

УДК 519.633

doi 10.26089/NumMet.v18r104

ОБ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ВЯЗКОСТИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ РЕШЕТОЧНЫХ СХЕМ БОЛЬЦМАНА

Г. В. Кривовичев¹, Е. А. Прохорова²

Рассматриваются свойства параметрических решеточных схем Больцмана. С использованием метода Чепмена–Энскога из дифференциального приближения схем получена система уравнений относительно гидродинамических переменных и выведено выражение для аппроксимационной вязкости. Показано, что существует численная вязкость, которую необходимо учитывать при проведении расчетов. Необходимые условия устойчивости получены из условия неотрицательности выражения для аппроксимационной вязкости. При решении тестовой задачи о течении в каверне с подвижной крышкой показано, что возможно проведение расчетов по параметрическим схемам в случаях, когда неприменимо обычное решеточное уравнение Больцмана.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, аппроксимационная вязкость, устойчивость.

1. Введение. В последние годы метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, далее метод LBM) все чаще используется при моделировании течений жидкостей и газов в различных условиях [1–3]. В большинстве работ при численных расчетах с применением этого метода используется явная двухслойная схема (так называемое решеточное уравнение Больцмана, lattice Boltzmann equation, далее LBE), получаемая посредством дискретизации исходной системы кинетических уравнений вдоль своих характеристик с использованием интегро-интерполяционного метода [4, 5]. Известно, что схема является условно устойчивой по начальным условиям и имеет первый порядок точности (посредством специальной замены искоемых переменных порядок можно сделать равным двум) [5, 6], из-за чего возможности ее применения ограничены. В связи с этим, в данной области исследований становятся актуальными исследования других разностных схем, в том числе и неявных.

Настоящая статья посвящена исследованию однопараметрических решеточных уравнений Больцмана, предложенных в [7]. С использованием метода Чепмена–Энскога авторами получена система уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости с коэффициентом вязкости, зависящим от параметров схем. На основе анализа выражения для этого коэффициента получены необходимые условия устойчивости решений параметрических LBE в виде неравенств на значения параметров. С учетом выполнения полученных условий произведено численное решение задачи о каверне при различных числах Рейнольдса.

2. Однопараметрические семейства LBE. Система дискретных по скоростям кинетических уравнений, применяемая в методе LBM, имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\lambda} (f_i - f_i^{(eq)}), \tag{1}$$

где $f_i = f_i(t, \mathbf{r})$ — функции распределения частиц со скоростями $\mathbf{V}_i = V \mathbf{e}_i$, $V = l/\delta t$; l — модельная средняя длина свободного пробега; δt — модельное среднее время свободного пробега; \mathbf{e}_i — известные векторы, задающие шаблон в пространстве скоростей; t — время; \mathbf{r} — вектор пространственных переменных; λ — время релаксации; $f_i^{(eq)}$ — приближенные равновесные функции распределения.

Плотность ρ и скорость \mathbf{u} характеризуют среду и вычисляются через значения f_i следующим образом:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^9 f_i(t, \mathbf{r}), \quad \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^9 \mathbf{V}_i f_i(t, \mathbf{r}). \tag{2}$$

Функции $f_i^{(eq)}$ аппроксимируют распределения Максвелла и задаются выражением

$$f_i^{(eq)} = W_i \rho \left(1 + 3 \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})}{V^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})^2}{V^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{V^2} \right), \tag{3}$$

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский пр., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург; доцент, e-mail: g.krivovichev@spbu.ru

² Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский пр., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург; студент, e-mail: proxliza@mail.ru

где W_i — известные числа, зависящие от используемого набора скоростей \mathbf{V}_i .

В силу зависимостей (2) и (3) система (1) является квазилинейной. В статье будет рассматриваться только случай плоских течений. При этом для моделирования слабосжимаемых сред достаточно использовать набор скоростей D2Q9, определяемый таким образом: $\mathbf{e}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 1)$, $\mathbf{e}_4 = (-1, 0)$, $\mathbf{e}_5 = (0, -1)$, $\mathbf{e}_6 = (1, 1)$, $\mathbf{e}_7 = (-1, 1)$, $\mathbf{e}_8 = (-1, -1)$, $\mathbf{e}_9 = (1, -1)$.

Интегральная форма системы (1) может быть получена посредством интегрирования вдоль характеристик в фазовом пространстве:

$$f_i(t + \delta t, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \delta t) - f_i(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\delta t} \left(f_i(t + \xi, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \xi) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t + \xi, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \xi)) \right) d\xi, \quad (4)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_9)$.

Посредством элементарных арифметических операций в правую часть (4) можно ввести слагаемое

$$\frac{\sigma}{\lambda} \int_0^{\delta t} \left(f_i(t + \xi, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \xi) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t + \xi, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \xi)) \right) d\xi,$$

где $\sigma \in [0, 1]$ — безразмерный параметр. В результате получается система уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} f_i(t + \delta t, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \delta t) - f_i(t, \mathbf{r}) = & -\frac{1 - \sigma}{\lambda} \int_0^{\delta t} \left(f_i(t + \xi, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \xi) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t + \xi, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \xi)) \right) d\xi - \\ & - \frac{\sigma}{\lambda} \int_0^{\delta t} \left(f_i(t + \xi, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \xi) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t + \xi, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \xi)) \right) d\xi. \end{aligned}$$

Аппроксимируя входящие в нее интегральные слагаемые с помощью различных квадратурных формул, можно построить семейства разностных уравнений, зависящие от σ . В [7] для этой цели были использованы формулы низких порядков — левых и правых прямоугольников и трапеций.

В результате были получены шесть семейств, которые можно представить в форме

$$\begin{aligned} f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = & A \left(f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})) \right) + \\ & + B \left(f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t)) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $A = A(\sigma, \tau)$, $B = B(\sigma, \tau)$ и $\tau = \lambda/\delta t$ — безразмерное время релаксации.

Семейства ЛВЕ-уравнений определяются следующим образом [7]:

1) $A = -(1 - \sigma)/\tau$, $B = -\sigma/\tau$, получается при применении формул левых и правых прямоугольников;
 2) $A = -\sigma/\tau$, $B = -(1 - \sigma)/\tau$, получается при применении формул правых и левых прямоугольников;
 3) $A = -(1 - \sigma)/2\tau$, $B = -(1 + \sigma)/2\tau$, получается при применении формул левых прямоугольников и трапеций;

4) $A = -(1 + \sigma)/2\tau$, $B = -(1 - \sigma)/2\tau$, получается при применении формул трапеций и левых прямоугольников;

5) $A = -\sigma/2\tau$, $B = (\sigma - 2)/2\tau$, получается при применении формул правых прямоугольников и трапеций;

6) $A = (\sigma - 2)/2\tau$, $B = -\sigma/2\tau$, получается при применении формул трапеций и правых прямоугольников.

Из полученных семейств при единственном значении параметра (своем для каждого) можно получить явную схему, применяемую в подавляющем большинстве работ:

$$f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = -\frac{1}{\tau} \left(f_i(t, \mathbf{r}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})) \right). \quad (6)$$

В общем же случае схемы из семейства (5) являются неявными.

Для проведения численных расчетов течений с определенными числами Рейнольдса и временами релаксации необходимо получить выражение для аппроксимационной вязкости — в применении к ЛВЕ

это коэффициент, зависящий от параметров σ и τ , значений l и δt , имеющий размерность коэффициента кинематической вязкости и используемый в системе уравнений гидродинамики, полученной из дифференциального приближения ЛВЕ с помощью метода Чепмена–Энскога [1]. По сути, именно с такой вязкостью производится расчет с помощью метода ЛВМ. Выражение для аппроксимационной вязкости схемы (6) имеет вид [1]

$$\nu = \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{l^2}{3\delta t}. \quad (7)$$

3. Аппроксимационная вязкость. Выражение для аппроксимационной вязкости системы (5) получим при выводе системы уравнений относительно макроскопических функций ρ и \mathbf{u} с использованием метода Чепмена–Энскога [8, 9]. Метод основан на асимптотическом разложении функций распределения по малому параметру, в качестве которого выступает число Кнудсена $\varepsilon = l/L$, где L — характерный линейный размер области, в которой происходит течение (гидродинамическому приближению соответствует случай $\varepsilon \ll 1$), и на использовании *мультимасштабных* представлений производных по независимым переменным. В случае рассмотрения ЛВЕ метод Чепмена–Энскога применяется к их дифференциальным приближениям.

Для удобства и компактности дальнейших выкладок введем обозначения: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $V_{i1} = V_{ix}$, $V_{i2} = V_{iy}$. Предположим, что $f_i \in C^3((0, +\infty) \times \mathbf{R}^2)$. Представляя значения f_i в окрестности точки (t, \mathbf{r}) по формуле Тейлора, получим

$$\begin{aligned} f_i(t + \delta t, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \delta t) = & f_i(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial f_i(t, \mathbf{r})}{\partial t} \delta t + \frac{\partial f_i(t, \mathbf{r})}{\partial x_\alpha} V_{i\alpha} \delta t + \frac{(\delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f_i(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} + \\ & + \frac{(\delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f_i(t, \mathbf{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} V_{i\alpha} V_{i\beta} + (\delta t)^2 \frac{\partial^2 f_i(t, \mathbf{r})}{\partial t \partial x_\alpha} V_{i\alpha} + o(\delta t^2), \end{aligned} \quad (8)$$

где для компактности записи используется правило суммирования Эйнштейна по повторяющимся греческим индексам.

Выпишем асимптотическое представление для функций f_i :

$$f_i \approx f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)}, \quad (9)$$

где $f_i^{(0)} = f_i^{(eq)}$, а для первого и второго приближений справедливо [9]

$$\sum_{i=1}^n f_i^{(1)} = \sum_{i=1}^n f_i^{(2)} = 0, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n f_i^{(1)} \mathbf{V}_i = \sum_{i=1}^n f_i^{(2)} \mathbf{V}_i = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Здесь $n = 9$ для случая шаблона D2Q9.

Используем для производных по независимым переменным мультимасштабные представления [9]

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}}, \quad (12)$$

где t_1, t_2, x_{11}, x_{12} — новые переменные.

Подставляя (9) и (12) в (8), получим с точностью до членов порядков $o(\varepsilon^2)$ и $o(\delta t^2)$:

$$\begin{aligned} f_i(t + \delta t, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \delta t) = & f_i^{(0)}(t, \mathbf{r}) + \varepsilon f_i^{(1)}(t, \mathbf{r}) + \varepsilon^2 f_i^{(2)}(t, \mathbf{r}) + \varepsilon \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_1}(t, \mathbf{r}) \delta t + \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_2}(t, \mathbf{r}) \delta t + \varepsilon^2 \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t_1}(t, \mathbf{r}) \delta t + \varepsilon \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x_{1\alpha}}(t, \mathbf{r}) V_{i\alpha} \delta t + \varepsilon^2 \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_{1\alpha}}(t, \mathbf{r}) V_{i\alpha} \delta t + \\ & + \frac{(\delta t)^2}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial t_1^2}(t, \mathbf{r}) + \frac{(\delta t)^2}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial x_{1\alpha} \partial x_{1\beta}}(t, \mathbf{r}) V_{i\alpha} V_{i\beta} + \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial t_1 \partial x_{1\alpha}}(t, \mathbf{r}) (\delta t)^2 V_{i\alpha}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (9) и (13) в (5), получим для дифференциального приближения (5):

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_1} \delta t + \varepsilon^2 \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_2} \delta t + \varepsilon^2 \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t_1} \delta t + \varepsilon \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x_{1\alpha}} V_{i\alpha} \delta t + \varepsilon^2 \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_{1\alpha}} V_{i\alpha} \delta t + \\ & + \frac{(\delta t)^2}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial t_1^2} + \frac{(\delta t)^2}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial x_{1\alpha} \partial x_{1\beta}} V_{i\alpha} V_{i\beta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial t_1 \partial x_{1\alpha}} (\delta t)^2 V_{i\alpha} = \\ & = A \left(\varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} \right) + B \left(\varepsilon f_i^{(1)}(t, \mathbf{r}) + \varepsilon^2 f_i^{(2)} + \varepsilon^2 \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t_1} \delta t + \varepsilon^2 \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_{1\alpha}} V_{i\alpha} \delta t \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Приравнявая в (14) члены при первой степени ε , получим для первого приближения:

$$\frac{A+B}{\delta t} f_i^{(1)} = \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_1} + V_{i\alpha} \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x_{1\alpha}}. \quad (15)$$

Приравнявая члены при ε^2 , получим:

$$\begin{aligned} & \delta t \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_2} + \delta t \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t_1} + \delta t V_{i\alpha} + \frac{(\delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial t_1 \partial x_{1\alpha}} V_{i\alpha} + \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial x_{1\alpha} \partial x_{1\beta}} V_{i\alpha} V_{i\beta} \right) = \\ & = (A+B) f_i^{(2)} + \delta t B \left(\frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t_1} + V_{i\alpha} \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_{1\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial t_1 \partial x_{1\alpha}} V_{i\alpha} + \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial x_{1\alpha} \partial x_{1\beta}} V_{i\alpha} V_{i\beta} = \\ & = \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_1} + V_{i\alpha} \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x_{1\alpha}} \right) + V_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} \left(\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_1} + V_{i\beta} \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x_{1\beta}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

В силу (15) из (17) получим

$$\frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial t_1 \partial x_{1\alpha}} V_{i\alpha} + \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial x_{1\alpha} \partial x_{1\beta}} V_{i\alpha} V_{i\beta} = \frac{(A+B)}{\delta t} \left(\frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t_1} + V_{i\alpha} \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_{1\alpha}} \right). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16), получим для $f_i^{(2)}$:

$$\frac{A+B}{\delta t} f_i^{(2)} = \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_2} + \left(1 + \frac{A-B}{2} \right) \left(\frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t_1} + V_{i\alpha} \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_{1\alpha}} \right). \quad (19)$$

Используя формулы для первых и вторых приближений (15) и (19), получим уравнения для макроскопических характеристик ρ и \mathbf{u} .

Суммируя (15) по i с учетом (2), (9)–(11), получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_{1\alpha}} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_2} = 0. \quad (21)$$

Умножая (20) на ε , а (21) — на ε^2 и суммируя с учетом (12), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) представляет собой не что иное, как гидродинамическое уравнение неразрывности.

Далее, из (15) и (19) получим уравнения движения — умножим (15) на $V_{i\alpha}$, просуммируем по i и получим при $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)} = \sum_{i=1}^n f_i^{(0)} V_{i\alpha} V_{i\beta}$:

$$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t_1} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial x_{1\beta}} = 0. \quad (23)$$

Как известно [8, 9], $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}$ представляются в виде

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(0)} = p\delta_{\alpha\beta} + \rho u_\alpha u_\beta, \quad (24)$$

где p — давление, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, и представляют собой компоненты тензора плотности потока импульса [10].

Умножая (19) на $V_{i\alpha}$ и суммируя по i , получим с учетом (11) при $\Pi_{\alpha\beta}^{(1)} = \sum_{i=1}^n f_i^{(1)} V_{i\alpha} V_{i\beta}$:

$$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t_2} + \left(1 + \frac{A-B}{2}\right) \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial x_{1\beta}} = 0. \quad (25)$$

Для компонент $\Pi_{\alpha\beta}^{(1)}$ в случае малых чисел Маха и шаблона D2Q9, согласно [8, с. 428], получим

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(1)} = -\delta t \tau \frac{V^2 \rho}{3} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_{1\alpha}} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_{1\beta}} \right). \quad (26)$$

Умножая (23) на ε , а (25) — на ε^2 и суммируя, получим

$$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial x_\beta} + \left(1 + \frac{A-B}{2}\right) \frac{\partial (\varepsilon \Pi_{\alpha\beta}^{(1)})}{\partial x_\beta} = 0. \quad (27)$$

Согласно (24) и (26), приходим к соотношениям

$$\frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial(\rho u_\alpha u_\beta)}{\partial x_\beta}, \quad \frac{\partial (\varepsilon \Pi_{\alpha\beta}^{(1)})}{\partial x_\beta} = -\delta t \tau \frac{V^2}{3} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\rho \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \right). \quad (28)$$

Подставив (28) в (27), получим уравнение движения

$$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\alpha u_\beta)}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\rho \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \right), \quad (29)$$

где коэффициент ν имеет размерность кинематической вязкости и задается следующим образом:

$$\nu = \left(1 + \frac{A-B}{2}\right) \frac{\tau}{3} \frac{l^2}{\delta t}. \quad (30)$$

Рассмотрим далее случай несжимаемой среды: $\rho \approx \text{const}$. В этом случае вместо уравнения (22) получим условие несжимаемости

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (31)$$

а из (29) получим уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \nu \Delta u_\alpha. \quad (32)$$

Как можно заметить, вычисляемый по (30) коэффициент ν стоит на месте коэффициента кинематической вязкости и, таким образом, представляет собой коэффициент аппроксимационной вязкости системы разностных уравнений (5).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть число Кнудсена $\varepsilon \ll 1$. Тогда из (5) в случае шаблона D2Q9 с использованием асимптотического представления (9) и мультимасштабных представлений (12) может быть получена система уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости (31)–(32) с выражением для аппроксимационной вязкости (30).

Замечание 1. Заметим, что структура правой части уравнения (29) совпадает с правой частью системы для макропеременных, получаемой для системы уравнений Бхатнагара–Гросса–Крука (см. [8]), для которой выражение для коэффициента кинематической вязкости в случае шаблона D2Q9 имеет вид

$$\nu = \frac{\tau l^2}{3\delta t}. \quad (33)$$

Как можно видеть, в общем случае формула (30) имеет нефизическую фиктивную добавку $(A-B)\tau l^2/(6\delta t)$, называемую численной вязкостью. Эта добавка отличает выражение для аппроксимационной вязкости от точного выражения (33) для кинематической вязкости. Таким образом, в случае $A \neq B$ при расчетах по схемам из (5) эта поправка должна учитываться. В случае $A = B$ формула (30) будет совпадать с (33) — это имеет место для случая следующей из (5) схемы, аппроксимирующей (1) со вторым порядком. Эта схема соответствует случаю $\sigma = 1/2$ для семейств 1 и 2, $\sigma = 0$ для семейств 3 и 4 и $\sigma = 1$ для семейств 5 и 6 [7].

Замечание 2. Формула (7) следует из (30) при значениях σ , которые соответствуют явной системе ЛВЕ-уравнений (6), получаемой для каждого семейства, задаваемого (5).

Система уравнений (22), (29), вообще говоря, отличается от системы уравнений динамики вязкого газа и, таким образом, является квазигидродинамической. Однако несложно показать, что в случае приближения слабо сжимаемой среды, справедливого при малых числах Маха (для моделирования которой и применяется ЛВМ в случае шаблонов с малым числом скоростей), слагаемыми, учитывающими эффекты сжимаемости, можно пренебречь в правой части уравнения (29).

Итак, предположим, что $|\partial\rho/\partial x_\alpha| \ll 1$. В этом случае, пренебрегая слагаемыми в (22) и (29), в которых эти величины выступают множителями, получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \rho u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \nu\rho \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right). \quad (35)$$

Система (34)–(35) с использованием применяемого в ЛВМ уравнения состояния, линейно связывающего ρ и p , сводится к системе уравнений относительно p и компонент вектора \mathbf{u} . Эта система по структуре близка к системе уравнений метода искусственной сжимаемости, широко применяемой в вычислительной гидродинамике [11, 12].

4. Необходимые условия устойчивости. Поскольку решения уравнений гидродинамики будут иметь физический смысл только при неотрицательных значениях коэффициента вязкости, из (30) и условия $\nu \geq 0$ можно получить необходимые условия устойчивости в виде неравенств на параметры τ и σ . Анализируя условия неотрицательности правой части (30), можно без особого труда показать справедливость следующего следствия из теоремы 1.

Следствие. Пусть система (5) является устойчивой по начальным условиям. Тогда будут выполнены следующие условия на параметры τ и σ :

1) для семейства 1:

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \tau, \quad (36)$$

которое будет справедливо для всех $\sigma \in [1/2, 1]$ и $\tau > 0$;

2) для семейства 2:

$$\sigma \leq \tau + \frac{1}{2}, \quad (37)$$

которое будет справедливо для всех $\sigma \in [0, 1/2]$ и $\tau > 0$;

3) для семейства 3:

$$\sigma \geq -2\tau, \quad (38)$$

которое будет справедливо для всех $\sigma \in [0, 1]$ и $\tau > 0$;

4) для семейства 4:

$$\sigma \leq 2\tau, \tag{39}$$

которое будет справедливо для всех $\sigma \in [0, 1]$ при $\tau > 1/2$ и для всех $\sigma \in [0, 2\tau]$ при $\tau < 1/2$;

5) для семейства 5:

$$\sigma \leq 1 + 2\tau, \tag{40}$$

которое будет справедливо для всех $\sigma \in [0, 1]$ и $\tau > 0$;

6) для семейства 6:

$$\sigma \geq 1 - 2\tau, \tag{41}$$

которое будет справедливо для всех $\sigma \in [0, 1]$ при $\tau > 1/2$ и для всех $\sigma \in [1 - 2\tau, 1]$ при $0 < \tau < 1/2$; при $\sigma = 1$ это неравенство будет справедливо для всех $\tau > 0$.

Заметим, что условия, аналогичные (36)–(41), можно получить, если применить спектральный признак устойчивости в случае, когда не учитываются возмущения по пространственным переменным [7]. Следует отметить, что в работе [7] в условиях устойчивости (9.3)–(9.5), полученных по спектральному признаку, были обнаружены досадные опечатки: формулу (9.3) следует поменять местами с (9.4), а (9.5) — с (9.6). В этом случае все условия вытекают из следующего неравенства, являющегося следствием спектрального критерия устойчивости:

$$\left| \frac{1 + A}{1 - B} \right| \leq 1.$$

5. Решение задачи о каверне. Проиллюстрируем применение построенных схем и необходимых условий устойчивости при решении плоской задачи о течении в каверне при различных значениях числа Рейнольдса Re . При расчетах рассмотрим только случай семейства 1 при выполнении необходимого условия устойчивости (36): при расчетах рассматривались случаи $\sigma = 1$ и $\sigma = 1/2$ — схем первого и второго порядков соответственно. Как можно видеть из (36), при таких значениях σ необходимое условие выполняется для всех $\tau > 0$. Подстановкой рассчитанных по таким σ значений A и B в выражения, определяющие остальные семейства, можно без труда получить, каким значениям σ соответствуют найденные A и B для остальных семейств.

Рассмотрим постановку задачи о течении в каверне с подвижной крышкой, изложенную в [13]. Рассматривается область квадратной формы со стороной длины L . На границах поставлены условия следующего вида:

$$\begin{aligned} u_x(t, x, 0) = u_y(t, x, 0) = 0, \quad u_x(t, x, L) = u_0 = \text{const}, \quad u_y(t, x, P) = 0, \quad x \in [0, L], \\ u_x(t, 0, y) = u_y(t, 0, y) = u_x(t, L, y) = u_y(t, L, y) = 0, \quad y \in [0, L]. \end{aligned}$$

В начальный момент времени предполагается, что скорость жидкости во всех внутренних точках равна нулю, а плотность равна единице. При расчетах полагалось, что $L = 1$ м, $T = 500$ с и $u_0 = 0.1$ м/с.

В первой серии расчетов, кроме L , T и u_0 и параметров сеток l и δt , задавалось число Re и значение параметра σ . По заданным L , u_0 и Re определялось значение коэффициента кинематической вязкости ν (см. [7]). Значение параметра τ находилось по (30) из условия равенств коэффициентов кинематической и аппроксимационной вязкости.

Рассматривались случаи следующих значений числа Рейнольдса: $Re = 50, 100, 400, 1000$. Данные для сравнения при $Re = 50$ брались из [14], для остальных значений — из статьи [13]. В качестве критерия для сравнения рассматривалась норма вектора среднеквадратичных отклонений компонент u_x и u_y : $I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$, где

$$I_x = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (u_x(T, 0.5L, y_i) - U_x(0.5L, y_i))^2, \quad I_y = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (u_y(T, x_i, 0.5L) - U_y(x_i, 0.5L))^2.$$

Здесь T — длина временного промежутка, на котором решение задачи выходит на стационарный режим, U_x и U_y — взятые из литературных источников значения компонент вектора скорости, вычисленные в узлах равномерной сетки, разбивающей промежуток $[0, L]$ на N частей.

При указанных выше значениях параметров схемы оказывались неявными, и при проведении расчетов в каждом узле сетки на каждом шаге по времени приходилось решать систему нелинейных алгебраических уравнений относительно девяти неизвестных. Решение производилось с помощью метода Ньютона.

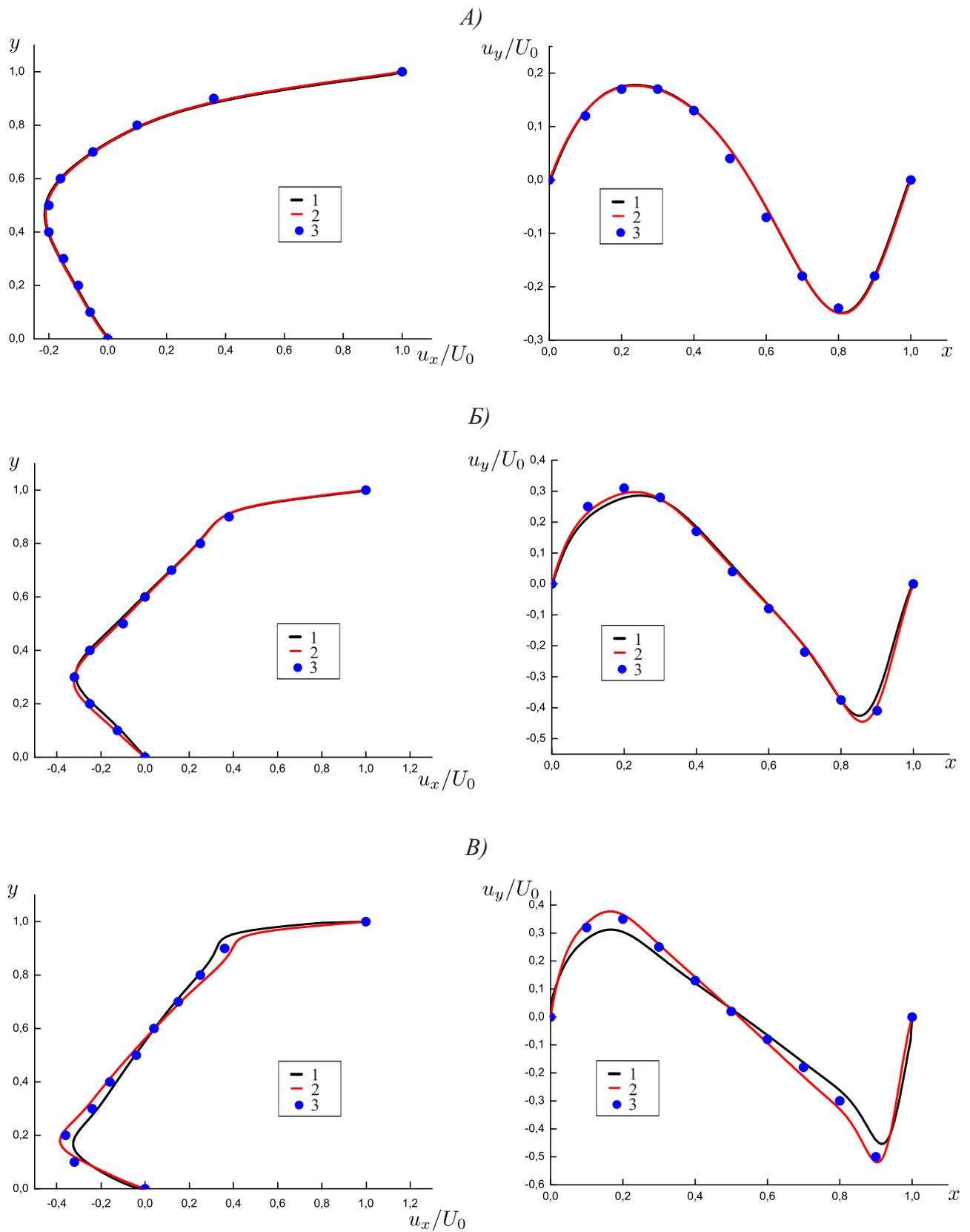


Рис. 1. Графики решения задачи о течении в каверне при $Re = 50$ (А), $Re = 400$ (Б) и $Re = 1000$ (В):
 1) решение при $\sigma = 1$; 2) решение при $\sigma = 1/2$; 3) результаты из [13] и [14]

В качестве начальных приближений брались значения с предыдущего шага по времени. Заметим, что системы нелинейных уравнений, соответствующие узлам сетки, на каждом шаге решаются *независимо друга от друга*, в связи с чем метод ЛВМ на основе схем семейства (5) сохраняет все достоинства традиционного варианта метода ЛВМ, связанные с высоким параллелизмом его алгоритма, хотя, конечно, на решение систем будет тратиться определенное время.

При проведении численных расчетов рассматривались следующие разбиения сеток: при $Re = 50$ бралась сетка из 50×50 узлов по пространству и 10 000 узлов по времени, при $Re = 100$ — из 100×100 и 20 000, при $Re = 400$ — из 200×200 и 20 000 узлов, при $Re = 1000$ — из 250×250 и 20 000 узлов.

На рис. 1 представлены результаты численных расчетов при $Re = 100, 400, 1000$, полученных по указанным схемам, в сравнении с данными из [13]. Значения u_x выводились при $x = 0.5$ как значения функции переменной y , значения u_y — при $y = 0.5$ как функции от x .

Значения I для случая схемы 1 при $\sigma = 1$ и $\sigma = 1/2$

σ	Re = 50	Re = 100	Re = 400	Re = 1000
1	5.0514×10^{-4}	1.1237×10^{-4}	5.1427×10^{-4}	2.3744×10^{-3}
1/2	5.8641×10^{-5}	3.0376×10^{-5}	3.4718×10^{-5}	2.2343×10^{-4}

В таблице представлены значения I для случаев всех Re и рассмотренных схем. Как можно видеть, схема при $\sigma = 1/2$, аппроксимирующая со вторым порядком, дает более близкие результаты, чем схема, аппроксимирующая с первым порядком.

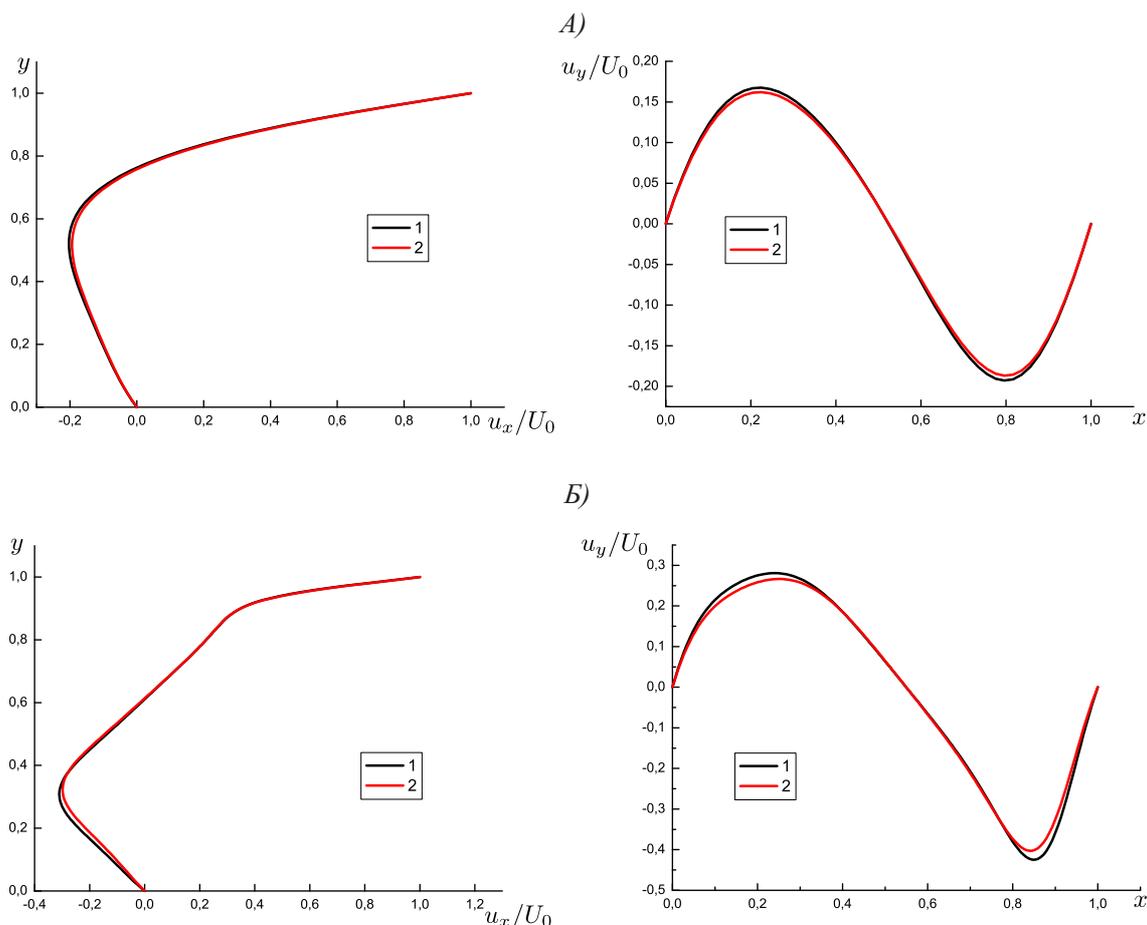


Рис. 2. Графики решения задачи о течении в каверне при $\sigma = 1$ и $\tau = 1/8$ при $Re = 36$ (А) и $Re = 333$ (Б):
 1) решение системы уравнений гидродинамики в переменных “завихренность–функция тока”;
 2) решение по параметрическим схемам

Вторая серия расчетов проводилась при значениях параметра $\tau < 1/2$, при котором обычная схема (б) не является устойчивой, поскольку нарушается необходимое условие ее устойчивости. По схемам

из семейства 1 при $\sigma = 1$ и $\sigma = 1/2$ расчеты провести удалось, несмотря на то, что (36) является только необходимым условием. Сравнение производилось с результатами, полученными при решении системы уравнений гидродинамики в переменных “завихренность–функция тока” на таких же сетках при одинаковых числах Рейнольдса. В качестве примеров таких расчетов при $\sigma = 1$ рассмотрим при $\tau = 1/8$ случаи сетки из 50×50 узлов при $Re = 36$ и сетки из 150×150 узлов при $Re = 333$. Первому случаю соответствует значение $I = 5.0908 \times 10^{-5}$, второму — $I = 2.1198 \times 10^{-4}$. На рис. 2 представлены графики компонент вектора скорости для указанных случаев.

В качестве результатов расчетов при $\sigma = 1/2$ представим случаи при $\tau = 0.28$ на сетке из 100×100 узлов при $Re = 328$ и на сетке из 150×150 узлов при $Re = 743$. Первому случаю соответствует значение $I = 1.8040 \times 10^{-4}$, второму — $I = 2.1198 \times 10^{-4}$. На рис. 3 представлены графики компонент вектора скорости для указанных случаев.

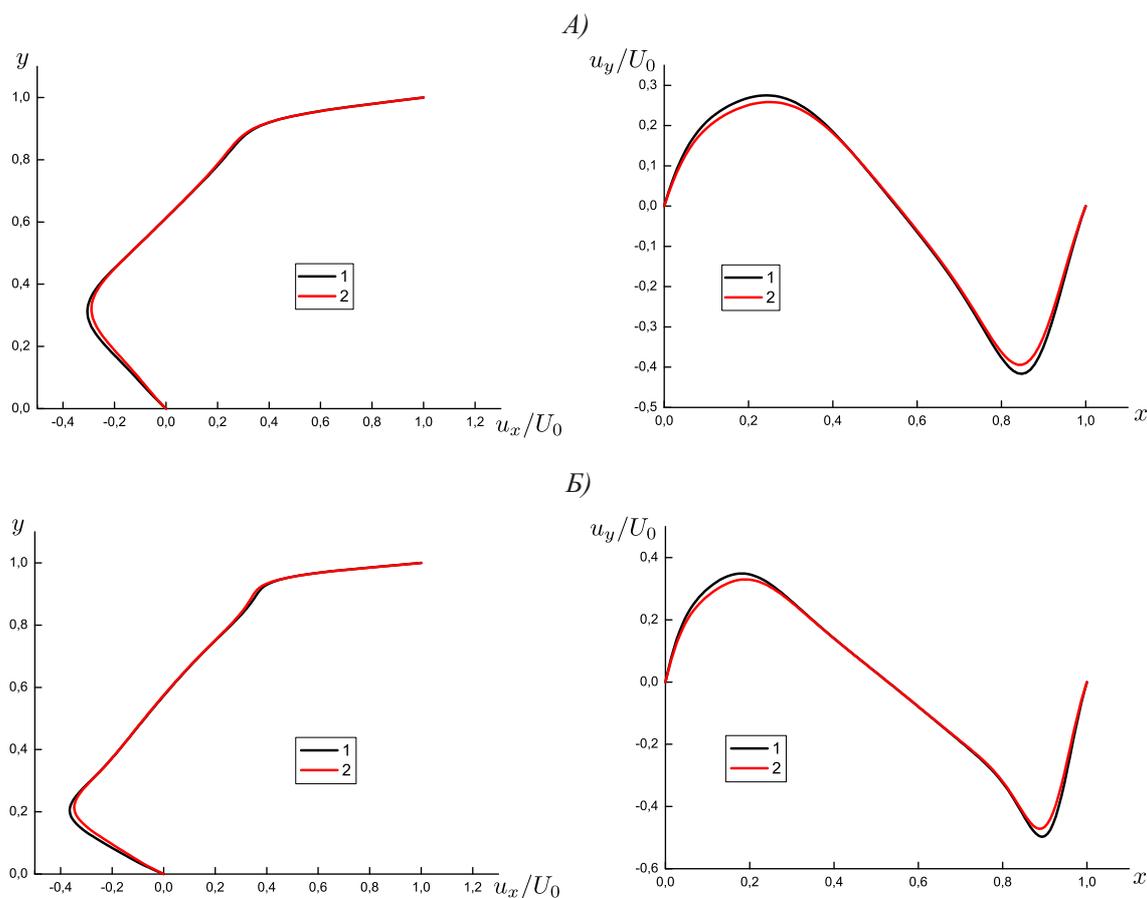


Рис. 3. Графики решения задачи о течении в каверне при $\sigma = 1/2$ и $\tau = 0.28$ при $Re = 328$ (А) и $Re = 743$ (Б):
 1) решение системы уравнений гидродинамики в переменных “завихренность–функция тока”;
 2) решение по параметрическим схемам

Как можно видеть, при использовании параметрических схем удалось получить приемлемые по точности результаты в случаях, когда неприменима схема (6). Заметим, что точность параметрических схем может быть увеличена за счет использования квадратурных формул высоких алгебраических степеней точности.

6. Заключение. В настоящей статье рассмотрены свойства параметрических решеточных схем Больцмана. С использованием метода Чепмена–Энскога из дифференциального приближения схем получена система уравнений относительно макроскопических переменных и выведено выражение для аппроксимационной вязкости. Показано, что существует численная вязкость, что необходимо учитывать при проведении расчетов. Необходимые условия устойчивости получены из условия неотрицательности выражения для аппроксимационной вязкости. При решении тестовой задачи о течении в каверне с подвижной крышкой показано, что возможно проведение расчетов по параметрическим схемам в случаях, когда неприменимо обычное решеточное уравнение Больцмана.

Параметрические схемы с определенными модификациями могут быть распространены на случай

задач о динамике многокомпонентных сред и сред с фазовыми переходами, при решении которых весьма актуальным может быть использование схем с расширенными областями устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00021 мол_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen S., Doolen G.D.* Lattice Boltzmann method for fluid flows // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1998. **30**. 329–364.
2. *Грачев Н.Е., Дмитриев А.В., Сенин Д.С.* Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2011. **12**. 227–231.
3. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 130–138.
4. *Abe T.* Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation // *Journal of Computational Physics*. 1997. **131**, N 1. 241–246.
5. *He X., Luo L.-S.* Theory of the lattice Boltzmann method: from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation // *Physical Review E*. 1997. **56**, N 6. 6811–6817.
6. *Sterling J.D., Chen S.* Stability analysis of lattice Boltzmann methods // *Journal of Computational Physics*. 1996. **123**, N 1. 196–206.
7. *Кривовичев Г.В.* О применении интегро-интерполяционного метода к построению одношаговых решеточных кинетических схем Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 19–27.
8. *Sofonea V., Sekerka R.F.* Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // *Journal of Computational Physics*. 2003. **184**, N 2. 422–434.
9. *Wolf-Gladrow D.A.* Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction. Berlin: Springer, 2005.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Физматлит, 2003.
11. *Chorin A.J.* A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // *Journal of Computational Physics*. 1967. **2**, N 1. 12–26.
12. *Ohwada T., Asinari P.* Artificial compressibility method revisited: asymptotic numerical method for incompressible Navier-Stokes equations // *Journal of Computational Physics*. 2010. **229**, N 5. 1698–1723.
13. *Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.* High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method // *Journal of Computational Physics*. 1982. **48**, N 3. 387–411.
14. *Кривовичев Г.В.* О расчете течений вязкой жидкости методом решеточных уравнений Больцмана // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2013. **5**, № 2. 165–178.

Поступила в редакцию
15.12.2016

Approximation Viscosity of One-Parameter Families of Lattice Boltzmann Equations

G. V. Krivovichev¹ and E. A. Prokhorova²

¹ *Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: g.krivovichev@spbu.ru*

² *Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Student, e-mail: proxliza@mail.ru*

Received December 15, 2016

Abstract: A number of properties of parametric lattice Boltzmann schemes are considered. The Chapman–Enskog method is used to derive a system of equations for hydrodynamic variables and to obtain an expression for the approximation viscosity from the differential approximation of the schemes. It is shown that there exists the numerical viscosity that should be taken into account during numerical computations. Necessary stability conditions are obtained from the nonnegativity condition for the approximation viscosity. The possibility of computations using the proposed schemes is demonstrated by the numerical solution of the lid-driven cavity flow problem when the standard lattice Boltzmann equation is inapplicable.

Keywords: lattice Boltzmann method, approximation viscosity, stability.

References

1. S. Chen and G. D. Doolen, “Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30**, 329–364 (1998).
2. N. E. Grachev, A. V. Dmitriev, and D. S. Senin, “Simulation of Gas Dynamics with the Lattice Boltzmann Method,” *Vychisl. Metody Programm.* **12**, 227–231 (2011).
3. A. L. Kupershtokh, “Three-Dimensional Simulations of Two-Phase Liquid–Vapor Systems on GPU Using the Lattice Boltzmann Method,” *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 130–138 (2012).
4. T. Abe, “Derivation of the Lattice Boltzmann Method by Means of the Discrete Ordinate Method for the Boltzmann Equation,” *J. Comput. Phys.* **131** (1), 241–246 (1997).
5. X. He and L.-S. Luo, “Theory of the Lattice Boltzmann Method: From the Boltzmann Equation to the Lattice Boltzmann Equation,” *Phys. Rev. E* **56** (6), 6811–6817 (1997).
6. J. D. Sterling and S. Chen, “Stability Analysis of Lattice Boltzmann Methods,” *J. Comput. Phys.* **123** (1), 196–206 (1996).
7. G. V. Krivovichev, “Application of the Integro-Interpolation Method to the Construction of Single-Step Lattice Boltzmann Schemes,” *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 19–27 (2012).
8. V. Sofonea and R. F. Sekerka, “Viscosity of Finite Difference Lattice Boltzmann Models,” *J. Comput. Phys.* **184** (2), 422–434 (2003).
9. D. A. Wolf-Gladrow, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction* (Springer, Berlin, 2005).
10. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. 6: Hydrodynamics* (Fizmatlit, Moscow, 2003; Butterworth-Heinemann, Oxford, 1987).
11. A. J. Chorin, “A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems,” *J. Comput. Phys.* **2** (1), 12–26 (1967).
12. T. Ohwada and P. Asinari, “Artificial Compressibility Method Revisited: Asymptotic Numerical Method for Incompressible Navier–Stokes Equations,” *J. Comput. Phys.* **229** (5), 1698–1723 (2010).
13. U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin, “High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier–Stokes Equations and a Multigrid Method,” *J. Comput. Phys.* **48** (3), 387–411 (1982).
14. G. V. Krivovichev, “On the Computation of Viscous Fluid Flows by the Lattice Boltzmann Method,” *Kompyut. Issled. Model.* **5** (2), 165–178 (2013).