

УДК 519.632.4+519.653

doi 10.26089/NumMet.v17r446

БЫСТРЫЙ НЕЛОКАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЙМАНА–ДИРИХЛЕ С КОНТРОЛЕМ ПОГРЕШНОСТИ

Б. В. Семисалов^{1,2}

Предложен метод численного решения краевых задач Неймана–Дирихле для уравнений эллиптического типа, обеспечивающий достижение требуемой точности с низким расходом памяти и машинного времени. Метод адаптирует свойства наилучших полиномиальных приближений для построения быстросходящихся алгоритмов без насыщения на основе нелокальных чебышевских приближений. Предложен новый подход к аппроксимации дифференциальных операторов и решению полученных задач линейной алгебры. Даны оценки погрешности численного решения. Обоснован и установлен экспериментально высокий порядок сходимости предложенного метода в задачах с C^r -гладкими и C^∞ -гладкими решениями. Получены выражения элементов массивов, аппроксимирующих операторы производных в задачах с различными граничными условиями. Эти выражения позволят читателю быстро реализовать метод “с нуля”.

Ключевые слова: краевая задача, быстрый алгоритм, оценка погрешности, метод коллокаций, метод установления, нелокальный алгоритм без насыщения.

Введение. При решении краевых задач высокой вычислительной сложности на ЭВМ специалисты неизбежно сталкиваются с проблемой минимизации вычислительных затрат при сохранении необходимой точности решения. Актуальность этой проблемы особенно остро проявляется в приложениях, где требуется проведение расчетов с высокой точностью (квантовая физика, оптика, химия, проблемы создания высокоточных систем навигации, метеорология и др.); при решении нелинейных задач с малыми параметрами и большими градиентами; задач большой размерности, в которых ограничения объемов памяти становятся наиболее критичными; а также при оптимизации сложных систем, сводящейся к решению большого количества прямых задач.

Указанную проблему можно сформулировать в следующем виде:

дано: краевая задача для дифференциального уравнения; требуемая точность;

найти: метод, позволяющий получить решение с требуемой точностью,

I) совершив достаточно малое количество операций;

II) используя достаточно малый объем памяти;

III) внося достаточно малую вычислительную погрешность в решение.

Вычислительный опыт подсказывает, что для удовлетворения свойствам I–III необходимо следовать принципу адекватности [1], т.е. учитывать специфику поставленной задачи. Важнейшей специфической характеристикой при этом является гладкость (регулярность) искомого решения. Ее учет, заложенный в основу предложенного метода, позволил существенно снизить вычислительные затраты с достижением высокой точности решения.

Выполнение свойств I, II может быть обеспечено применением наилучших приближений для аппроксимации решений рассматриваемой задачи. Действительно, теория приближений гладких функций элементами конечномерных линейных пространств (полиномами и рядами), развитая в работах классиков Чебышева, Лебега, Бернштейна, Джексона, Колмогорова, позволяет оценить минимальное значение размерности пространства (числа узлов интерполяции или неизвестных коэффициентов ряда), обеспечивающее достижение требуемой точности. Минимизация размерности пространства в совокупности с эффективными методами аппроксимации дифференциальных операторов и быстрыми методами решения задач линейной алгебры приводит к выполнению I, II.

Свойство III связано с преодолением эффекта накопления погрешности округления действительных чисел в памяти ЭВМ, возникающей при расчетах в системах с плавающей точкой. Ниже получены и протестированы оценки вычислительной погрешности, обусловленной указанным эффектом.

¹ Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет, ул. Пирогова, 1, 630090, г. Новосибирск; ассистент, e-mail: vibis@ngs.ru

² Институт вычислительных технологий СО РАН, просп. Академика Лаврентьева, 6, 630090, г. Новосибирск; ст. науч. сотр., e-mail: vibis@ngs.ru

Разработанный алгоритм с точки зрения I–III существенно превосходит классические конечно-разностные (КРМ) и методы конечных элементов (МКЭ). Он использует идеи К.И. Бабенко о методах приближения без насыщения [2, 3] на основе нелокальных аппроксимаций функций [4] в базисе Фурье и базисе, состоящем из полиномов Чебышева. Такие методы для любого класса гладкости искомым функций позволяют получить асимптотику погрешности наилучших полиномиальных приближений с точностью до медленно растущих членов [5–8]. В связи с этим будем именовать далее разработанный алгоритм *нелокальным алгоритмом без насыщения* (НАБН).

1. Теоретические аспекты нелокального алгоритма. В этом разделе речь идет о наилучших приближениях элементов бесконечномерных функциональных пространств элементами их линейных подпространств конечной размерности, иными словами, говорится о таких способах замены континуального множества значений функции конечным набором величин, которые позволяют восстановить эту функцию с максимальной точностью. Подчеркнем, что ключевое значение при такой замене имеют свойства гладкости (регулярности) приближаемой функции.

1.1. О приближении гладких функций элементами конечномерных пространств. Пусть

$$D = [a, b] \in \mathbb{R}, \quad f \in C(D), \quad \|f\| = \max_{x \in D} |f(x)|, \quad \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)| dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty;$$

при $p = \infty$ полагаем $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|$, $\mathfrak{W}_p^r(M, D) = \{f \in C^r(D) : \|f^{(r)}\|_p \leq M\}$ — множества гладких функций с производными, ограниченными константой M . Далее будем работать с классами функций $W_p^r(M, D)$, являющимися замыканиями множеств $\mathfrak{W}_p^r(M, D)$ в норме $\|\cdot\|_p$.

Рассмотрим приближения элементов множества $W_p^r(M, D) \subset C(D)$ элементами конечномерных линейных подпространств $K_n \subset C(D)$. Для определенности положим, что K_n — линейное пространство многочленов степени меньшей n .

Определение 1. Линейное отображение P_n , осуществляющее проекцию множества $W_p^r(M, D)$ на подпространство K_n ($P_n : W_p^r(M, D) \rightarrow K_n$), будем называть оператором n -точечного приближения, или непосредственно n -точечным приближением функции из $W_p^r(M, D)$.

Определение 2. Наилучшим n -точечным приближением функции $f \in W_p^r(M, D)$ будем называть элемент $e_n(f, K_n) \in K_n$, на котором достигается нижняя грань $\varepsilon_n^*(f, K_n) = \varepsilon_n^*(f) = \inf_{g \in K_n} \|f - g\|$. Отметим, что в силу конечномерности K_n нижняя грань здесь достигается всегда.

Очевидно, что P_n представляет собой эффективный способ приближения f тогда и только тогда, когда норма $\|f - P_n(f)\|$ близка к $\varepsilon_n^*(f)$. Мерой отклонения $\|f - P_n(f)\|$ от $\varepsilon_n^*(f)$ может служить константа Лебега.

Определение 3. Норма оператора P_n называется константой Лебега $\Lambda_n = \sup_{\substack{f \in C[a,b], \\ f \neq 0}} \frac{\|P_n(f)\|}{\|f\|}$.

Из последнего определения несложно получить, что $\|f - P_n(f)\| \leq (1 + \Lambda_n)\varepsilon_n^*(f)$.

Константа Лебега характеризует устойчивость метода приближения. Пусть $g(x) \in C([a, b])$ — функция, такая что $\|g\| \leq \delta$, δ — малое число. Тогда верна оценка

$$\varepsilon = \|f - P_n(f + g)\| \leq (1 + \Lambda_n)\varepsilon_n^*(f) + \|P_n(g)\| \leq (1 + \Lambda_n)\varepsilon_n^*(f) + \Lambda_n\delta. \tag{1}$$

Далее по тексту символом δ будем обозначать величину относительной погрешности округления при расчетах в арифметике с плавающей точкой на ЭВМ. Величина δ зависит от программно-аппаратной платформы и выбранного типа действительных чисел. Обычно имеют место значения $\delta = 10^{-7}$ (тип float), $\delta = 10^{-15}$ (тип double), $\delta = 10^{-31}$ (тип quadruple). Будем полагать далее $\delta = 10^{-15}$. Таким образом, неравенство (1) представляет собой оценку погрешности приближения ε в виде суммы оценок погрешности метода приближения $\varepsilon_M \leq (1 + \Lambda_n)\varepsilon_n^*(f)$ и вычислительной погрешности $\varepsilon_R \leq \Lambda_n\delta$ ($\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_R$).

Представление о степени точности наилучшего n -точечного приближения элементов $W_p^r(M, D)$ дает теорема 1, являющаяся следствием теоремы Джексона [9].

Теорема 1 [2]. Для наилучших приближений имеет место оценка

$$\sup_{f \in W_p^r(M, D)} \varepsilon_n^*(f, K_n) \leq MC_r n^{-r}, \tag{2}$$

где значение C_r зависит только от степени гладкости f и может быть ограничено сверху: $C_r \leq \frac{\pi^r r^{r-1}}{2^r (r-1)!}$, причем при $p = 1$ и $p = \infty$ в (2) достигается равенство.

Заметим, что оценка (2) получена для функций, имеющих фиксированный порядок гладкости r . Возникает естественный вопрос: существуют ли приближения, автоматически улучшающие свои свойства при переходе от класса $W_p^r(M, D)$ к классу $W_p^{r+1}(M, D)$ в соответствии с оценкой (2)? Исследования данного вопроса, инициированные К.И. Бабенко, привели к понятию *насыщения* [2–8].

Определение 4 (нестрогое). Методом приближения, не имеющим насыщения (методом без насыщения), называется метод, обладающий асимптотикой погрешности наилучшего приближения при любой степени гладкости приближаемой функции.

Замечание 1. Строгое определение понятия насыщения основано на анализе асимптотики поперечников Александрова пространств непрерывных и гладких функций. Выдающимся результатом К.И. Бабенко является адаптация понятия поперечника для исследования качества метода приближения в зависимости от гладкости приближаемой функции. Отдельно стоит упомянуть результаты В.Н. Белых для случая бесконечной дифференцируемости приближаемой функции [6, 7].

1.2. Асимптотика наилучших приближений для трех классов гладких функций. Качество наилучшего приближения существенно зависит от свойств гладкости (регулярности) функции. Ниже описаны три основных класса гладких функций, обладающих принципиально разными оценками точности наилучших приближений.

1. Первый класс включает в себя функции $f \in W_p^r(M, D)$. Для них имеет место *степенная сходимость наилучшего приближения* (2) и, как следствие, метода без насыщения.

2. Вторым классом являются функции $f \in C^\infty(D)$, аналитическое продолжение которых в комплексную плоскость имеет особенность в точке $P \in \mathbb{C}$. Обозначим множество таких функций $C_P^\infty(D)$. В соответствии с результатом С.Н. Бернштейна [10] заключаем, что для таких функций существует такая последовательность многочленов $P_n(z)$ степени меньшей n , что для всех z из области аналитичности f выполнена оценка

$$|f(z) - P_n(f)(z)| \leq Cq^n, \quad 0 < q < 1, \quad (3)$$

где C не зависит от n и z . Тогда имеет место *экспоненциальная сходимость наилучшего приближения*.

3. Третьим классом является множество целых функций, т.е. функций, аналитичных в \mathbb{C} (обозначим это множество Ent). Для таких функций на основе формулы Коши–Адамара можно показать, что скорость сходимости наилучшего полиномиального приближения не ниже экспоненциальной. Кроме того, для многих частных случаев (например, для целых функций порядка 1 нормального типа $|f^{(n)}(z)| \leq M^n \forall z \in D, n \in \mathbb{N}$), имеет место *факториальная сходимость*:

$$\varepsilon_n^*(f, K_n) \leq \frac{2q^n}{n!}, \quad q = \frac{M}{2}. \quad (4)$$

Качественная картина зависимости погрешности наилучшего приближения от n в соответствии с (2)–(4) в логарифмической шкале приведена на рис. 1а. Область, соответствующая скорости сходимости методов с фиксированным порядком аппроксимации (классические схемы КРМ, МКЭ и т.п.), закрашена серым цветом. Порядок таких методов равен двум, что отражает линия $-2 \log_{10} n$. Порядок наилучших приближений возрастает с ростом гладкости (регулярности) приближаемой функции и становится максимальным для целых функций $f \in \text{Ent}$.

На рис. 1б приведена асимптотика погрешности приближения целой функции $\cos x$, наблюдаемая в численном эксперименте. При сравнении графиков на рис. 1а и 1б вклад вычислительной погрешности (см. (1)) становится очевидным. В случае равномерного распределения узлов (кривая 1) имеет место быстрый рост константы Лебега, приводящий к росту погрешности приближения. При использовании узлов в нулях многочлена Чебышева (кривая 2) — более медленный, обеспечивающий высокую точность при любом n . Отметим, что в обоих случаях существуют точки минимума погрешности (А и В), разделяющие ее график на две части: в левой характер графика определяется асимптотикой погрешности метода, а в правой — скоростью роста вычислительной погрешности. Оценки констант Лебега интерполяционных полиномов с равномерным распределением узлов $(2^{n-3}(n-1)^{-1/2}(n-3/2)^{-1} < \Lambda_n < 2^{n-1}, n \geq 4, [2])$ и с узлами в нулях многочлена Чебышева отражены на рис. 1б пунктирными линиями. Видно хорошее соответствие экспериментальным данным.

Конструктивный способ построения приближений, асимптотически удовлетворяющих (2)–(4), состоит в использовании тригонометрического ряда Фурье или полиномов Чебышева. Такие приближения не имеют насыщения [2], их константы Лебега растут медленно с ростом n .

Теорема 2 [14]. Константа Лебега приближений Φ_n логарифмически зависит от n : для $R_n < 3$, $\Lambda_n = \frac{4}{\pi} \ln n + R_n$.

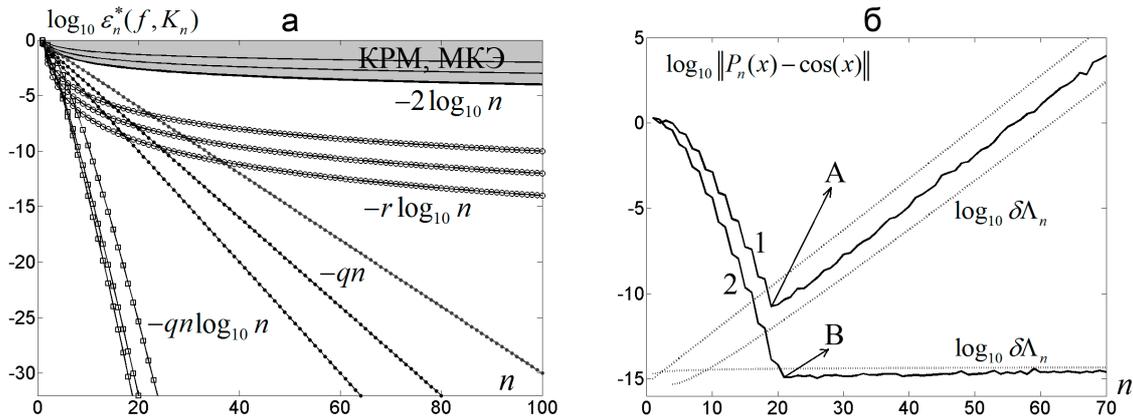


Рис. 1. Асимптотика десятичного логарифма погрешности: а) наилучшего приближения при $f \in W_p^r(M, D)$ (кружки), $f \in C_P^\infty(D)$ (точки), $f \in \text{Ent}$ (квадраты); б) рассчитанная в ходе приближения целой функции $\cos(x)$ интерполяционными полиномами на равномерных сетках (1) и на сетках с узлами в нулях многочленов Чебышева (2)

Теорема 3 [15]. Константа Лебега интерполяционного полинома с узлами в нулях полинома Чебышева логарифмически зависит от n , $\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \ln n - \theta_n$, $\frac{3}{4} < \theta_n < 1$.

Отметим, что область сходимости ряда Фурье для периодической функции $f \in C_P^\infty(D)$ в комплексной плоскости есть полоса $\{x + iy : x \in \mathbb{R}, -h < y < h\}$, где h — ордината точки $P \in \mathbb{C}$. Область сходимости разложения $f \in C_P^\infty(D)$ в базисе, состоящем из полиномов Чебышева, ограничена эллипсом с фокусами в точках ± 1 , проходящим через точку P , причем величина q из оценки (3) для таких полиномов определяется размерами полуосей эллипса \tilde{a}, \tilde{b} : $q = \frac{1}{\tilde{a} + \tilde{b}} < 1$.

1.3. Методы без насыщения в задачах произвольной размерности. До сих пор речь шла о построении наилучших приближений функции одной переменной на отрезке. Подобную задачу можно поставить и для функции нескольких переменных на множестве произвольной размерности $f(\mathbf{x}) \in W_p^r(M, D)$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in D \subset \mathbb{R}^d$, D — область с гладкой (или кусочно-гладкой) границей. Однако в таком случае возникает одно существенное ограничение: непосредственное построение приближений, обладающих всеми свойствами $\Phi_n(f), \mathcal{T}_n(f)$, может быть реализовано только в областях канонических форм (квадрате, кубе, кольце, шаре, торе и т.п.). При этом используются тензорные произведения — например, для приближения функции в d -мерном кубе $D = [-1, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$ следует использовать базис

$$T_N(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^d T_{n_k}(x_k) = \prod_{k=1}^d \cos(n_k \arccos x_k),$$

где x_k — k -я координата точки $\mathbf{x} \in D$, $n_k = 1, 2, \dots$ характеризует степень базисного полинома по каждому направлению. Фундаментальная проблема состоит в отсутствии общих подходов к построению приближений без насыщения с медленно растущими константами Лебега в областях сложной геометрии. Одним из эффективных решений данной проблемы видится использование конформных отображений области задачи в каноническую (см. [16, 17]).

2. Разработка нелокального алгоритма без насыщения. В данном разделе будет описан нелокальный алгоритм решения краевых задач Неймана–Дирихле для уравнений эллиптического типа второго порядка, имеющих постоянные коэффициенты при старших производных:

$$d = 1 : au_{xx} = f(u, x), \quad d = 2 : au_{xx} + bu_{yy} = f(u, x, y), \quad d = 3 : au_{xx} + bu_{yy} + cu_{zz} = f(u, x, y, z). \quad (5)$$

Разрабатываемый алгоритм несложно модифицировать для решения уравнений с переменными коэффициентами и квазилинейных уравнений с помощью переноса соответствующих слагаемых из левой части в правую.

2.1. Аппроксимация неизвестных функций и их производных. Отметим, что существует значительное число методов решения краевых задач с использованием разложений неизвестных функций

$$\text{вида: } u(x) \approx \sum_{k=1}^n a_k T_k(x).$$

Предлагаемый подход восходит к работам [14, 18] и представляет собой псевдоспектральный метод. В нем для приближения решения использованы интерполяционные полиномы на отрезке $[-1, 1]$ с узлами в нулях многочлена Чебышева, представленные в форме Лагранжа:

$$p(u, x) = \sum_{j=1}^N \frac{\omega(x, x_j) T_N(x)}{(x - x_j) T'_N(x_j)} u(x_j) + \omega_{-1}(x) u(-1) + \omega_1(x) u(1), \quad x_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2N}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Функции $\omega(x, x_j)$, $\omega_{\pm 1}(x)$ обеспечивают выполнение однородных краевых условий и, при необходимости, преобразование системы координат.

Неизвестную функцию будем приближать суммой $u(x) \approx p(u, x) + v(x)$, где $v(x)$ — гладкая функция, удовлетворяющая неоднородным условиям (она строится элементарным образом). Рассмотрим несколько вариантов краевых условий для (6):

— условия Дирихле ($p = p_D$): $\omega(x, x_j) = \frac{1-x^2}{1-x_j^2}$, $\omega_{\pm 1}(x) \equiv 0$;

— условия Неймана ($p = p_N$):

$$\omega(x, x_j) = \frac{(1-x^2)^2}{(1-x_j^2)^2}, \quad \omega_{\pm 1}(x) = 0.25(\pm 1)^N (1 \pm x)^2 \left\{ 1 + (1 \mp x)(1 + N^2) \right\} T_N(x);$$

— смешанные условия $u(-1) = 0$, $u'(1) = 0$ ($p = p_{M1}$):

$$\omega(x, x_j) = \frac{(1-x)^2(1+x)}{(1-x_j)^2(1+x_j)}, \quad \omega_{-1}(x) \equiv 0, \quad \omega_1(x) = 0.5(1+x) \left\{ 1 + (1-x)(N^2 + 0.5) \right\} T_N(x);$$

— смешанные условия $u'(-1) = 0$, $u(1) = 0$ ($p = p_{M2}$):

$$\omega(x, x_j) = \frac{(1-x)(1+x)^2}{(1-x_j)(1+x_j)^2}, \quad \omega_1(x) \equiv 0, \quad \omega_{-1}(x) = 0.5(1-x)(-1)^N \left\{ 1 + (1+x)(N^2 + 0.5) \right\} T_N(x);$$

— условия $u(\pm 1)$ произвольны ($p = p_T$): $\omega(x, x_j) \equiv 1$, $\omega_{\pm 1}(x) \equiv 0$.

При использовании полиномов p_N , p_{M1} или p_{M2} набор узлов x_j необходимо дополнить точками $-1, 1$. Рассмотрим далее метод аппроксимации первых и вторых производных в предположении, что имеют место условия Дирихле $u(-1) = \varphi$, $u(1) = \psi$. Определим $v(x) = \frac{\varphi + \psi}{2} x^2 + \frac{\psi - \varphi}{2} x$. Тогда

$$u'(x) \approx p'_D(u, x) + (\varphi + \psi)x + \frac{1}{2}(\psi - \varphi); \quad u''(x) \approx p''_D(u, x) + (\varphi + \psi).$$

Положим $s = \sqrt{1-x^2}$, $s_j = \sqrt{1-x_j^2}$, $u_j = u(x_j)$. Дифференцируя p_D по x , получаем

$$p'_D(u, x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+N-1} \left\{ \frac{2xx_j - x^2 - 1}{N(x-x_j)^2 s_j} T_N(x) + \frac{s}{s_j(x-x_j)} \sqrt{1-T_N^2(x)} \right\} u_j, \quad (7)$$

$$p''_D(u, x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+N-1} \left\{ \frac{2s_j^2 - N^2(x-x_j)^2}{N(x-x_j)^3 s_j} T_N(x) - \frac{(x^2 - 3xx_j + 2)}{s s_j(x-x_j)^2} \sqrt{1-T_N^2(x)} \right\} u_j. \quad (8)$$

Переходя в (7), (8) к пределу при $x \rightarrow x_i$ и используя правило Лопиталья, находим

$$p'_D(u, x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^N (-1)^{i+j} \frac{s_i}{s_j(x_i - x_j)} u_j - \frac{3x_i}{2s_i^2} u_i, \quad (9)$$

$$p''_D(u, x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^N (-1)^{i+j-1} \frac{2s_i^2 + 3x_i(x_i - x_j)}{s_j s_i(x_i - x_j)^2} u_j - \frac{(N^2 + 5)s_i^2 + 3x_i^2}{3s_i^4} u_i. \quad (10)$$

Введем обозначения:

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} s_i}{s_j(x_i - x_j)}, \quad a_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{2s_i^2 + 3x_i(x_i - x_j)}{s_j s_i(x_i - x_j)^2}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j, \quad (11)$$

$$n_i = -\frac{3x_i}{2s_i^2}, \quad \nu_i = -\frac{(N^2 + 5)s_i^2 + 3x_i^2}{3s_i^4}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (12)$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad U_x = \begin{pmatrix} (u_x)_1 \\ (u_x)_2 \\ \dots \\ (u_x)_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_1) \\ u_x(x_2) \\ \dots \\ u_x(x_N) \end{pmatrix}, \quad U_{xx} = \begin{pmatrix} (u_{xx})_1 \\ (u_{xx})_2 \\ \dots \\ (u_{xx})_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{xx}(x_1) \\ u_{xx}(x_2) \\ \dots \\ u_{xx}(x_N) \end{pmatrix}$$

и сформируем $N \times N$ матрицы:
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{a}_{12} & \dots & \mathfrak{a}_{1N} \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{n}_2 & \dots & \mathfrak{a}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{a}_{N1} & \mathfrak{a}_{N2} & \dots & \mathfrak{n}_N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \nu_1 & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \nu_2 & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & \nu_N \end{pmatrix}.$$

Для аппроксимации вторых производных в уравнениях (5) получим формулы

$$U_x \approx \mathfrak{A}U + V_x, \quad U_{xx} \approx AU + V_{xx}, \quad (13)$$

где V_x, V_{xx} — векторы с компонентами $(v_x)_i = \frac{1}{2}((\varphi + \psi)x_i + (\psi - \varphi))$, $(v_{xx})_i = \varphi + \psi$, $i = 1, \dots, N$. При наличии других типов краевых условий, используя полиномы p_N, \dots, p_T , несложно записать аналогичные матричные формулы (см. приложение).

Далее для построения алгоритмов воспользуемся спектральным разложением матрицы A , аппроксимирующей вторые производные: $A = R_A D_A R_A^{-1}$, где R_A — матрица собственных векторов A ; D_A — диагональная матрица собственных значений d_A^j матрицы A .

Замечание 2. Строго говоря, при наличии у A пар комплексно-сопряженных собственных значений матрица D_A является блочно-диагональной, содержащей на диагонали блоки размера 2×2 . Однако, как показали численные эксперименты, выбранный базис исключает такую возможность. Удачным обстоятельством является также медленный рост чисел обусловленностей матриц R_A с ростом N , обеспечивающий устойчивость алгоритма к погрешностям округления (см. приложение).

Замечание 3. При численной реализации предложенной методологии матрицы $\mathfrak{A}, A, R_A, D_A, R_A^{-1}$ для различных типов граничных условий и разных N целесообразно занести в базу данных, чтобы не тратить время на их расчет.

В двумерном случае ($d = 2, D = [-1, 1]^2, u(x, y) \in C(D)$ — искомая функция) введем в области D сетку с узлами (x_j, y_k) , где $x_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2N}, y_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2K}, j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, K$. Положим $u_{jk} = u(x_j, y_k), (u_\mu)_{jk} = u_\mu(x_j, y_k)$, где μ обозначает одну из производных и $\mu \in \{x, y, xx, yy, xy\}$. Пусть $U = (u_{jk}), U_\mu = ((u_\mu)_{jk})$ — $N \times K$ матрицы. Пользуясь операцией прямого произведения двух полиномов вида (6) для приближения функции $u(x, y)$ в области D , проводя выкладки, аналогичные (7)–(13) (см. также [4]), получаем матрицы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, A$ и B , аппроксимирующие производные функции $u(x, y)$:

$$U_x \approx \mathfrak{A}U, \quad U_y \approx U\mathfrak{B}, \quad U_{xx} \approx AU, \quad U_{yy} \approx UB, \quad U_{xy} \approx \mathfrak{A}U\mathfrak{B}. \quad (14)$$

Здесь для краткости матрицы, определяющие вклад граничных условий (V_μ), опущены.

В трехмерном случае ($d = 3, D = [-1, 1]^3, u(x, y, z) \in C(D)$ — искомая функция) введем в области D сетку с узлами (x_j, y_k, z_m) , где

$$x_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2N}, \quad y_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2K}, \quad z_m = \cos \frac{(2m-1)\pi}{2M}, \quad j = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K, \quad m = 1, \dots, M.$$

Положим $u_{jkm}^m = u(x_j, y_k, z_m), (u_\mu)_{jkm}^m = u_\mu(x_j, y_k, z_m), \mu \in \{x, y, z, xx, yy, zz, xy, xz, yz\}$. Пусть $U = (u_{jkm}^m), U_\mu = ((u_\mu)_{jkm}^m)$ — трехмерные массивы размера $N \times K \times M$ (рис. 2).

Определим слоистые трехмерные массивы $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$, аппроксимирующие первые и вторые производные функции $u(x, y, z)$ по x, y, z . Пусть $\overline{\mathfrak{a}}_{jk}^m$ и $\overline{\mathfrak{a}}_{jk}^m$ — элементы массивов $\overline{\mathfrak{A}}$ и \overline{A} ; \mathfrak{a}_{jk} и a_{jk} — элементы матриц \mathfrak{A}, A . Слоистые массивы $\overline{\mathfrak{A}}$ и \overline{A} содержат в слоях матрицы \mathfrak{A} и A , расположенные вдоль

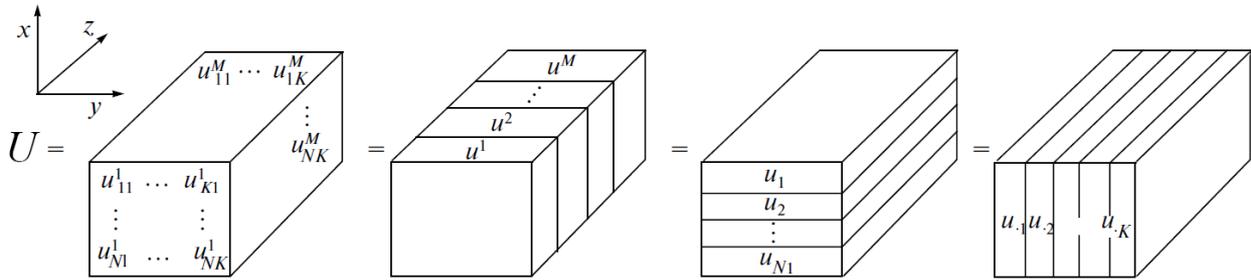


Рис. 2. Трехмерный массив U и его представление в виде совокупности слоев

оси z , т.е. $\forall m \bar{a}_{jk}^m = a_{jk}$, $\bar{a}_{jk}^m = a_{jk}$. Аналогично массивы $\bar{\mathfrak{B}}$, \bar{B} и $\bar{\mathfrak{C}}$, \bar{C} содержат в слоях матрицы \mathfrak{B} , B и \mathfrak{C} , C , расположенные вдоль осей x и y .

Определение 5. Боковым произведением слоистого массива \bar{A} со слоями $A = (a_{js})_{N \times N}$, расположенными вдоль оси z , и массива U называется массив $\alpha = \bar{A} \overset{s}{\times} U$ с элементами $\alpha_{jk}^m = \sum_{s=1}^N a_{js} u_{sk}^m$.

Определение 6. Фронтальным произведением слоистого массива \bar{B} со слоями $B = (b_{ks})_{K \times K}$, расположенными вдоль x , и массива U называется массив $\beta = \bar{B} \overset{f}{\times} U$ с элементами $\beta_{jk}^m = \sum_{s=1}^K b_{ks} u_{js}^m$.

Определение 7. Верхним произведением слоистого массива \bar{C} со слоями $C = (c_{ms})_{M \times M}$, расположенными вдоль y , и массива U называется массив $\gamma = \bar{C} \overset{u}{\times} U$ с элементами $\gamma_{jk}^m = \sum_{s=1}^M c_{ms} u_{jk}^s$.

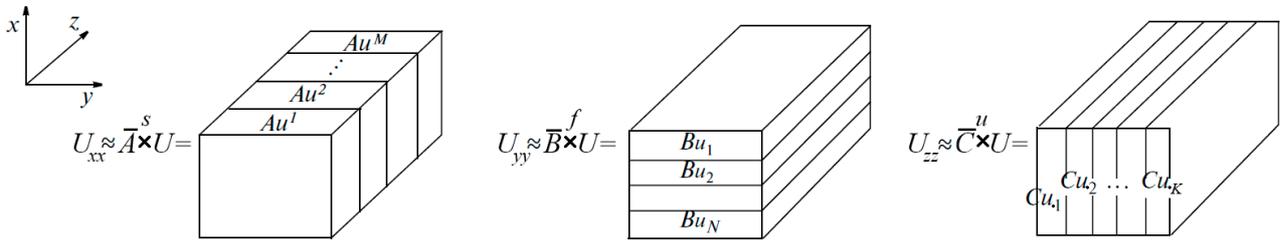


Рис. 3. Боковое, фронтальное и верхнее произведения слоистых массивов, аппроксимирующих производные, и массива решения U

Такие произведения, основанные на размещении слоистого аппроксимирующего массива сбоку, спереди или сверху от U и на произведении матриц, находящихся в смежных слоях, позволяют записать операции дифференцирования в виде (рис. 3)

$$\begin{aligned}
 U_x &\approx \bar{\mathfrak{A}} \overset{s}{\times} U, & U_y &\approx \bar{\mathfrak{B}} \overset{f}{\times} U, & U_z &\approx \bar{\mathfrak{C}} \overset{u}{\times} U, & U_{xx} &\approx \bar{A} \overset{s}{\times} U, & U_{yy} &\approx \bar{B} \overset{f}{\times} U, & U_{zz} &\approx \bar{C} \overset{u}{\times} U, \\
 U_{xy} &\approx \bar{\mathfrak{A}} \overset{s}{\times} \bar{\mathfrak{B}} \overset{f}{\times} U, & U_{xz} &\approx \bar{\mathfrak{A}} \overset{s}{\times} \bar{\mathfrak{C}} \overset{u}{\times} U, & U_{yz} &\approx \bar{\mathfrak{B}} \overset{f}{\times} \bar{\mathfrak{C}} \overset{u}{\times} U.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Основываясь на введенных операциях, можно записать спектральные разложения слоистых массивов, например $\bar{A} = \bar{R}_A \overset{s}{\times} \bar{D}_A \overset{s}{\times} \bar{R}_A^{-1}$, где $\bar{R}_A, \bar{D}_A, \bar{R}_A^{-1}$ — слоистые массивы со слоями, расположенными вдоль оси z и содержащими матрицы R_A, D_A, R_A^{-1} . Описание и обоснование корректности введенных операций, а также метода задания добавочных функций для учета граничных условий дано в [4].

Важно отметить, что рассмотренные способы приближения неизвестной функции и ее производных можно обобщить на случай произвольного порядка и размерности дифференциального уравнения.

2.2. Реализация итерационного метода установления. После аппроксимации неизвестной функции и ее производных в уравнениях (5) приходим к нелинейным соотношениям, записанным для векторов ($d = 1$), матриц ($d = 2$) или d -мерных массивов ($d \geq 3$). Для решения таких соотношений будем строить итерационные процессы на основе *метода установления*.

Пусть имеется краевая задача для уравнения эллиптического типа

$$L(\mathbf{x}, u)u = f(\mathbf{x}, u), \quad u|_{\partial D} = g(\mathbf{x}), \quad (16)$$

где $L = L(\mathbf{x}, u)$ — оператор главных коэффициентов. Метод установления состоит во введении новой временной переменной t и нестационарного оператора — *регуляризации* B_t с последующей заменой исходной краевой задачи (16) на начально-краевую задачу с неизвестной функцией $u(t, \mathbf{x})$:

$$B_t u = L(\mathbf{x}, u)u - f(\mathbf{x}, u), \quad u(t, \mathbf{x})|_{x \in \partial D} = g(\mathbf{x}), \quad u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}). \quad (17)$$

Решение задачи (16) ищется как предел решений (17) при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим простую регуляризацию $B_t = \frac{\partial}{\partial t}$, введем сетку по временной переменной t с постоянным шагом τ и узлами $t_k = \tau k, k = 1, 2, \dots$. Пусть \hat{u}, u — решения на k -м и $(k - 1)$ -м шагах по времени, I — единичный оператор. После дискретизации $B_t \approx \frac{\hat{u} - u}{\tau}$ запишем неявную схему

$$\hat{u} = u + \tau(L\hat{u} - f), \quad \text{или} \quad \hat{u} = (I - \tau L)^{-1}[u - \tau f]. \quad (18)$$

Сходимость итерационного процесса схемы (18) может быть исследована на основе принципа сжимающих отображений [19]. Критерий остановки процесса

$$\|B_t u\| = \|L(\mathbf{x}, u)u - f(\mathbf{x}, u)\| < \varepsilon_S \quad (19)$$

дает приближенное решение задачи (16) с невязкой установления ε_S .

Записывая простую регуляризацию уравнений (5) в соответствии с (18), получим неявные схемы метода установления:

$$\begin{aligned} d = 1 : \left(I - a\tau \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \hat{u} &= u - \tau f(u, x), & d = 2 : \left(I - \tau \left(a \frac{\partial}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \right) \hat{u} &= u - \tau f(u, x, y), \\ d = 3 : \left(I - \tau \left(a \frac{\partial}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial y^2} + c \frac{\partial}{\partial z^2} \right) \right) \hat{u} &= u - \tau f(u, x, y, z). \end{aligned} \quad (20)$$

Аппроксимируя в (20) вторые производные по формулам вида (13), (14), (15), получаем

$$(I - a\tau A)\hat{U} = U - \tau F(U) = H(U), \quad (21)$$

$$\left(I - \tau(aA\hat{U} + b\hat{U}B) \right) = U - \tau F(U) = H(U), \quad (22)$$

$$\left(I - \tau \left(a\overline{A} \overset{s}{\times} \hat{U} + b\overline{B} \overset{f}{\times} \hat{U} + c\overline{C} \overset{u}{\times} \hat{U} \right) \right) = U - \tau F(U) = H(U), \quad (23)$$

где \hat{U}, U — векторы, матрицы или трехмерные массивы, содержащие значения неизвестных функций в узлах интерполяции на текущем и предыдущем временных слоях, F содержит значения правой части в узлах интерполяции. Здесь с целью упрощения выкладок слагаемые, соответствующие неоднородным краевым условиям, опущены.

Умножая (21) на матрицу R_A^{-1} слева, (22) на матрицу R_A^{-1} слева и R_B справа и записывая боковое произведение (23) на слоистый массив $\overline{R_A^{-1}}$, фронтальное произведение на $\overline{R_B^{-1}}$ и верхнее произведение на $\overline{R_C^{-1}}$ с учетом ассоциативности операций произведения, получаем системы с диагональными матрицами и 3D-массивами:

$$\begin{aligned} (I - a\tau D_A)\hat{V} &= G(U), & I - \tau(aD_A\hat{V} + b\hat{V}D_B) &= G(U), \\ I - \tau \left(a\overline{D_A} \overset{s}{\times} \hat{V} + b\overline{D_B} \overset{f}{\times} \hat{V} + c\overline{D_C} \overset{u}{\times} \hat{V} \right) &= G(U), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{где в случае } d = 1 : \hat{V} &= R_A^{-1}\hat{U}, & G(U) &= R_A^{-1}H(U), \\ \text{в случае } d = 2 : \hat{V} &= R_A^{-1}\hat{U}R_B, & G(U) &= R_A^{-1}H(U)R_B, \\ \text{в случае } d = 3 : \hat{V} &= \overline{R_A^{-1}} \overset{s}{\times} \overline{R_B^{-1}} \overset{f}{\times} \overline{R_C^{-1}} \overset{u}{\times} \hat{U}, & G(U) &= \overline{R_A^{-1}} \overset{s}{\times} \overline{R_B^{-1}} \overset{f}{\times} \overline{R_C^{-1}} \overset{u}{\times} H(U). \end{aligned} \quad (25)$$

Решение (24) дается элементарными формулами:

при $d = 1$ компоненты вектора \widehat{V} определяются равенствами $\hat{v}_j = \frac{g_j}{1 - a\tau d_A^j}$;
 при $d = 2$ элементы матрицы \widehat{V} определяются равенствами $\hat{v}_{jk} = \frac{g_{jk}}{1 - \tau(ad_A^j + bd_B^k)}$;
 при $d = 3$ элементы трехмерного массива $\widehat{V} - \hat{v}_{jk}^m = \frac{g_{jk}^m}{1 - \tau(ad_A^j + bd_B^k + cd_C^m)}$.

Здесь g_j, g_{jk}, g_{jk}^m суть компоненты вектора, элементы матрицы или массива G (в зависимости от размерности), d_A^j, d_B^k, d_C^m — собственные значения матриц $A, B, C, j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M$. После вычисления \widehat{V} решения регуляризованных уравнений на текущей итерации находятся так:

$$d = 1 : \widehat{U} = R_A \widehat{V}, \quad d = 2 : \widehat{U} = R_A \widehat{V} R_B^{-1}, \quad d = 3 : \widehat{U} = \overline{R_A} \times \overline{R_B} \times \overline{R_C} \times \widehat{V}. \tag{26}$$

При решении необходимо следить, чтобы выполнялись условия

$$\tau \neq \frac{1}{ad_A^j}, \quad \tau \neq \frac{1}{ad_A^j + bd_B^k}, \quad \tau \neq \frac{1}{ad_A^j + bd_B^k + cd_C^m} \quad \forall j, k, m. \tag{27}$$

2.3. Алгоритм решения задач Неймана–Дирихле для уравнений (5).

1. Задаем начальные значения массива решения U и его производных, присутствующих в задаче. Во многих случаях их можно положить нулевыми.

2. Задаем количество узлов N, K, M и загружаем из базы данных (см. замечание 3) аппроксимирующие матрицы и матрицы их спектральных разложений. В соответствии с (27) и теоремами о сходимости итераций (если такие имеются) задаем шаг τ и невязку ε_S .

3. В соответствии с (21)–(23), (25) рассчитываем элементы массивов $H(U)$ и $G(U)$.

4. По приведенным формулам вычисляем значения элементов массивов \widehat{V} и \widehat{U} (см. (26)) и рассчитываем элементы массивов, аппроксимирующих производные решения, по формулам вида (13), (14), (15).

5. Если $\frac{1}{\tau} \|\widehat{U} - U\| < \varepsilon_S$, то \widehat{U} — решение, иначе задаем $U = \widehat{U}$ и возвращаемся к шагу 3.

Отметим, что доказательство сходимости такого процесса — отдельная задача для каждого нелинейного уравнения. Как правило, обоснованный выбор шага τ позволяет не только добиться сходимости при решении нелинейных задач с малыми параметрами, но и уменьшить число итераций в десятки и даже сотни раз! Спектральный портрет аппроксимирующих матриц при этом играет ключевую роль [8]. Интересные соображения по этому поводу читатель может найти также в [20, 21].

Заметим, что количество операций на каждой итерации определяется следующими факторами — количеством операций, необходимых для выражения G через H и \widehat{U} через \widehat{V} по формулам (25), (26), и количеством производных, присутствующих в правой части $f(u, \mathbf{x})$, которые необходимо рассчитывать на каждой итерации. Пусть по каждому из направлений задано N узлов ($M = K = N$). Ниже приведена сводная таблица о порядке количества операций, совершаемых на каждой итерации, в том числе при наличии в правой части производных по одному направлению или смешанных производных.

Таблица 1

Количество операций на каждой итерации

Размерность задачи	Число операций для вычисления			Порядок числа операций
	G, \widehat{U}	производной по одному направлению	смешанной производной	
d	$2dN^{d+1}$	N^{d+1}	dN^{d+1}	$O(N^{d+1})$

3. Оценки погрешностей. Одним из значительных преимуществ нелокального алгоритма без насыщения, описанного выше, является возможность решения сложных вычислительных проблем с контролем погрешности. Контроль основан на оценках двух компонент погрешности численного решения ε (см. оценку (1)) — погрешности использованного метода приближения ε_M и вычислительной погрешности ε_R , связанной с округлением действительных чисел в памяти ЭВМ: $\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_R$.

3.1. Оценка вычислительной погрешности. При решении задач на ЭВМ, имеющих арифметику с плавающей точкой, необходимо помнить, что длина мантиссы действительного числа в памяти машины ограничена l знаками (в арифметике float $l = 8$, double — $l = 16$, quadruple — $l = 32$ и т.д.). Все

знаки, которые не укладываются в такие рамки, отбрасываются, и в связи с этим при записи числа a в память ЭВМ $a \rightarrow a + \delta_a$ возникает погрешность δ_a , значение которой неизвестно. Однако известна оценка $|\delta_a| \leq \delta|a|$, где δ — относительная погрешность округления — строго фиксирована для каждого типа действительных чисел $\delta = 10^{-l+1}$. В ходе расчетов вычислительные погрешности многократно суммируются (накапливаются), что может приводить к катастрофической потере точности.

Оценки вычислительной погрешности, приведенные ниже, основаны на анализе свойств матричных операторов задач линейной алгебры (21)–(24), которые требуется решать на каждом шаге метода установления. Подобный подход восходит к работам Дж. Деммеля (см. [22]).

Положим, что решение (5) найдено с помощью метода установления как решение задач (21) с невязкой установления ε_S . Учтем следующие факторы.

1. Обозначим δ_X массив, элементы которого суть возмущения элементов некоторого массива X , $\|\delta_X\|$ — максимальное из этих возмущений. Для массива правой части F имеем $F \rightarrow F + \delta_F$, где $\delta_F = \delta_F^S + \delta_F^*$, $\|\delta_F^S\| \leq \varepsilon_S$, т.е. невязку ε_S можно трактовать как компоненту возмущения правой части (см. (19)). Оценка δ_F^* приведена ниже.

2. Элементы массива данных U заданы с погрешностями $U \rightarrow U + \delta_U$.

3. При поиске значений производных от U погрешность возрастает. Будем полагать, что относительная погрешность элементов матриц, аппроксимирующих производные, равна δ , погрешность U может быть произвольной.

В случае $d = 1$, если $A = (a_{ij})_{N \times N}$ — матрица, аппроксимирующая производную, имеем

$$AU \rightarrow (A + \delta_A)(U + \delta_U) = AU + \delta_{AU}, \quad \text{где} \quad \|\delta_{AU}\| \leq \|\delta_A \cdot U\| + \|A \cdot \delta_U\| + \|\delta_A \cdot \delta_U\|, \quad (28)$$

$$\|\delta_A \cdot U\| \leq \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N |(\delta_A)_{ij} u_j| \leq \delta \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \max_{j=1, \dots, N} |u_j| \leq \delta N_A^\infty \|U\|,$$

$$\|A \cdot \delta_U\| \leq \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N |a_{ij} (\delta_U)_j| \leq \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \max_{j=1, \dots, N} |(\delta_U)_j| \leq N_A^\infty \|\delta_U\|.$$

Здесь $(\delta_A)_{ij}$ — возмущение элементов A , $(\delta_U)_j$ — возмущения компонент U , $N_A^\infty = \|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N |a_{ij}|$.

Слагаемое $\|\delta_A \cdot \delta_U\|$ в формуле (28) имеет второй порядок малости по δ , поэтому им пренебрегаем. Таким образом, $\|\delta_{AU}\| \leq N_A^\infty (\delta \|U\| + \|\delta_U\|)$.

Повторяя рассуждения, приведенные выше, при $d = 2$ получаем

$$AU \rightarrow AU + \delta_{AU}, \quad \text{где} \quad \delta_{AU} \leq N_A^\infty (\delta \|U\| + \|\delta_U\|);$$

$$UB \rightarrow UB + \delta_{UB}, \quad \text{где} \quad \delta_{UB} \leq N_B^1 (\delta \|U\| + \|\delta_U\|),$$

$$N_B^1 = \|B\|_1 = \max_{j=1, \dots, K} \sum_{i=1}^K |b_{ij}|, \quad B = (b_{ij})_{K \times K} \text{ — аппроксимирующая матрица};$$

$$AUB \rightarrow AUB + \delta_{AUB}, \quad \delta_{AUB} \leq \|\delta_A \cdot U \cdot B\| + \|A \cdot \delta_U \cdot B\| + \|A \cdot U \cdot \delta_B\| \leq N_A^\infty N_B^1 (2\delta \|U\| + \|\delta_U\|).$$

В случае $d = 3$ имеем

$$\overline{A}^{o1} \times U \rightarrow \overline{A}^{o1} \times U + \delta_{\overline{A}U}, \quad \text{где} \quad \delta_{\overline{A}U} \leq N_A^\infty (\delta \|U\| + \|\delta_U\|);$$

$$\overline{A}^{o1} \times \overline{B}^{o2} \times U \rightarrow \overline{A}^{o1} \times \overline{B}^{o2} \times U + \delta_{\overline{A}\overline{B}U}, \quad \text{где} \quad \delta_{\overline{A}\overline{B}U} \leq N_A^\infty N_B^\infty (2\delta \|U\| + \|\delta_U\|);$$

$$\overline{A}^{o1} \times \overline{B}^{o2} \times \overline{C}^{o3} \times U \rightarrow \overline{A}^{o1} \times \overline{B}^{o2} \times \overline{C}^{o3} \times U + \delta_{\overline{A}\overline{B}\overline{C}U}, \quad \text{где} \quad \delta_{\overline{A}\overline{B}\overline{C}U} \leq N_A^\infty N_B^\infty N_C^\infty (3\delta \|U\| + \|\delta_U\|),$$

$C = (c_{ij})_{M \times M}$ — аппроксимирующая матрица;

$o1, o2, o3 \in \{s, f, u\}$ — операции произведения трехмерных массивов.

Аналогичные оценки вычислительной погрешности можно записать для операций умножения массивов H, V на матрицы R_A, R_A^{-1} при $d = 1, 2$ или на слоистые массивы $\overline{R}_A, \overline{R}_A^{-1}$ при $d = 3$.

4. Возмущение правой части δ_F^* оценивается на основе 2, 3: $\delta_F^* \leq \Psi$, где $\Psi = \Psi(N_{A1}^{1, \infty}, \dots, N_{Al}^{1, \infty}, \delta, \|U\|)$, $N_{A1}^{1, \infty}, \dots, N_{Al}^{1, \infty}$ — нормы матриц, аппроксимирующих производные, стоящие в правой части, функция Ψ строится с учетом структуры функции $f(u, x)$.

Суммируя перечисленные факторы, оценим погрешность решения одномерной задачи ($d = 1$). Погрешность $\|\delta_H\|$, возникающая при вычислении правой части $H(U) = U - \tau F(U)$ регуляризованных уравнений (21), оценивается выражением $\delta\|U\| + \tau[\varepsilon_S + \Psi(N_{\mathfrak{A}}^\infty, \delta, \|U\|)] + \tau\delta\|F(U)\|$. Погрешность $\|\delta_G\|$, возникающая при вычислении правой части $G(U)$ уравнения (24) в случае $d = 1$, оценивается выражением $N_{R_A}^\infty(\delta\|H\| + \|\delta_H\|)$. Вектор \widehat{V} , являющийся решением (24), имеет следующую оценку погрешности:

$$\widehat{V} \rightarrow \widehat{V} + \delta_{\widehat{V}}, \quad \|\delta_{\widehat{V}}\| \leq \frac{\|\delta_G\|}{\min_{j=1, \dots, N} (1 - a\tau d_A^j)}.$$

Оценим погрешность итогового решения краевой задачи ($\widehat{U} \rightarrow \widehat{U} + \delta_{\widehat{U}}$):

$$\varepsilon_R = \|\delta_{\widehat{U}}\| \leq \delta N_{R_A}^\infty \|\widehat{V}\| + \text{cond}_{R_A}^\infty \frac{\delta(\|\widehat{U}\| + \|H\|) + \tau(\varepsilon_S + \Psi + \delta\|F(U)\|)}{\min_{j=1, \dots, N} (1 - a\tau d_A^j)}, \quad (29)$$

где $\text{cond}_{R_A}^\infty = \|R_A\|_\infty \|R_A^{-1}\|_\infty$ — число обусловленности матрицы R_A . Здесь тоже использовано приближенное равенство $\|\widehat{U}\| \approx \|U\|$.

Аналогично могут быть получены оценки для случая $d = 2$:

$$\varepsilon_R \leq 2\delta N_{R_A}^\infty N_{R_B}^1 \|\widehat{V}\| + \text{cond}_{R_A}^\infty \text{cond}_{R_B}^1 \frac{\delta(\|\widehat{U}\| + 2\|H\|) + \tau(\varepsilon_S + \Psi + \delta\|F(U)\|)}{\min_{j,k} |1 - \tau(ad_A^j + bd_B^k)|}. \quad (30)$$

Для случая $d = 3$ имеем

$$\varepsilon_R \leq 3\delta N_{R_A}^\infty N_{R_B}^\infty N_{R_C}^\infty \|\widehat{V}\| + \text{cond}_{R_A}^\infty \text{cond}_{R_B}^\infty \text{cond}_{R_C}^\infty \frac{\delta(\|\widehat{U}\| + 3\|H\|) + \tau(\varepsilon_S + \Psi + \delta\|F(U)\|)}{\min_{j,k,m} |1 - \tau(ad_A^j + bd_B^k + cd_C^m)|}, \quad (31)$$

где $j = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$.

Из формул (29)–(31) видно, что порядок погрешности ε_R определяется величинами норм аппроксимирующих матриц \mathfrak{A} , A , \mathfrak{B} , B , \mathfrak{C} , C и чисел обусловленности матриц собственных векторов R_A , R_B , R_C . Анализ этих величин в зависимости от числа узлов интерполяции дан в приложении.

3.2. Оценка погрешности метода приближения. В первом разделе статьи были даны оценки погрешности метода приближения без насыщения и показано, что точность приближения существенно зависит от гладкости (регулярности) искомой функции. Из этих оценок следует, что порядку гладкости решения соответствует порядок сходимости нелокального алгоритма без насыщения, который может быть определен, например, с помощью правила Рунге. Однако это правило в стандартном виде требует двукратного увеличения количества узлов сетки по каждому направлению, что приводит к существенным вычислительным издержкам уже в случае $d = 2$, поэтому рассмотрим некоторую модификацию правила Рунге. Зададим число узлов по каждому направлению равным N , будем последовательно увеличивать N на единицу и наблюдать величину $\|P_{N+1}(u) - P_N(u)\|$, где u — решение задачи, $P_N(u)$ — его приближение, найденное с помощью разработанного метода. Имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|P_N(u) - u\| &\leq \|P_N(u) - P_{N+1}(u)\| + \|P_{N+1}(u) - u\|, \\ \|P_N(u) - u\| - \|P_{N+1}(u) - u\| &\leq \|P_N(u) - P_{N+1}(u)\|, \\ \varepsilon_M = \|P_N(u) - u\| &\leq \frac{1}{1 - \varkappa_N} \|P_N(u) - P_{N+1}(u)\|. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь $\varkappa_N = \frac{\|P_{N+1}(u) - u\|}{\|P_N(u) - u\|}$, тогда $\varkappa_N \varkappa_{N-1} = \frac{\|P_{N+1}(u) - u\|}{\|P_{N-1}(u) - u\|}$. Далее будем полагать, что в асимптотическом смысле

$$\varkappa_N \varkappa_{N-1} \sim \frac{R_{N+1}(x)}{R_{N-1}(x)}, \quad R_N(x) = |P_N(x) - u(x)|, \quad P_N(x) = P_N(u)(x), \quad (33)$$

где $x \in D$ — любая точка, не входящая в множество узлов рассматриваемых полиномов. В соответствии с результатами раздела 1 для достаточно большого N возможны три случая:

- 1) $u \in W_p^r(M, D)$, степенная сходимость — $\varepsilon_N \sim \frac{(N+1)^{-r}}{N^{-r}} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^r$;
- 2) $u \in C_P^\infty(D)$, экспоненциальная сходимость — $\varepsilon_N \sim \frac{q^{N+1}}{q^N} = q < 1$;
- 3) $u \in \text{Ent}$ имеет порядок 1 и нормальный тип — $\varepsilon_N \sim \frac{q^{N+1}}{(N+1)!} \left(\frac{q^N}{N!}\right)^{-1} = \frac{q}{N+1}$.

Положим, что N — нечетно, тогда 0 — узел интерполяции P_N и в соответствии с (33) $R_N(0) = 0$, $|R_{N+1}(0)| = \varepsilon_N \varepsilon_{N-1} |R_{N-1}(0)|$. После решения задачи с заданным количеством узлов $N-1$, N и $N+1$ найдем

$$\lambda_N = \sqrt{\frac{|P_N(0) - P_{N+1}(0)|}{|P_{N-1}(0) - P_N(0)|}} \quad \text{с учетом} \quad |P_N(x) - P_{N+1}(x)| = |R_N(x) - R_{N+1}(x)|,$$

тогда

$$\lambda_N = \sqrt{\frac{|R_N(0) - R_{N+1}(0)|}{|R_{N-1}(0) - R_N(0)|}} = \sqrt{\frac{|R_{N+1}(0)|}{|R_{N-1}(0)|}} = \sqrt{\varepsilon_N \varepsilon_{N-1}}.$$

В случае 1) имеем $|\varepsilon_N^2 - \varepsilon_N \varepsilon_{N-1}| \sim \left(\frac{N}{N+1}\right)^{2r} - \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^r$, отсюда, пользуясь биномом Ньютона для разложения $(N^2 - 1)^r$, находим

$$|\varepsilon_N^2 - \varepsilon_N \varepsilon_{N-1}| = \frac{|N^{2r} - (N^2 - 1)^r|}{(N+1)^{2r}} \sim \frac{r}{N^2} \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

Поэтому $\lambda_N \rightarrow \varepsilon_N \rightarrow 1$ и $r \sim \log_{N/N+1} \lambda_N$ при $N \rightarrow \infty$.

В случае 2) $\varepsilon_N = \varepsilon = q < 1$, $\varepsilon_N = \varepsilon_{N-1} = q$, откуда $\lambda_N = \varepsilon_N = q < 1$.

В случае 3) $|\varepsilon_N^2 - \varepsilon_N \varepsilon_{N-1}| \sim \frac{q^2}{N(N+1)^2}$. Следовательно, $\lambda_N \rightarrow \varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

В любом случае получаем, что λ_N при достаточно больших N характеризует величину ε_N и, таким образом, определяет порядок сходимости метода приближения и, как следствие, гладкость искомого решения.

4. Тестовые численные эксперименты. В настоящем разделе рассматриваются тестовые краевые задачи для уравнений эллиптического типа с известными точными решениями. Приближенные решения этих задач найдены при использовании нелокального алгоритма без насыщения (НАБН), построены графики зависимости относительной погрешности расчетов от количества узлов интерполяции и графики, характеризующие оценки относительных вычислительной погрешности и погрешности метода. На основе экспериментов получен порядок гладкости рассмотренных решений.

Первая тестовая задача

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = e^x, \quad u(-1) = e^{-1}, \quad u(1) = e \tag{34}$$

имеет точное решение $u_{ex}(x) = e^x$. С помощью описанного метода найдены приближенные значения решения u_j в узлах интерполяции $x_j, j = 1, \dots, N$. Пусть

$$u_{ex,j} = u_{ex}(x_j), \quad \varepsilon_{ex} = M^{-1} \max_{j=1, \dots, N} |u_{ex,j} - u_j|, \quad M = \max_{j=1, \dots, N} u_{ex,j}. \tag{35}$$

На рис. 4а изображена зависимость $\log_{10} \varepsilon_{ex}$ от количества узлов интерполяции N , а также оценки погрешностей $\varepsilon_M, \varepsilon_R$, построенные в соответствии с результатами предыдущих разделов. Поскольку λ_N стремится к нулю при увеличении N (см. рис. 4а), заключаем, что решение задачи — целая функция. Кроме того, $(N+1)\lambda_N \rightarrow q = 0.71$, поэтому имеет место факториальная сходимость и в оценке (32)

$\varepsilon_N = \frac{0.71}{N+1}$. Правая часть оценки (32) изображена на рис. 4а пунктирной линией. Оценка вычислительной погрешности рассчитана на основе (29) при $\Psi = \delta \max_{j=1, \dots, N} e^{x_j} = \delta e^{x_N}, a = 1, \tau = 10^4, \varepsilon_S = \delta = 10^{-15}$.

Отметим, что в области $1 < N \leq 13$ итоговая погрешность определяется величиной ε_M , в то время как при $N > 13$ основное влияние оказывает ε_R .

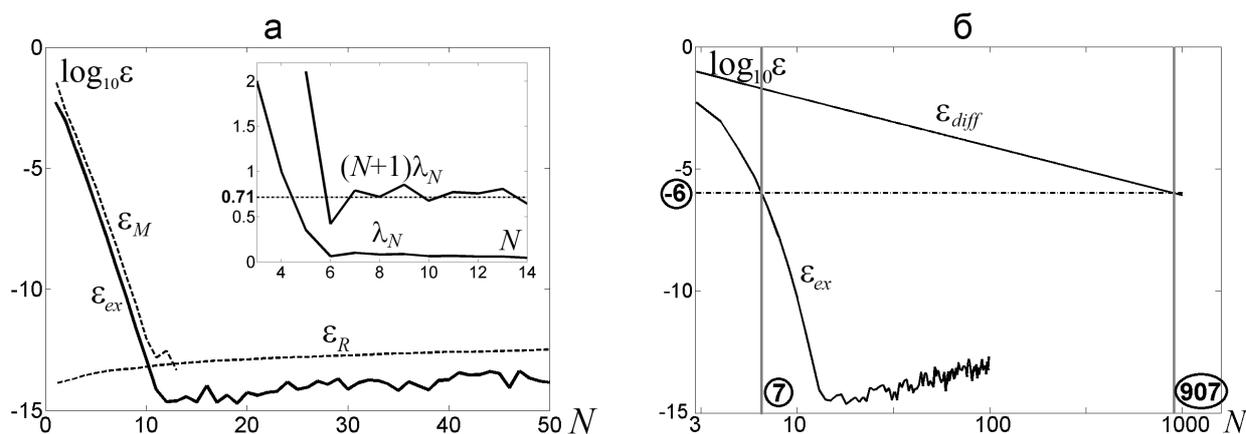


Рис. 4. Зависимость погрешности численных решений (34) от N в логарифмической шкале: а) погрешность ε_{ex} , оценки погрешностей ε_M , ε_R и значения λ_N ; б) сравнение погрешностей КРМ ε_{diff} и НАБН ε_{ex}

Замечание 4. Далее всюду на графиках линии, обозначенные ε_M , ε_R , ε_{ex} , представляют относительные оценки погрешностей: ε_M соответствует значению правой части (32), деленной на M ; ε_R — значению правой части (29)–(31), деленной на M ; ε_{ex} определяется по формуле, аналогичной (35).

Таблица 2
Сравнение числа операций, необходимых КРМ и НАБН для достижения точности 10^{-6}

Размерность задачи	Оценка числа операций		Число операций		Преимущество НАБН
	КРМ	НАБН	КРМ	НАБН	
$d = 1$	$8N$	$2N^2$	7256	98	в 74 раза
$d = 2$	$16N^2$	$4N^3$	1.316×10^7	1372	в 9 594 раза
$d = 3$	$32N^3$	$6N^4$	2.388×10^{10}	14406	в 1 657 404 раза

Таблица 3
Сравнение объемов памяти, необходимых КРМ и НАБН для достижения точности 10^{-6}

Размерность задачи	Оценка объема памяти	Объем памяти, необходимый		Преимущество НАБН
		КРМ	НАБН	
$d = 1$	Ns	907s	$7s + 105s$	в 8 раз
$d = 2$	N^2s	822 649s	$49s + 105s$	в 5 342 раза
$d = 3$	N^3s	7.461×10^8s	$343s + 105s$	в 1 665 497 раз

Решение задачи (34) найдено также с помощью конечно-разностного метода (КРМ) с использованием трехточечной аппроксимации второй производной и метода прогонки. Для достижения заданной точности расчетов $\varepsilon_{ex} = 10^{-6}$ (см. рис. 4б) КРМ требуется построить сетку из $N = 907$ узлов, в то время как нелокальному алгоритму без насыщения (НАБН) достаточно $N = 7$ узлов. Аналогичные результаты имеют место в случае задач более высоких размерностей. В табл. 2 и 3 приведены сравнения вычислительных затрат КРМ и НАБН в 1D, 2D, 3D линейных краевых задачах с оператором Лапласа в левой части, решения которых являются экспоненциальными функциями. При этом для расчетов с помощью КРМ использованы схемы переменных направлений и реализован вариант НАБН с прямым методом обращения оператора Лапласа без регуляризации.

В табл. 3 через s обозначен объем памяти в байтах, занимаемый одним действительным числом, добавка $105s = 7^2s + 7^2s + 7s$ при использовании НАБН связана с необходимостью хранения матриц R_A , R_A^{-1} ,

D_A спектрального разложения аппроксимирующей матрицы A . Очевидно, что при увеличении требований по точности и с ростом размерности d преимущества НАБН в задачах с решениями без особенностей будут стремительно расти. Из табл. 2 очевидно, что методы на основе локальных аппроксимаций (КРМ, МКЭ и др.) в таких задачах значительно проигрывают алгоритмам без насыщения.

Ситуация несколько меняется при решении задач с особенностями в комплексной плоскости. Рассмотрим вторую тестовую задачу

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{50}{(1 + 25x^2)^2} \left(\frac{100x^2}{1 + 25x^2} - 1 \right), \quad u(-1) = \frac{1}{26}, \quad u(1) = \frac{1}{26}, \quad (36)$$

решением которой является функция, известная как пример Рунге $u_{ex}(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$, имеющая особенности в точках $x = \pm \frac{1}{5}i$ на комплексной плоскости. Приближенное решение (36) найдено с помощью НАБН при различном количестве узлов интерполяции N . На рис. 5а приведена зависимость логарифма погрешности решения ε_{ex} от N , а на рис. 5б — динамика величины λ_N . Видно, что при увеличении N имеем $\lambda_N \rightarrow q = 0.8198$, $0 < q < 1$.

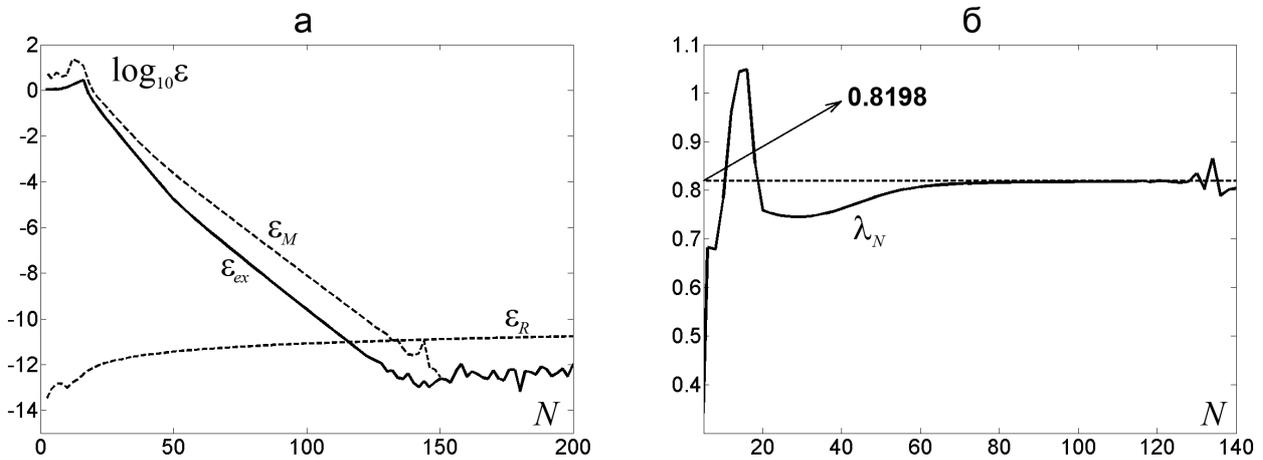


Рис. 5. Численный анализ задачи (36): а) погрешность численного решения ε_{ex} и оценки ε_M , ε_R в логарифмической шкале; б) динамика величины λ_N

Отметим, что значение q с точностью до четвертого знака совпадает с теоретическим значением $q = \frac{1}{\tilde{a} + \tilde{b}}$, где $\tilde{a} \approx 1.0198$, $\tilde{b} = 0.2$ — полуоси эллипса, представляющего область сходимости приближений $\mathcal{T}_N(u_{ex})$ в базисе, состоящем из полиномов Чебышева (см. раздел 1).

Таким образом, для (36) имеет место экспоненциальная сходимость. В соответствии с (32) на графике рис. 5а построена кривая, характеризующая максимальное значение ε_M (пунктир). Другая пунктирная кривая отражает динамику ε_R , соответствующую формуле (29). Хорошо видны области доминирования ε_M ($1 < N \leq 140$) и ε_R ($N > 140$).

Рассмотрим третью тестовую задачу

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} - u = xe^x - |x|(6 - 12x + 2x^2 - 3x^3), \quad u(-1) = e^{-1} - 2, \quad u(1) = e. \quad (37)$$

Такая задача исследована в [23]. Ее решение — функция $u \in C^2([-1, 1])$: $u_{ex}(x) = \begin{cases} e^x - x^3 + x^4, & x \geq 0, \\ e^x + x^3 - x^4, & x < 0. \end{cases}$

Третья производная $u(x)$ терпит разрыв в точке 0, поэтому в соответствии с теоремой 1 наилучшее приближение будет иметь степенную сходимость второго порядка. Решение задачи (37) найдено с помощью НАБН. На рис. 6а представлены зависимости точности приближенного решения ε_{ex} и оценок погрешностей ε_M и ε_R от количества узлов N ; рис. 6б отражает динамику величин λ_N и $\log_{N/N+1} \lambda_N$, из которой видно, что имеет место степенная сходимость (так как λ_N стремится к единице с ростом N) и неизвестная функция обладает вторым порядком гладкости (так как $\log_{N/N+1} \lambda_N$ стремится к двум), т.е. результаты расчетов полностью согласуются с теорией. Отметим, что при решении задачи (37) оценка

(32) является весьма грубой. Для сравнения на рис. 6а приведены результаты, соответствующие оценке (2) (ε_M^* , точки). Заметим также, что во всей области значений N : $1 < N < 500$, приведенной на рис. 6, основной вклад в погрешность вносит ε_M .

В заключение рассмотрим более сложную тестовую задачу, представляющую собой эллиптическое уравнение с нелинейной правой частью и нелинейными условиями Неймана–Дирихле в кубе $[1, 2]^3$:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 6u^3, & u(x, y, 1) = \frac{1}{x + y + 1}, \quad u(x, y, 2) = \frac{1}{x + y + 2}, \\ u_x(1, y, z) = u^2(1, y, z), \quad u_x(2, y, z) = u^2(2, y, z), \\ u_y(x, 1, z) = u^2(x, 1, z), \quad u_y(x, 2, z) = u^2(x, 2, z). \end{cases} \quad (38)$$

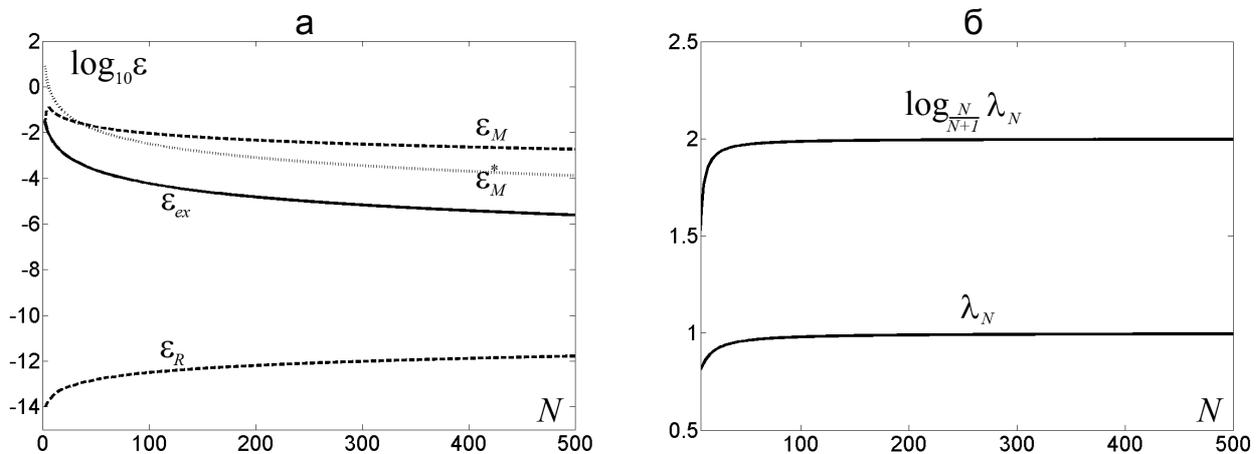


Рис. 6. Численный анализ задачи (37): а) погрешность численного решения ε_{ex} и оценки $\varepsilon_M, \varepsilon_M^*, \varepsilon_R$ в логарифмической шкале; б) динамика величин $\lambda_N, \log_{N/(N+1)} \lambda_N$

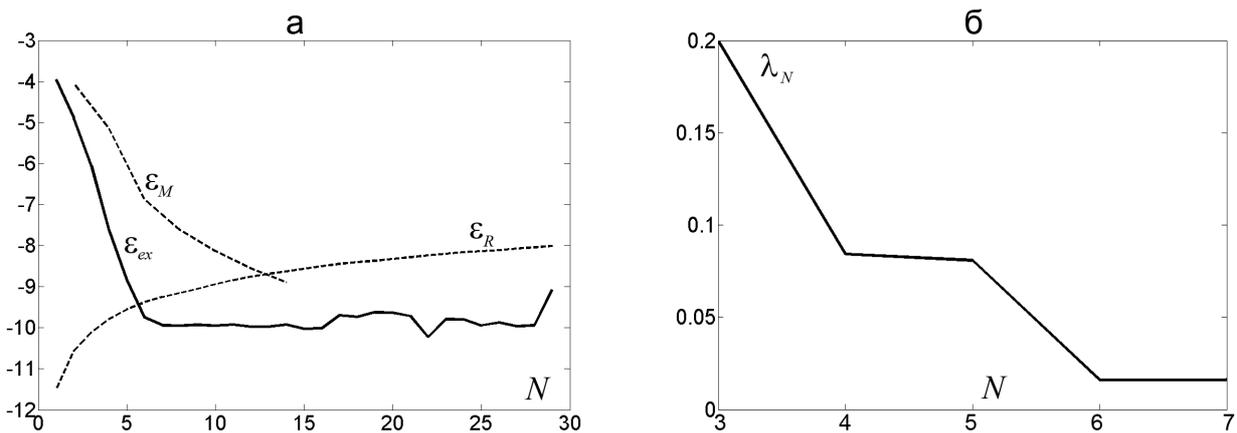


Рис. 7. Численный анализ задачи (38): а) погрешность численного решения ε_{ex} и оценки $\varepsilon_M, \varepsilon_R$ в логарифмической шкале; б) динамика величины λ_N

Точное решение задачи — функция $u_{ex}(x, y, z) = (x + y + z)^{-1}$. Ее приближенное решение найдено с помощью НАБН с использованием добавочных функций $v(x, y, z)$ (см. раздел 2), которые пересчитывались на каждом шаге метода установления для реализации граничных условий. На рис. 7а приведена погрешность численного решения ε_{ex} в логарифмической шкале при различных N (N — количество узлов по каждому направлению) и оценки погрешностей $\varepsilon_M, \varepsilon_R$ в соответствии с (32), (31). Оценка ε_M построена на основе анализа динамики λ_N (см. рис. 7б). Видно, что λ_N достаточно близка к нулю с увеличением N (значения, большие $N = 7$, не показаны, поскольку при использовании больших N сильно сказывается влияние вычислительной погрешности и характер поведения λ_N становится хаотичным).

Заключение. Предложенный нелокальный алгоритм без насыщения позволяет получить существенные преимущества по сравнению с традиционными КРМ и МКЭ в случае, если искомое решение обладает высокой гладкостью, а область решения имеет простую форму (отрезок, прямоугольник, параллелепипед).

Такие ограничения, конечно же, являются весьма значительными, но преодолимыми. Возможным способом решения задач в областях более сложной геометрии является приложение аппарата конформных отображений. В задачах с ограниченной гладкостью решения (в том числе с разрывами) область следует раскраивать по линии разрыва соответствующей производной и ставить краевые задачи в подобластях, где решение обладает высокой гладкостью. Применение описанной здесь техники к решению таких задач является целью дальнейших работ автора.

Автор выражает благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Александру Михайловичу Блохину за обсуждения и ценные советы при выполнении работы.

Приложение. Ниже приведены формулы для вычисления производных от интерполяционных полиномов p_N, p_{M1}, p_{M2}, p_T (см. раздел 2), а также графики зависимости норм и обусловленностей матриц \mathfrak{A} и A , служащих для расчета производных полиномов, от количества узлов интерполяции (рис. 8–12). На рисунках приведены данные, соответствующие первым (сплошная линия), вторым (пунктир) и бесконечным (точки) матричным нормам. Далее полагаем $s = \sqrt{1 - x^2}$, $s_j = \sqrt{1 - x_j^2}$, $u_j = u(x_j)$, $x_j = \cos \frac{(2j - 1)\pi}{2N}$.

Дифференцируя p_N по x , получаем

$$p'_N(u, x) = \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^{j-1}}{s_j^3} \left\{ \frac{s^2(4xx_j - 3x^2 - 1)}{N(x - x_j)^2} T_N(x) + \frac{s^3}{x - x_j} \sqrt{1 - T_N^2(x)} \right\} u_j + \omega'_1(x)u_N + \omega'_{-1}(x)u_1, \quad (39)$$

$$\text{где } \begin{cases} \omega'_1(x) = \frac{(x + 1) [(N^2 + 1)(1 - 3x) + 2]}{4} T_N(x) - \frac{N(x + 1)^2 [(N^2 + 1)x - (N^2 + 2)]}{4s} \sqrt{1 - T_N^2(x)}, \\ \omega'_{-1}(x) = \frac{(-1)^N(x - 1) [(N^2 + 1)(3x + 1) + 2]}{4} T_N(x) + \\ + \frac{(-1)^N N(x - 1)^2 [(N^2 + 1)x + (N^2 + 2)]}{4s} \sqrt{1 - T_N^2(x)}. \end{cases}$$

Добавляя к узлам x_i точки ± 1 и вводя новую нумерацию узлов $x_1 = -1$, $x_i = \cos \frac{(2i - 3)\pi}{2N}$, $i = 2, \dots, N + 1$, $x_{N+2} = 1$, сформируем $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ -матрицу ($\mathfrak{N} = N + 2$), аппроксимирующую первую производную функции, удовлетворяющей однородным условиям Неймана. Переходя в (39) к пределу при $x \rightarrow x_i$ и используя, как и ранее, правило Лопиталя, находим элементы этой матрицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ij} &= (-1)^{i+j} \frac{s_i^3}{s_j^3(x_i - x_j)} \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 2, \dots, N + 1, \\ \mathbf{a}_{i1} &= \frac{(-1)^{i-1} N(x_i + 1)^2}{4s_i} (N^2 - x_i(N^2 + 1) + 2), \quad i = 2, \dots, N + 1, \\ \mathbf{a}_{i,N+2} &= \frac{(-1)^{i+N-1} N(x_i - 1)^2}{4s_i} (N^2 + x_i(N^2 + 1) + 2), \quad i = 2, \dots, N + 1, \\ \mathbf{a}_{1j} &= \mathbf{a}_{N+2,j} = 0, \quad j = 1, \dots, N + 2, \quad \mathbf{n}_i = -\frac{7x_i}{2s_i^2}, \quad i = 2, \dots, N + 1, \quad \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_{N+2} = 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя p_N по x дважды, получаем

$$p''_N(u, x) = \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^{j-1}}{s_j^3} \left\{ \left(\frac{2(1 - x^4) - 4x_j^2 s^2}{N(x - x_j)^3} + \frac{8x^2 - N^2 s^2}{N(x - x_j)} \right) T_N(x) - \right. \\ \left. - \frac{2s^3 + 7sx(x - x_j)}{(x - x_j)^2} \sqrt{1 - T_N^2(x)} \right\} u_j + \omega''_1(x)u_N + \omega''_{-1}(x)u_1, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1''(x) &= \frac{1}{4s^2} \left(N^2(x+1)^2 \left[(N^2+1)x - (N^2+2) \right] - 2 \left[(N^2+1)(3x+1) - 1 \right] s^2 \right) T_N(x) + \\ &\quad + \frac{N}{4s^3} \left(2s^2(x+1) \left[(N^2+1)(1-3x) + 2 \right] + x(x+1)^2 \left[(N^2+2) - (N^2+1)x \right] \right) \sqrt{1 - T_N^2(x)}, \\ \omega_{-1}''(x) &= \frac{(-1)^N}{4s^2} \left(2 \left[(N^2+1)(3x-1) + 1 \right] s^2 - N^2(x-1)^2 \left[(N^2+1)x + N^2 + 2 \right] \right) T_N(x) + \\ &\quad + \frac{N(-1)^N}{4s^3} \left(2s^2(x-1) \left[(N^2+1)(3x+1) + 2 \right] + x(x-1)^2 \left[(N^2+1)x + N^2 + 2 \right] \right) \sqrt{1 - T_N^2(x)}. \end{aligned}$$

Переходя в (40) к пределу при $x \rightarrow x_i$, получаем элементы $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ -матрицы, аппроксимирующей вторую производную:

$$a_{ij} = (-1)^{i+j-1} \frac{2s_i^3 + 7x_i s_i (x_i - x_j)}{s_j^3 (x_i - x_j)^2} \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 2, \dots, N+1,$$

$$a_{i1} = c_1 \left(\left[-N^2 + 5x_i(N^2+1) - 4 \right] x_i^2 + \left[N^2 - x_i(N^2+1) + 2 \right] x_i + 2N^2 - 6x_i(N^2+1) + 6 \right),$$

$$a_{i,N+2} = c_2 \left(- \left[N^2 + 5x_i(N^2+1) + 4 \right] x_i^2 - \left[N^2 + x_i(N^2+1) + 2 \right] x_i + 2N^2 + 6x_i(N^2+1) + 6 \right),$$

где $c_1 = \frac{(-1)^{i-1} N(x_i+1)}{4s_i^3}$, $c_2 = \frac{(-1)^{i+N-1} N(x_i-1)}{4s_i^3}$, $i = 2, \dots, N+1$;

$$a_{1j} = \frac{8(-1)^{j-1}}{Ns_j^3(1-x_j)}, \quad a_{N+2,j} = \frac{8(-1)^{j+N}}{Ns_j^3(1+x_j)}, \quad j = 2, \dots, N+1, \quad a_{1,N+2} = a_{N+2,1} = \frac{(-1)^N(2N^2+3)}{2},$$

$$\nu_i = -\frac{N^2+26}{3s_i^2} + \frac{5}{s_i^4}, \quad i = 2, \dots, N+1, \quad \nu_1 = \nu_{N+2} = -\frac{N^2(5N^2+7)}{3} - \frac{3}{2}.$$

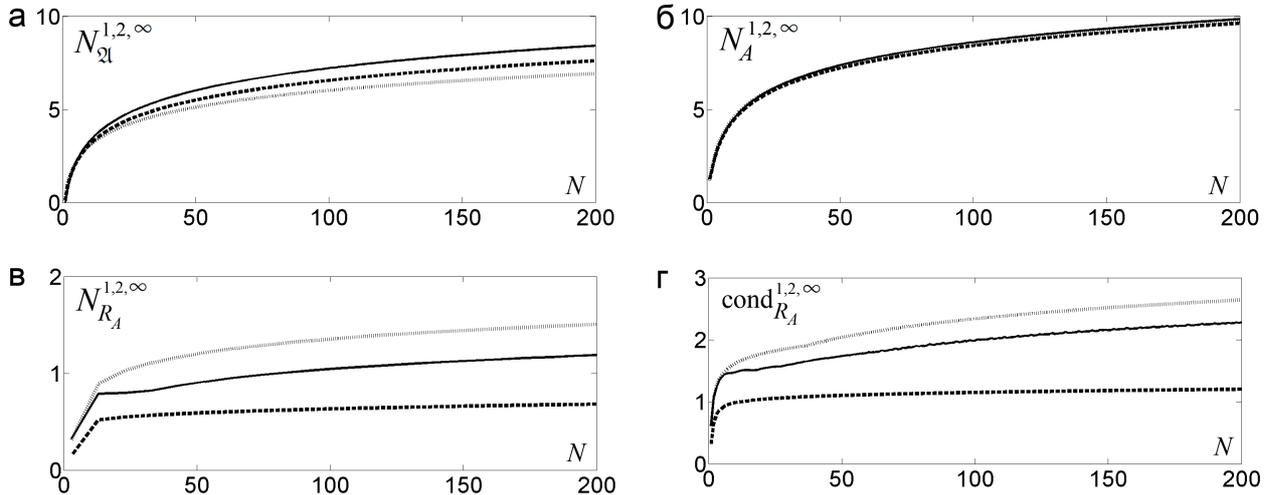


Рис. 8. Значения обусловленностей и норм матриц \mathfrak{Q} , A , R_A , соответствующих однородным условиям Неймана: а) $\log_{10} N_{\mathfrak{Q}}^{1,2,\infty}$, б) $\log_{10} N_A^{1,2,\infty}$, в) $\log_{10} N_{R_A}^{1,2,\infty}$, г) $\log_{10} \text{cond}_{R_A}^{1,2,\infty}$

Дифференцируя p_{M1} по x , получаем

$$p'_{M1}(u, x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(-1)^{j-1}(1-x)}{s_j(x_j-1)} \left\{ \frac{(s^2 + (3x+1)(x-x_j))}{N(x-x_j)^2} T_N(x) - \frac{s}{x-x_j} \sqrt{1 - T_N^2(x)} \right\} u_j + \omega_1'(x) u_N, \quad (41)$$

где $\omega_1'(x) = \left[0.5 - (N^2 + 0.5)x \right] T_N(x) + \frac{N}{2s} \left[s^2(N^2 + 0.5) + x + 1 \right] \sqrt{1 - T_N^2(x)}$.

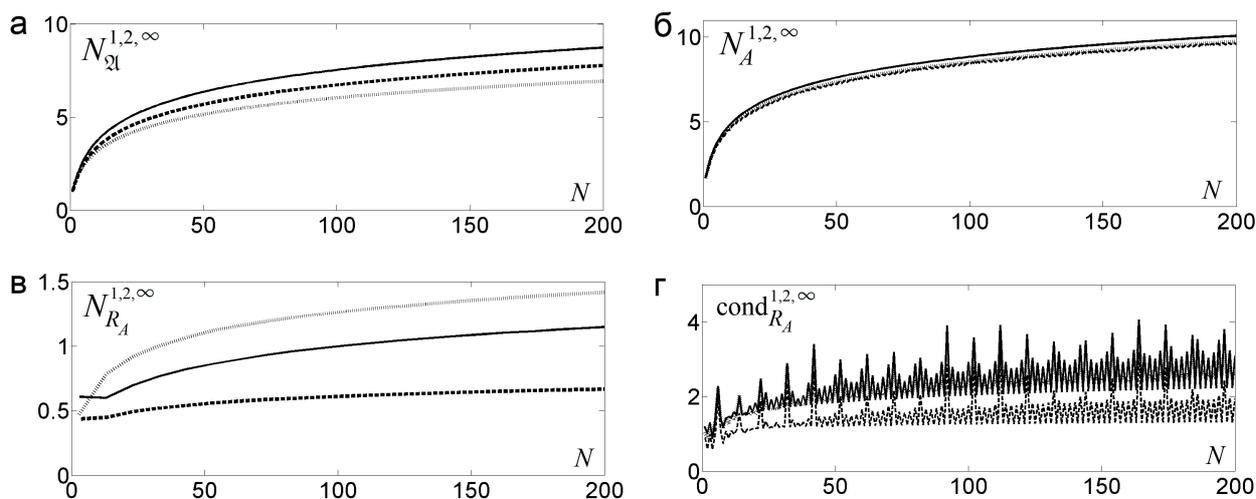


Рис. 9. Значения обусловленностей и норм матриц \mathfrak{A} , A , R_A , соответствующих условиям $u(-1) = 0$, $u'(1) = 0$: а) $\log_{10} N_{\mathfrak{A}}^{1,2,\infty}$, б) $\log_{10} N_A^{1,2,\infty}$, в) $\log_{10} N_{R_A}^{1,2,\infty}$, г) $\log_{10} \text{cond}_{R_A}^{1,2,\infty}$

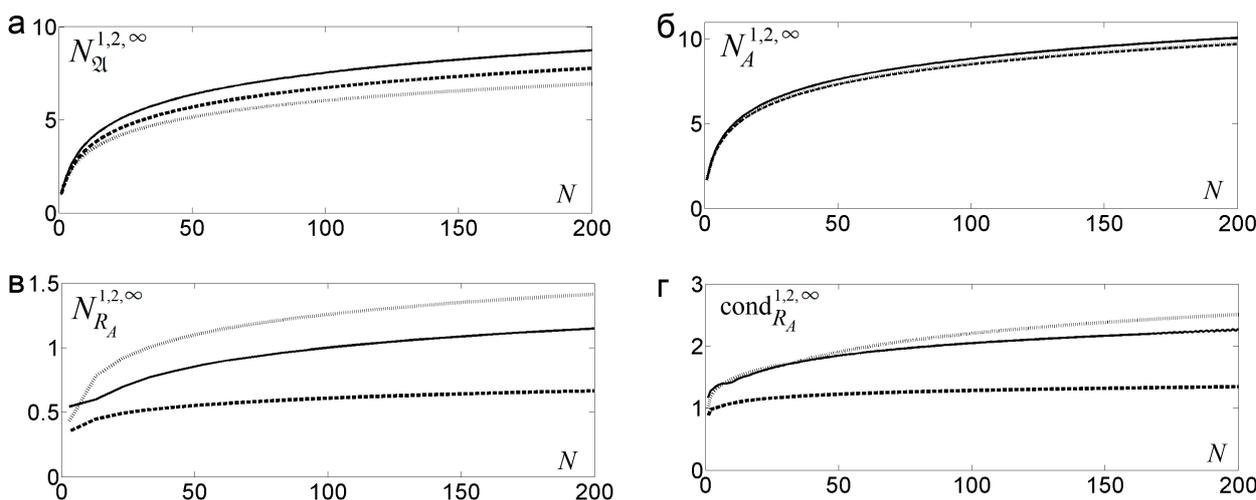


Рис. 10. Значения обусловленностей и норм матриц \mathfrak{A} , A , R_A , соответствующих условиям $u'(-1) = 0$, $u(1) = 0$: а) $\log_{10} N_{\mathfrak{A}}^{1,2,\infty}$, б) $\log_{10} N_A^{1,2,\infty}$, в) $\log_{10} N_{R_A}^{1,2,\infty}$, г) $\log_{10} \text{cond}_{R_A}^{1,2,\infty}$

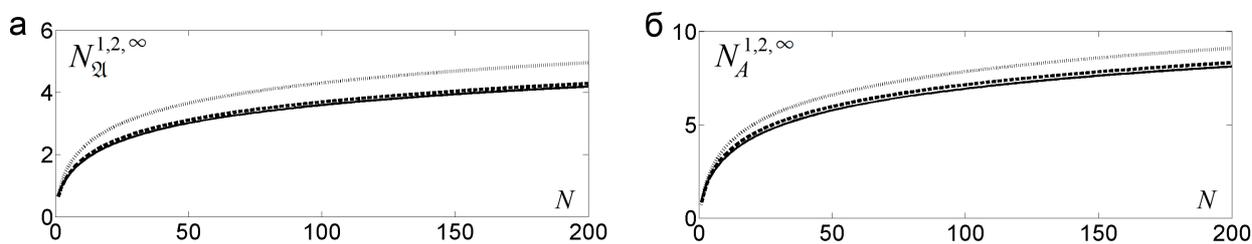


Рис. 11. Значения норм матриц \mathfrak{A} , A , соответствующих произвольным граничным условиям: а) $\log_{10} N_{\mathfrak{A}}^{1,2,\infty}$, б) $\log_{10} N_A^{1,2,\infty}$

Добавляя к нулям полиномов Чебышева точку 1 и вводя новую нумерацию узлов $x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2N}$, $i = 1, \dots, N$, $x_{N+1} = 1$, сформируем $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ -матрицу ($\mathfrak{N} = N+1$), аппроксимирующую первую производную функции $u(x)$, удовлетворяющей однородным условиям $u(-1) = 0$, $u'(1) = 0$. Переходя в (41) к пределу

при $x \rightarrow x_i$ и используя правило Лопиталья, находим элементы этой матрицы:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (-1)^{i+j} \frac{(1+x_i)^2(1-x_i)s_j}{(1+x_j)^2(1-x_j)s_i(x_i-x_j)} \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N, \\ a_{i,N+1} &= \frac{(-1)^{i+N-1}N(x_i-1)}{2s_i} \left[(N^2+0.5)(x_i+1) + 1 \right], \quad i = 1, \dots, N, \\ a_{N+1,j} &= 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad n_i = -\frac{5x_i-2}{2s_i^2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad n_{N+1} = 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя p_{M1} по x дважды, находим

$$\begin{aligned} p''_{M1}(u, x) &= \sum_{j=1}^N l_j^1 \left\{ \left(\frac{2[x_j(3x-1)-x-1]}{N} + \frac{(x-1)[2s^2-N^2(x-x_j)^2]}{N(x-x_j)} \right) T_N(x) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(x-1)[s^2+(3x+1)(x-x_j)-0.5x(x-x_j)]}{s} \sqrt{1-T_N^2(x)} \right\} u_j + \omega_1''(x)u_N, \end{aligned} \tag{42}$$

где $\begin{cases} l_j^1 = \frac{(-1)^{j-1}}{s_j(x-x_j)^2(x_j-1)}, \\ \omega_1''(x) = -\frac{1}{2} \left(N^4 + \frac{5}{2}N^2 + 1 + \frac{N^2}{s^2}(x+1) \right) T_N(x) + \frac{N}{s} \left(1 - 1.5x(N^2+0.5) + \frac{x(x+1)}{2s^2} \right) \sqrt{1-T_N^2(x)}. \end{cases}$

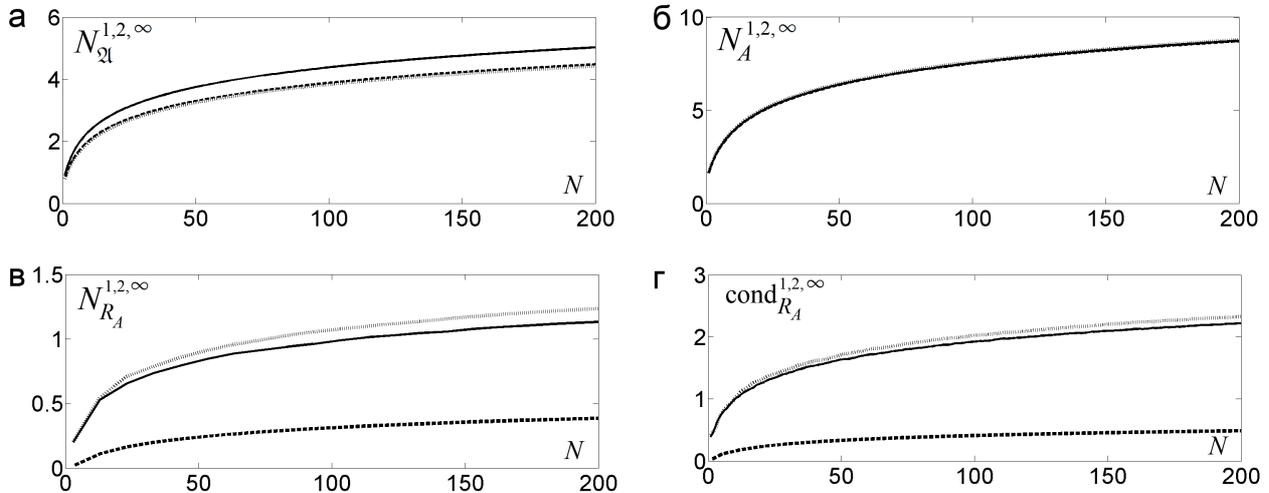


Рис. 12. Значения обусловленностей и норм матриц \mathfrak{A} , A , R_A , соответствующих однородным условиям Дирихле: а) $\log_{10} N_{\mathfrak{A}}^{1,2,\infty}$, б) $\log_{10} N_A^{1,2,\infty}$, в) $\log_{10} N_{R_A}^{1,2,\infty}$, г) $\log_{10} \text{cond}_{R_A}^{1,2,\infty}$

Осуществляя в (42) переход к пределу при $x \rightarrow x_i$, вычисляем элементы $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ -матрицы, аппроксимирующей вторую производную:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (-1)^{i+j} \frac{(x_i-x_j)(2+x_i)(1+x_i) + 2s_i^2(2x_j-x_i+1)}{s_i s_j (x_i-x_j)^2(1+x_j)} \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N, \\ a_{i,N+1} &= \frac{(-1)^{i+N-1}N}{2s_i^3} \left(2s_i^2 \left[2x_i(N^2+0.5) + 1 \right] + x_i \left[(N^2+0.5)(x_i+1) + 1 \right] (x_i-1) \right), \quad i = 1, \dots, N, \\ a_{N+1,j} &= \frac{(-1)^{j+N-1}s_j}{N(1+x_j)^3(1-x_j)}, \quad j = 1, \dots, N, \\ \nu_i &= \frac{1-N^2}{3s_i^2} + \frac{4x_i^2-3x_i-2}{s_i^4}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \nu_{N+1} = \frac{N^2(2-5N^2)}{3}. \end{aligned}$$

Дифференцируя p_{M2} по x , получаем

$$p'_{M2}(u, x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(-1)^j(1+x)}{s_j(x_j+1)} \left\{ \frac{(s^2 + (3x-1)(x-x_j))}{N(x-x_j)^2} T_N(x) - \frac{s}{x-x_j} \sqrt{1-T_N^2(x)} \right\} u_j + \omega'_{-1}(x)u_1, \quad (43)$$

$$\omega'_{-1}(x) = (-1)^{N+1} \left[0.5 + (N^2 + 0.5)x \right] T_N(x) + \frac{N(-1)^N}{2s} \left[s^2(N^2 + 0.5) - x + 1 \right] \sqrt{1-T_N^2(x)}.$$

Добавляя к нулям полиномов Чебышева точку -1 и вводя новую нумерацию узлов $x_1 = -1$, $x_i = \cos \frac{(2i-3)\pi}{2N}$, $i = 2, \dots, N+1$, сформируем $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ -матрицу ($\mathfrak{N} = N+1$), аппроксимирующую первую производную функции $u(x)$, удовлетворяющей однородным условиям $u'(-1) = 0$, $u(1) = 0$. Переходя в (43) к пределу при $x \rightarrow x_i$ и используя правило Лопиталя, находим элементы этой матрицы:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (-1)^{i+j} \frac{(1-x_i)^2(1+x_i)s_j}{(1+x_j)(1-x_j)^2s_i(x_i-x_j)} \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 2, \dots, N+1, \\ a_{i1} &= \frac{(-1)^i N(x_i+1)}{2s_i} \left[(N^2 + 0.5)(x_i-1) - 1 \right], \quad i = 2, \dots, N+1, \\ a_{1j} &= 0, \quad j = 2, \dots, N+1, \quad \mathbf{n}_i = -\frac{5x_i+2}{2s_i^2}, \quad i = 2, \dots, N+1, \quad \mathbf{n}_1 = 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя p_{M2} по x дважды, выводим

$$p''_{M2}(u, x) = \sum_{j=1}^N l_j^2 \left\{ \left(\frac{2[x_j(3x+1)+x-1]}{N} + \frac{(x+1)[2s^2 - N^2(x-x_j)^2]}{N(x-x_j)} \right) T_N(x) - \frac{2(x+1)[s^2 + (3x-1)(x-x_j) - 0.5x(x-x_j)]}{s} \sqrt{1-T_N^2(x)} \right\} u_j + \omega''_{-1}(x)u_1, \quad (44)$$

$$\text{где } \left\{ \begin{aligned} l_j^2 &= \frac{(-1)^{j-1}}{s_j(x-x_j)^2(x_j+1)}, \\ \omega''_{-1}(x) &= (-1)^N \left(\frac{N^2}{2s^2}(x-1) - (N^2 + 0.5)(1 + 0.5N^2) \right) T_N(x) + \\ &\quad + \frac{N(-1)^N}{s} \left(\frac{x(1-x)}{2s^2} - 1.5x(N^2 + 0.5) - 1 \right) \sqrt{1-T_N^2(x)}. \end{aligned} \right.$$

Переходя в (44) к пределу при $x \rightarrow x_i$, вычисляем элементы $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ -матрицы, аппроксимирующей вторую производную:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (-1)^{i+j} \frac{(x_i-x_j)(x_i-1)(x_i-2) + 2s_i^2(2x_j-x_i-1)}{s_i s_j (x_i-x_j)^2(1-x_j)} \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 2, \dots, N+1, \\ a_{i1} &= \frac{(-1)^i N}{2s_i^3} \left(2s_i^2 [2x_i(N^2 + 0.5) - 1] + x_i [(N^2 + 0.5)(x_i-1) - 1](x_i+1) \right), \quad i = 2, \dots, N+1, \\ a_{1j} &= \frac{(-1)^{j-1} s_j}{N(1-x_j)^3(1+x_j)}, \quad j = 2, \dots, N+1, \\ \nu_i &= \frac{1-N^2}{3s_i^2} + \frac{4x_i^2+3x_i-2}{s_i^4}, \quad i = 2, \dots, N+1, \quad \nu_1 = \frac{N^2(2-5N^2)}{3}. \end{aligned}$$

Дифференцируя $p_{\mathcal{T}}$ по x , получаем

$$p'_{\mathcal{T}}(u, x) = \sum_{j=1}^N (-1)^j s_j \left\{ \frac{T_N(x)}{N(x-x_j)^2} - \frac{\sqrt{1-T_N^2(x)}}{s(x-x_j)} \right\} u_j, \quad (45)$$

$$p''_{\mathcal{T}}(u, x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} s_j \left\{ \frac{2s^2 - N^2(x-x_j)^2}{Ns^2(x-x_j)^3} T_N(x) + \frac{3x^2 - xx_j - 2}{s^3(x-x_j)^2} \sqrt{1-T_N^2(x)} \right\} u_j. \quad (46)$$

Переходя в (45), (46) к пределу при $x \rightarrow x_i$ и используя правило Лопиталья, находим элементы матриц, аппроксимирующих первые и вторые производные функций, имеющих произвольные краевые условия:

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} s_j}{s_i(x_i - x_j)}, \quad a_{ij} = (-1)^{i+j-1} \frac{(2s_i^2 - x_i(x_i - x_j))s_j}{s_i^3(x_i - x_j)^2}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j,$$

$$n_i = \frac{x_i}{2s_i^2}, \quad \nu_i = \frac{(1 - N^2)s_i^2 + 3x_i^2}{3s_i^4}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Отметим, что матрица A в данном случае вырождена, ее спектральное разложение тоже дает вырожденную матрицу R_A , поэтому полином p_T может быть использован только для аппроксимации производных, стоящих в правой части уравнения. В заключение отметим несколько важных фактов.

Замечание 5. Для поиска решений краевых задач на отрезке в прямоугольнике или параллелепипеде D с произвольными размерами матрицы \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} следует умножить на число $-2/l$, матрицы A , B , C — на $4/l^2$, где l — длина соответствующей стороны области D .

Замечание 6. Из приведенных формул следует, что нормы матриц первых производных от полиномов p_D , p_T растут пропорционально N^2 , а от полиномов p_N , p_{M1} , p_{M2} — пропорционально N^3 . Нормы матриц вторых производных от полиномов p_D , p_T растут пропорционально N^3 , а от полиномов p_N , p_{M1} , p_{M2} — пропорционально N^5 .

Замечание 7. Для расчета производных, стоящих в правой части уравнений (5), в независимости от типа краевых условий можно использовать матрицы, соответствующие полиному p_T , поскольку такое приближение работает для любого типа граничных условий. Значительным плюсом использования таких матриц является то, что их нормы растут наименее быстро.

Замечание 8. При вычислениях значений производных по формулам (7), (8), (39)–(46) следует учитывать, что если модуль $|x - x_i|$ мал, то возникает существенная погрешность, связанная с округлением действительных чисел в памяти ЭВМ. В ходе вычисления производной от полинома в точке x целесообразно рассмотреть два случая:

- 1) если $|x - x_i| > \varepsilon_D$, то использовать формулы (7), (8), (39)–(46);
- 2) если $|x - x_i| \leq \varepsilon_D$, то слагаемое, соответствующее x_i в формулах (7), (8), (39)–(46), заменить на предельное значение этого слагаемого при $x \rightarrow x_i$, определяемое величиной n_i или ν_i .

Достаточно точный результат может быть получен, если ввести каждое слагаемое (7), (8), (39)–(46) к общему знаменателю и использовать значения $\varepsilon_D = 10^{-8}$ при вычислениях первых производных и $\varepsilon_D = 10^{-4}$ при вычислениях вторых производных. Для более точных расчетов следует проводить асимптотические разложения указанных слагаемых по малому параметру $|x - x_i|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блохин А.М., Алаев Р.Д. Интегралы энергии и их приложения к исследованию устойчивости разностных схем. Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т, 1993.
2. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
3. Бабенко К.И. О явлении насыщения в численном анализе // Докл. АН СССР. 1978. **241**, № 3. 505–508.
4. Семисалов Б.В. Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения // Выч. мат. и мат. физ. 2014. **54**, № 7. 1110–1135.
5. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Научный Мир, 2002.
6. Бельих В.Н. Сверхсходящиеся ненасыщаемые алгоритмы численного решения уравнения Лапласа // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. **5**, № 2. 36–52.
7. Бельих В.Н. О свойствах наилучших приближений C^∞ -гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // Сиб. мат. журн. 2005. **46**, № 3. 483–499.
8. Бельих В.Н. Особенности реализации ненасыщаемого численного метода для внешней осесимметричной задачи Неймана // Сиб. мат. журн. 2013. **54**, № 6. 1237–1249.
9. Jackson D. On Approximation by Trigonometric Sums and Polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 1912. Vol. 13. 491–515.
10. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Сообщ. Харьк. матем. об-ва (2). 1912. **13**. 49–144.
11. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ, 2008.
13. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
14. Lebesgue H. Sur l'approximation des fonctions // Bull. Sci. Math. Ser. 2. 1898. **22**. 278–287.

15. *Dzjaduk V.K., Ivanov V.V.* On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points // *Anal. Math.* 1983. **9**, N 2. 85–97.
16. *Годунов С.К., Прокопов Г.П.* О расчетах конформных отображений и построений разностных сеток // *Журн. выч. мат. и мат. физ.* 1967. **7**, № 5. 1031–1059.
17. *Лисейкин В.Д., Шожин Ю.И., Васева И.А., Лиханова Ю.В.* Технология построения разностных сеток. Новосибирск: Наука, 2009.
18. *Блохин А.М., Ибрагимова А.С., Семисалов Б.В.* Конструирование вычислительного алгоритма для системы моментных уравнений, описывающих перенос заряда в полупроводниках // *Мат. моделирование.* 2009. **21**, № 4. 15–34.
19. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
20. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Эволюционная факторизация и сверхбыстрый счет на установление // *Мат. моделирование.* 2014. **26**, № 9. 47–64.
21. *Коновалов А.Н.* Введение в вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск: Наука, 1993.
22. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001.
23. *Russell R.D., Shampine L.F.* A collocation method for boundary value problems // *Numer. Math.* 1972. **19**. 1–28.

Поступила в редакцию
21.10.2016

A Fast Nonlocal Algorithm for Solving Neumann–Dirichlet Boundary Value Problems with Error Control

B. V. Semisalov^{1,2}

¹ *Novosibirsk State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; ulitsa Pirogova 1, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Assistant, e-mail: vibis@ngs.ru*

² *Institute of Computational Technologies, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Lavrentiev prospekt 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: vibis@ngs.ru*

Received October 21, 2016

Abstract: A method for searching numerical solutions to Neumann–Dirichlet boundary value problems for differential equations of elliptic type is proposed. This method allows reaching a desired accuracy with low consumption of memory and computer time. The method adapts the properties of best polynomial approximations for construction of algorithms without saturation on the basis of nonlocal Chebyshev approximations. A new approach to the approximation of differential operators and to solving the resulting problems of linear algebra is also proposed. Estimates of numerical errors are given. A high convergence rate of the proposed method is substantiated theoretically and is shown numerically in the case of problems with C^r -smooth and C^∞ -smooth solutions. Expressions for arrays approximating the differential operators in problems with various types of boundary conditions are obtained. These expressions allow the reader to quickly implement the method “from scratch”.

Keywords: boundary value problem, fast algorithm, estimation of error, collocation method, relaxation method, nonlocal algorithm without saturation.

References

1. A. M. Blokhin and R. D. Alaev, *Energy Integrals and Their Applications in the Stability Analysis of Difference Schemes* (Novosibirsk, Novosibirsk Univ., 1993) [in Russian].
2. K. I. Babenko, *Fundamentals of Numerical Analysis* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
3. K. I. Babenko, “On the Saturation Phenomenon in Numerical Analysis,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **241** (3), 505–508 (1978) [*Sov. Math. Dokl.* **19**, 859–863 (1978)].
4. B. V. Semisalov, “Non-Local Algorithm of Finding Solution to the Poisson Equation and Its Applications,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **54** (7), 1110–1135 (2014).
5. S. D. Algazin, *Numerical Algorithms without Saturation in the Classical Problems of Mathematical Physics* (Nauchnyi Mir, Moscow, 2002) [in Russian].
6. V. N. Belykh, “Superconvergent Unsaturated Algorithms for the Numerical Solution of the Laplace Equation,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **5** (2), 36–52 (2002).

7. V. N. Belykh, "On the Best Approximation Properties of C^∞ -Smooth Functions on an Interval of the Real Axis (to the Phenomenon of Unsaturated Numerical Methods)," *Sib. Mat. Zh.* **46** (3), 483–499 (2005) [*Sib. Math. J.* **46** (3), 373–385 (2005)].
8. V. N. Belykh, "Particular Features of Implementation of an Unsaturated Numerical Method for the Exterior Axisymmetric Neumann Problem," *Sib. Mat. Zh.* **54** (6), 1237–1249 (2013) [*Sib. Math. J.* **54** (6), 984–993 (2013)].
9. D. Jackson, "On Approximation by Trigonometric Sums and Polynomials," *Trans. Amer. Math. Soc.* **13**, 491–515 (1912).
10. S. N. Bernstein, "On the Best Approximation of Continuous Functions by Polynomials of a Given Degree," *Soobshch. Khar'kov Mat. Obshch.* **13**, 49–144 (1912).
11. V. K. Dzyadyk, *Introduction to the Theory of Uniform Approximation by Polynomials* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].
12. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel'kov, *Numerical Methods* (Binom, Moscow, 2008) [in Russian].
13. M. A. Lavrent'ev and B. V. Shabat, *Methods of Theory of Functions of Complex Variable* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
14. H. Lebesgue, "Sur l'Approximation des Fonctions," *Bull. Sci. Math. Ser. 2* **22**, 278–287 (1898).
15. V. K. Dzyadyk and V. V. Ivanov, "On Asymptotics and Estimates for the Uniform Norms of the Lagrange Interpolation Polynomials Corresponding to the Chebyshev Nodal Points," *Anal. Math.* **9** (2), 85–97 (1983).
16. S. K. Godunov and G. P. Prokopov, "On the Computation of Conformal Transformations and the Construction of Difference Meshes," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **7** (5), 1031–1059 (1967) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **7** (5), 89–124 (1967)].
17. V. D. Liseikin, Yu. I. Shokin, I. A. Vaseva, and Yu. V. Likhanova, *Grid Generation Technology* (Nauka, Novosibirsk, 2009) [in Russian].
18. A. M. Blokhin, A. S. Ibragimova, and B. V. Semisalov, "Designing of Computational Algorithm for System of Moment Equations Which Describe Charge Transport in Semiconductors," *Mat. Mod.* **21** (4), 15–34 (2009).
19. V. A. Trenogin, *Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].
20. A. A. Belov and N. N. Kalitkin, "Evolutionary Factorization and Superfast Relaxation Count," *Mat. Model.* **26** (9), 47–64 (2014) [*Math. Models Comput. Simul.* **7** (2), 103–116 (2015)].
21. A. N. Konovalov, *Introduction to Computational Methods of Linear Algebra* (Nauka, Novosibirsk, 1993) [in Russian].
22. J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra* (SIAM, Philadelphia, 1997; Mir, Moscow, 2001).
23. R. D. Russell and L. F. Shampine, "A Collocation Method for Boundary Value Problems," *Numer. Math.* **19**, 1–28 (1972).