей пространственное распределение интенсивности лазерного импульса.

**5. Численное моделирование эффекта опрокидывания.** Обратим внимание, что рассматриваемая задача об опрокидывании колебаний (33), (34) является достаточно сложной с вычислительной точки зрения. Во-первых, при гидродинамическом описании в эйлеровых координатах при приближении к моменту опрокидывания в окрестности точек сингулярности возникают очень большие значения электронной плотности. Во-вторых, само значение координаты по времени разрушения колебаний весьма чувствительно к входным данным: в слабонелинейном приближении оно обратно пропорционально третьей степени (кубу!) начальной амплитуды. Это означает, что определение физических параметров вычислительно доступного варианта уже является непростой задачей. В-третьих, радиальная (в аксиально-симметричном случае) координата опрокидывания в умеренно нелинейном режиме, т.е. даже когда возмущение электронной плотности всего лишь на порядок превосходит фоновое значение, составляет порядка 1–2% от характерного размера расчетной области. Другими словами, с целью адекватного отображения процесса требуются по порядку тысячи точек по каждой пространственной координате даже при условии гладкости и ограниченности искомых функций вплоть до момента опрокидывания.

Учитывая вышесказанное, для расчета плоских двухмерных релятивистских электронных колебаний в холодной плазме была сконструирована специальная разностная схема на разнесенных по пространству сетках. Ее описанию и тестированию при последовательной и параллельной реализациях посвящены специальные публикации [22, 23], поэтому в целях экономии места сами расчетные формулы в настоящей работе не приводятся. Однако следует отметить, что используемая схема имеет на гладких решениях второй порядок аппроксимации как по пространственным переменным, так и по времени. При этом пространственная аппроксимация достигается за счет разнесенных сеток, а временная — за счет вычислительного приема типа предиктор–корректор. Важно, что схема допускает реализацию по явным формулам, а ее условие устойчивости, следующее из принципа замороженных коэффициентов, имеет асимптотику условия Куранта, т.е.  $\tau = O\left(\sqrt{h_x^2 + h_y^2}\right)$ . Здесь использованы обычные обозначения для шагов по пространственным переменным и времени.

Необходимость использования мелких расчетных сеток для моделирования опрокидывания

$$h_x M_x = h_y M_y = 2d, \quad M_x, M_y \approx 10^3 \div 10^4$$

в сочетании с явной конструкцией расчетной схемы приводит к необходимости использования колоссальных вычислительных ресурсов, доступных в настоящее время только в рамках современных высокопроизводительных вычислительных кластеров. В подавляющем большинстве подобных систем реализована гибридная параллельная архитектура, которая подразумевает объединение посредством высокопроизводительного канала множества многоядерных узлов с распределенной памятью. Данные обстоятельства определили необходимость написания гибридной параллельной версии программы. При этом тот факт, что используемая схема является явной, а структура расчетной сетки регулярна, позволил без существен-

ного изменения последовательного варианта программы [22] реализовать эффективный параллельный код [23].

**5.1. Реализация искусственных граничных условий.** Чтобы не загромождать изложение, опустим подробное описание используемой разностной схемы на сдвинутых сетках. Тем более что в указанных выше работах [22, 23] приведены удобные для программирования формулы.

В численных расчетах искомые функции  $N, E_x, E_y, P_x, P_y, B_z$  отыскиваются в ограниченной области определения  $\Omega = \{|x| \leq d, |y| \leq d, 0 \leq \theta \leq t_{wb}\}$ , причем значение  $t_{wb}$  заранее не известно, так как оно совпадает с моментом опрокидывания колебаний и тоже является искомой величиной.

Приведем описание расчетных граничных условий только на одной из четырех частей границы; зафиксируем ее для определенности:  $x = d, -d \leq y \leq d, d = 2.0\rho_*$ .

В терминах дифференциальной постановки задачи набор искусственных граничных условий имеет следующий вид:

$$\frac{\partial P_x}{\partial \theta} + E_x = 0, \quad P_y = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial \theta} = \frac{P_x N}{\gamma} + \frac{\partial B_z}{\partial y}, \quad E_y = 0,$$

т.е. для  $P_x$  используется “усеченное” до линейных членов уравнение, касательные компоненты вектор-функций — просто обнуляются, а для  $E_x$  применяется подход, основанный на “ухудшении” аппроксимации. На остальных участках границы условия формируются аналогичным образом.

Напомним, что в качестве основы для дискретизации по времени применяется обычная схема с перешагиванием. Пусть  $\tau$  — шаг по времени, тогда к “целым” моментам времени  $\theta_j = j\tau$  ( $j \geq 0$  — целое) относятся величины  $\mathbf{E} = (EX, EY, 0)$  и  $N$ , а к “полуцелым”  $\theta_{j \pm 1/2} - \mathbf{B} = (0, 0, B)$  и  $\mathbf{P} = (PX, PY, 0)$ . Выбор соответствующего момента времени для значения функции будем обозначать верхним индексом. Начиная отсюда, в тексте несколько изменены обозначения искомого функций, чтобы освободить место для нижних индексов.

Для дискретизации по пространству используются так называемые смещенные сетки, т.е. для численного решения двумерных уравнений функции  $N, EX$  и  $PX, EY$  и  $PY, B$  определяются на собственных конечных множествах узлов. Результат дискретизации по пространству обозначается нижними индексами.

Так как применяемая разностная схема является явной, то считаем, что на начало временного шага на специфицированных сетках нам известны величины:  $PX_{k,l}^{j-1/2}, PY_{k,l}^{j-1/2}, B_{k,l}^{j-1/2}, EX_{k,l}^j, EY_{k,l}^j, N_{k,l}^j$ .

Опишем пошагово численную реализацию используемой комбинации искусственных граничных условий; в индексной форме обсуждаемая часть границы имеет вид  $k = M_x, -M_y \leq l \leq M_y$ .

*Шаг 1.* Сначала вычислим магнитное поле при следующих значения индексов:

$$\frac{B_{k,l}^{j+1/2} - B_{k,l}^{j-1/2}}{\tau} = - \left( \frac{EY_{k+1,l}^j - EY_{k,l}^j}{h_x} - \frac{EX_{k,l+1}^j - EX_{k,l}^j}{h_y} \right), \quad k = M_x - 1, \quad -M_y \leq l \leq M_y - 1.$$

Формулы для магнитного поля на границе не меняются по сравнению с формулами внутри области.

*Шаг 2.* Интегрируем “усеченные” уравнения для нормальной компоненты  $PX$  и обнуляем касательную компоненту  $PY$ :

$$\begin{aligned} \frac{PX_{k,l}^{j+1/2} - PX_{k,l}^{j-1/2}}{\tau} &= -EX_{k,l}^j \quad \text{при } k = M_x - 1, \quad -M_y + 1 \leq l \leq M_y - 1, \\ PY_{k,l}^{j+1/2} &= 0 \quad \text{при } k = M_x, \quad -M_y + 1 \leq l \leq M_y - 1, \end{aligned}$$

а затем, используя значения для проекций импульсов  $PX_{k,l}^{j+1/2}$  и  $PY_{k,l}^{j+1/2}$ , вычисляем функцию  $\gamma_{k,l}^{j+1/2}$  по формулам, которые не меняются по сравнению с формулами внутри области.

*Шаг 3.* Пересчитываем граничные значения для электрического поля по формулам

$$\begin{aligned} \frac{EX_{k,l}^{j+1} - EX_{k,l}^j}{\tau} &= \frac{PX_{k,l}^{j+1/2} N_{k,l}^j}{\gamma_{k,l}^{j+1/2}} + \frac{B_{k,l}^{j+1/2} - B_{k,l-1}^{j+1/2}}{h_y} \quad \text{при } k = M_x - 1, \quad -M_y + 1 \leq l \leq M_y - 1, \\ EY_{k,l}^{j+1} &= 0 \quad \text{при } k = M_x, \quad -M_y + 1 \leq l \leq M_y - 1. \end{aligned}$$

В формулах, применяемых для расчета во внутренних узлах области, используются более сложные выражения:  $\frac{1}{2}(N_{k,l}^j + N_{k+1,l}^j)$  вместо  $N_{k,l}^j$  и  $\frac{1}{2}(\gamma_{k,l}^{j+1/2} + \gamma_{k+1,l}^{j+1/2})$  вместо  $\gamma_{k,l}^{j+1/2}$  соответственно. Упрощенные

выражения в граничных узлах понижают формальный порядок аппроксимации, как это описано в разделе 3.4, зато узлы используемого шаблона не выходят за пределы расчетной области.

Следует отметить, что пересчет граничных значений осуществляется внутри каждого вычислительного шага непосредственно после определения соответствующих функций во внутренних точках области.

**5.2. Сценарий колебаний при нарушении аксиальной симметрии.** Построенные на основе асимптотического анализа искусственные граничные условия были применены для численного решения задачи (33), (34). Конкретный вариант начальных данных характеризуется параметрами  $a_* = 0.315$ ,  $\rho_* = 0.6$  и  $\alpha = 1.5$ .

Впервые расчет с такими параметрами был описан в работе [13]. В ней границу расчетной области задавала величина  $d = 4.5\rho_*$  и использовались условия полного затухания колебаний, если одна из координат  $x$  или  $y$  по модулю равнялась  $d$ . Шаги сетки выбирались постоянными:  $h_x = h_y = 1/3200$ ,  $\tau = 1/32000$ , расчет проводился на СКИФ МГУ “Чебышев”.

Сокращение расчетной области, произведенное за счет подбора описанной выше комбинации искусственных краевых условий, позволило воспроизвести полученный ранее результат вычислительного эксперимента на компьютере значительно меньшей производительности. В данном случае границу расчетной области задавала величина  $d = 2.0\rho_*$ , шаги сетки выбирались такими:  $h_x = h_y = 1/1500$ ,  $\tau = 1/3000$ .

Первоначальное качественное представление о процессе развития–разрушения колебаний можно получить из рис. 1, иллюстрирующего изменения во времени максимума электронной плотности по области  $\{(x, y) : |x| \leq d, |y| \leq d\}$  и значения электронной плотности в начале координат. Легко заметить, что отклонение от аксиальной симметрии принципиально влияет на динамику колебаний. Во-первых, максимумы электронной плотности, расположенные в начале координат, в каждом периоде сначала монотонно убывают, а затем стабилизируются на очень небольшой амплитуде, которая меньше первоначального максимума примерно в 5 раз. Во-вторых, глобальные по пространству максимумы электронной плотности совпадают во времени с локальными максимумами из начала координат; сначала они убывают, затем начинают монотонно возрастать. Отметим, что даже из малоинформативного рисунка 1 можно сделать вывод, что опрокидывание колебаний происходит на некотором расстоянии от центра области.

Рассмотрим первый период колебаний. На рис. 2 приведены линии уровня плотности электронов в начальный момент времени и через половину периода. Их эллиптическая форма приводит к существенному количественному отличию от регулярных колебаний, обладающих круговой симметрией.

Напомним, что в процессе развития аксиально-симметричных колебаний максимум электронной плотности, расположенный в центре области, появляется регулярно через период вплоть до опрокидывания, не изменяя своей формы. При нарушении аксиальной симметрии центральный максимум от периода к периоду меняется: его абсолютная величина уменьшается, но при этом, в силу закона сохранения заряда, он начинает “расплываться”, т.е. область возмущения электронной плотности начинает увеличиваться в размерах. Через несколько периодов колебаний такая картина становится отчетливой, однако следует отметить, что пока линии уровня функции электронной плотности остаются близкими к эллипсам. По причине зависимости частоты колебаний от амплитуды “расплывание” центрального максимума происходит неравномерно, поэтому в некоторый момент времени один максимум, локальный по времени и глобальный по пространству, трансформируется в два разнесенных по пространству максимума.

На рис. 3 приведены линии уровня электронной плотности, соответствующие моментам времени  $\theta \approx 15.1$  и  $\theta \approx 21.4$ . На одной из них — “расплывшийся” в пространстве максимум электронной плотности из начала координат, а на соседней — его раздвоение, причем амплитуды “близнецов” несколько меньше амплитуды их одного предшественника.

Далее, от периода к периоду, пара максимумов–“близнецов”, несколько удаляясь друг от друга, растет по абсолютной величине: на рис. 4 изображен момент времени  $\theta \approx 77.1$ , когда каждый из пары максимумов примерно в четыре раза превосходит значение самого первого центрального максимума. Для наглядности

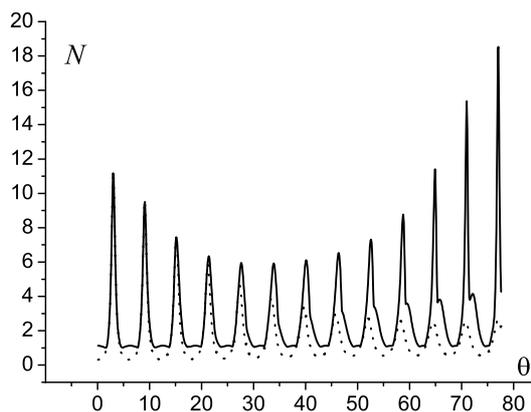


Рис. 1. Динамика плотности электронов: максимум по области (сплошная линия) и в начале координат (пунктирная линия)

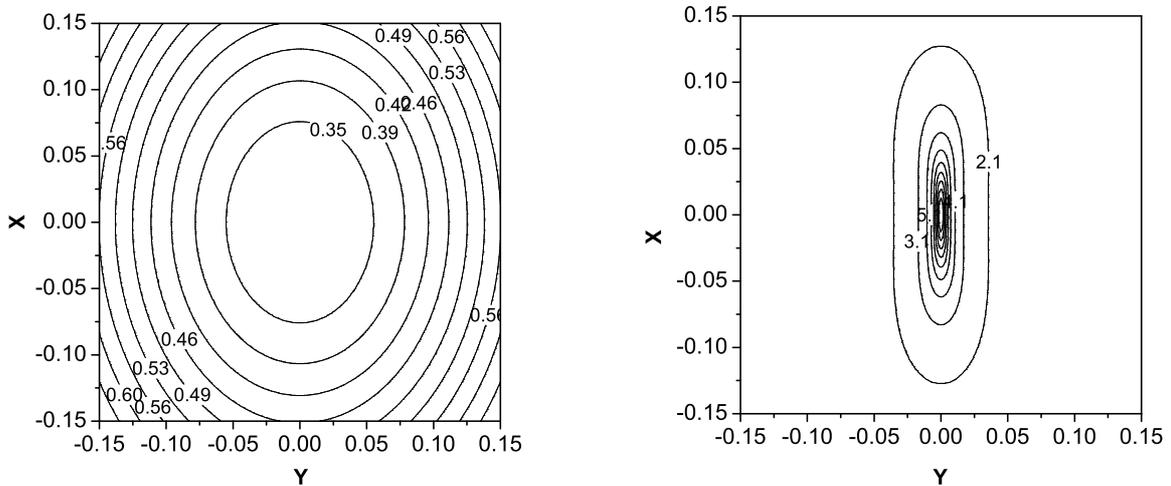


Рис. 2. Начало колебаний: линии уровня плотности электронов с интервалом в половину периода. Моменты времени соответствуют экстремальным значениям плотности в центре области

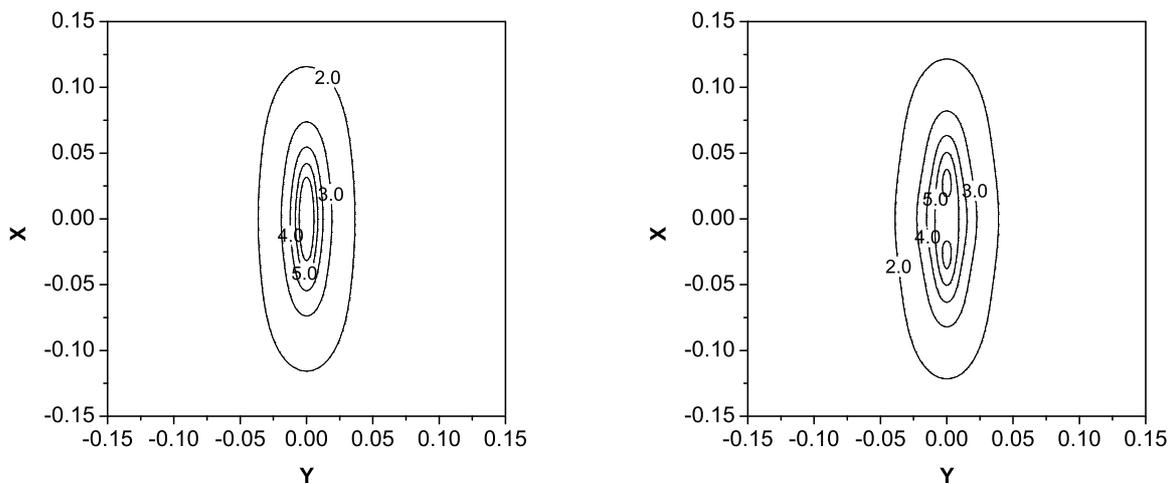


Рис. 3. Раздвоение центрального максимума плотности электронов: линии уровня с интервалом в период. Моменты времени соответствуют экстремальным значениям плотности

здесь приведены не только линии уровня, но и пространственная конфигурация функции электронной плотности. По прошествии нескольких периодов пространственные координаты пары максимумов стабилизируются, а рост их абсолютных значений продолжается.

Обратим внимание, что процесс раздвоения центрального максимума электронной плотности и его дальнейшее развитие являются следствием значимой асимметрии (эллиптичности) начальных данных, но никак не связаны с обычным эффектом опрокидывания релятивистских колебаний. В соответствии с асимптотическим анализом при  $\alpha > 1$  опрокидывание колебаний происходит в точках пространства, характеризующихся в полярных координатах углами  $\varphi_{wb}^1 = \pi/2$  и  $\varphi_{wb}^2 = 3\pi/2$ . На рис. 4, где обозначены линии уровня электронной плотности, уже появились потенциальные точки сингулярности при  $x = 0$ ,  $|y| \approx 0.04$ . Напомним, что эффект опрокидывания развивается стремительно: через один–два периода после появления первых нерегулярных максимумов плотности на их месте формируется разрыв функции электрического поля и соответствующее бесконечное значение электронной плотности. Расчет останавливается именно вследствие неограниченных значений электронной плотности в окрестности указанных

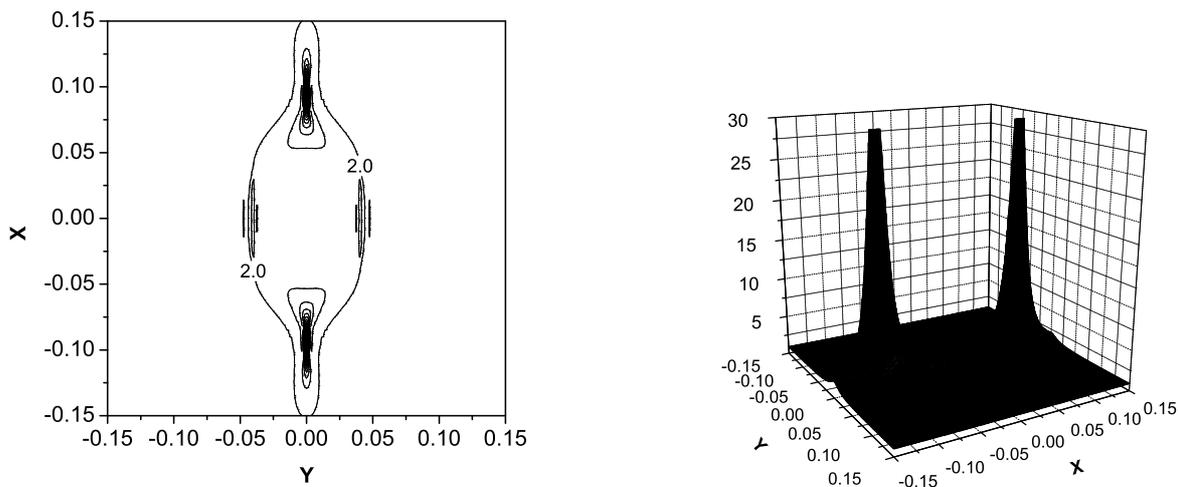


Рис. 4. Рост раздвоившегося максимума плотности электронов: линии уровня и пространственная конфигурация

точек.

Таким образом, на основании асимптотического анализа [13] и численного моделирования двумерных плоских колебаний можно сделать вывод, что процесс развития–разрушения аксиально-симметричных колебаний неустойчив по форме. Даже небольшие отклонения от круговой симметрии начальных возмущений качественно изменяют пространственно-временную структуру решения. Указанный вывод представляется важным, так как изучаемые колебания моделируют кильватерную плазменную волну, инициированную лазерным импульсом. В натуральных экспериментах лазерный импульс часто имеет форму, немного отличающуюся в сечениях от круговой. Поэтому волна, как правило, должна разрушаться с нарушением круговой симметрии, т.е. опрокидываться всего в двух точках несмотря на то, что интенсивность лазерного излучения может иметь пространственную зависимость, сколь угодно близкую к радиальной. Особенно следует обратить внимание, что при значительном отклонении от круговой симметрии центральный максимум электронной плотности, расплываясь в пространстве, превращается в два равновеликих максимума, отстоящих от центра на некотором расстоянии. Более того, эти медленно растущие максимумы плотности не связаны с релятивистским опрокидыванием колебаний, так как указанный эффект реализуется на оси с наибольшим изменением градиента начальной амплитуды.

**Заключение.** В настоящей статье на основе формул, аналитически описывающих решение модельной задачи в слабонелинейном приближении, предложено несколько видов искусственных граничных условий. Здесь представляется важным, что новой методической идеей, не имеющей аналога в монографии [1], является асимптотический анализ постановки задачи в лагранжевых переменных с целью вывода искусственных граничных условий для эквивалентной задачи в эйлеровых переменных. Эти условия имеют различную практическую (вычислительную) ценность, поэтому для расчета пространственно многомерных задач рекомендуется выбирать их подходящую комбинацию. Один из возможных вариантов набора граничных условий был численно реализован и использован для моделирования двумерного эффекта опрокидывания плазменных колебаний. Исходные гидродинамические уравнения допускают модификацию при определенной специфике начальных условий, что было учтено при конструировании разностных уравнений как внутри расчетной области, так и на ее границе. Основным результатом работы является существенное сокращение объема вычислений за счет применения новых граничных условий. Это привело к тому, что расчеты на СКИФ МГУ “Чебышев” оказалось возможным заменить расчетами на компьютере значительно меньшей производительности. Указанная возможность проведения серийных расчетов позволила уточнить представление о принципиальной связи бифуркации центрального максимума электронной плотности с нарушением круговой (аксиальной) симметрии. Результаты работы могут быть использованы как для теоретического построения искусственных граничных условий близких постановок задач и их дискретных аналогов, так и для численных экспериментов с целью исследования пространственных структур в решениях гидродинамических моделей плазмы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильгамов М.А., Гильманов А.Н. Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: Физматлит, 2003.
2. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973.
3. Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В., Андреев Н.Е. Опрокидывание нелинейных цилиндрических колебаний плазмы // Физика плазмы. 2010. **36**, № 4. 375–386.
4. Dawson J.M. Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // Phys. Review. 1959. **113**, N 2. 383–387.
5. Chizhonkov E.V., Frolov A.A., Gorbunov L.M. Modelling of relativistic cylindrical oscillations in plasma // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. 2008. **23**, N 5. 455–467.
6. Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В. О моделировании нерелятивистских цилиндрических колебаний в плазме // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**. 58–65.
7. Фролов А.А., Чижонков Е.В. О релятивистском опрокидывании электронных колебаний в плазменном слое // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 537–548.
8. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
10. Чижонков Е.В. К моделированию электронных колебаний в плазменном слое // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2011. **51**, № 3. 456–469.
11. Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. Численные методы. Решения задач и упражнения. 2-е изд., испр. и доп. Классический университетский учебник. М.: Лаборатория знаний, 2016.
12. Попов А.В., Чижонков Е.В. Об одной разностной схеме для расчета плазменных аксиально-симметричных колебаний // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 1–13.
13. Chizhonkov E.V., Frolov A.A., Milyutin S.V. On overturn of two-dimensional nonlinear plasma oscillations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2015. **30**, N 4. 213–226.
14. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978.
15. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
16. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971.
17. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. Изд. 2-е испр. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2012.
18. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
19. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970.
20. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1974. 3–87.
21. Абдуллаев А.Ш., Алиев Ю.М., Фролов А.А. Генерация квазистатических магнитных полей сильным циркулярно поляризованным электромагнитным излучением в релятивистской магнитоактивной плазме // Физика плазмы. 1986. **12**, № 7. 827–835.
22. Chizhonkov E.V., Frolov A.A. Numerical simulation of the breaking effect in nonlinear axially-symmetric plasma oscillations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2011. **26**, N 4. 379–396.
23. Милютин С.В., Фролов А.А., Чижонков Е.В. Пространственное моделирование опрокидывания нелинейных плазменных колебаний // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 295–305.

Поступила в редакцию  
10.01.2017

---

### Artificial Boundary Conditions for Numerical Modeling of Electron Oscillations in Plasma

E. V. Chizhonkov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics;  
Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su*

Received January 10, 2017

**Abstract:** The behavior of the functions describing the relativistic breaking effect of plane one-dimensional electron plasma oscillations is studied by asymptotic methods. The obtained formulas generate various forms of artificial boundary conditions which analyzed by numerical experiments. A special combination of the proposed

boundary conditions is used to simulate the breaking effect in the spatially two-dimensional case. A part of computation was performed on the “Chebyshev” Moscow University supercomputer system.

**Keywords:** numerical modeling, plasma oscillations, breaking effect, artificial boundary conditions.

### References

1. M. A. Il'gamov and A. N. Gil'manov, *Nonreflecting Conditions at Boundaries of the Calculation Region* (Fizmatlit, Moscow, 2003) [in Russian].
2. Ya. B. Zel'dovich and A. D. Myshkis, *Elements of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
3. L. M. Gorbunov, A. A. Frolov, E. V. Chizhonkov, and N. E. Andreev, “Breaking of Nonlinear Cylindrical Plasma Oscillations,” *Fiz. Plazmy* **36** (4), 375–386 (2010) [*Plasma Phys. Rep.* **36** (4), 345–356 (2010)].
4. J. M. Dawson, “Nonlinear Electron Oscillations in a Cold Plasma,” *Phys. Rev.* **113** (2), 383–387 (1959).
5. E. V. Chizhonkov, A. A. Frolov, and L. M. Gorbunov, “Modelling of Relativistic Cylindrical Oscillations in Plasma,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **23** (5), 455–467 (2008).
6. L. M. Gorbunov, A. A. Frolov, and E. V. Chizhonkov, “On Modeling of Nonrelativistic Cylindrical Oscillations in Plasma,” *Vychisl. Metody Programm.* **9**, 58–65 (2008).
7. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, “Relativistic Breaking Effect of Electron Oscillations in a Plasma Slab,” *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 537–548 (2014).
8. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Janenko, *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1978; Am. Math. Soc., Providence, 1983).
9. N. N. Bogolyubov and Y. A. Mitropol'sky, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations* (Nauka, Moscow, 1974; Gordon and Breach, New York, 1961).
10. E. V. Chizhonkov, “To the Question of Large-Amplitude Electron Oscillations in a Plasma Slab,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **51** (3), 456–469 (2011) [*Comput. Math. Math. Phys.* **51** (3), 423–434 (2011)].
11. N. S. Bakhvalov, A. A. Kornev, and E. V. Chizhonkov, *Numerical Methods. Problems and Exercises with Solutions* (Laboratory of Knowledge, Moscow, 2016) [in Russian].
12. A. V. Popov and E. V. Chizhonkov, “A Finite-Difference Scheme for Computing Axisymmetric Plasma Oscillations,” *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 1–13 (2012).
13. E. V. Chizhonkov, A. A. Frolov, and S. V. Milyutin, “On Overtake of Two-Dimensional Nonlinear Plasma Oscillations,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **30** (4), 213–226 (2015).
14. A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1978; Springer, Heidelberg, 1984).
15. V. L. Ginzburg and A. A. Rukhadze, *Waves in Magnetoactive Plasma* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].
16. V. P. Silin, *Introduction to the Kinetic Theory of Gases* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].
17. V. P. Silin and A. A. Rukhadze, *Electromagnetic Properties of Plasma and Plasma-like Media* (Librokom, Moscow, 2012; Gordon and Breach, New York, 1965).
18. Yu. N. Dnestrovskii and D. P. Kostomarov, *Numerical Simulation of Plasmas* (Nauka, Moscow, 1982; Springer, Berlin, 1986).
19. A. B. Vatazhin, G. A. Lyubimov, and S. A. Regirer, *Magnetohydrodynamic Flows in Channels* (Nauka, Moscow, 1970) [in Russian].
20. A. I. Morozov and L. S. Solov'ev, “Steady-State Plasma Flow in a Magnetic Field,” in *Reviews of Plasma Physics* (Springer, New York, 1980), Vol. 8, pp. 1–102.
21. A. Sh. Abdullaev, Yu. M. Aliev, and A. A. Frolov, “Generation of Quasi-Static Magnetic Fields by Strong Circularly Polarized Electromagnetic Radiation in a Relativistic Magnetoactive Plasma,” *Fiz. Plazmy* **12** (7), 827–835 (1986).
22. E. V. Chizhonkov and A. A. Frolov, “Numerical Simulation of the Breaking Effect in Nonlinear Axially-Symmetric Plasma Oscillations,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **26** (4), 379–396 (2011).
23. S. V. Milyutin, A. A. Frolov, and E. V. Chizhonkov, “Spatial Modeling of Breaking Effects in Nonlinear Plasma Oscillations,” *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 295–305 (2013).