

УДК 550.341

doi 10.26089/NumMet.v17r445

АНАЛИЗ ИНФОРМАТИВНОСТИ И РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ МЕТОДА ОБРАЩЕНИЯ ПОЛНОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ВЕРХНЕЙ ЧАСТИ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО РАЗРЕЗА

К. Г. Гадыльшин¹, Д. А. Неклюдов², И. Ю. Сильвестров³

Изучается влияние волны Рэлея на результат обращения полного волнового поля. Показано, что разрешающая способность борновского оператора выше в случае отсутствия рэлеевских волн в наблюдаемых данных. Предложен численный алгоритм, позволяющий анализировать влияние различных параметров обратной динамической задачи сейсмологии на результат восстановления верхней части геологического разреза: геометрии системы наблюдений, частотного диапазона, параметризации упругой модели и др. В качестве демонстрационного примера показано, что для поверхностной системы наблюдений в задаче реконструкции макроскоростного строения среды наиболее приемлема параметризация упругой модели через скорости продольных и поперечных волн и плотность.

Ключевые слова: метод обращения полного волнового поля, SVD-анализ, разрешающая способность, обратная динамическая задача сейсмологии, свободная поверхность, волны Рэлея, связность упругих параметров.

1. Введение. В настоящее время все существеннее сказывается тот факт, что нефтяные месторождения, расположенные в наиболее доступных и изученных районах, начинают истощаться. Поиск новых месторождений приходится вести в районах с весьма сложными геологическими условиями. При этом возникает необходимость применять новые методы регистрации и обработки геофизических данных, которые позволили бы извлекать как можно более полную и достоверную информацию о строении среды. При разработке новых систем наблюдений и процедур обработки важным этапом является их теоретическое обоснование: анализ тех возможностей и ограничений, которыми они в принципе обладают, и выявление тех условий, при которых они дают наилучший результат.

Общепризнано, что одним из самых общих методов извлечения количественной информации об упругих параметрах среды из сейсмических данных является обращение полных волновых полей (синонимы: решение обратной динамической задачи сейсмологии (ОДЗ), full-waveform inversion (FWI) и сейсмическая инверсия). Как правило, ОДЗ формулируется как нелинейная задача минимизации целевого функционала, характеризующего (в некоторой норме) невязки сейсмограмм, зарегистрированных в ходе полевых работ, а также рассчитанных синтетических сейсмограмм. Обзор, посвященный состоянию дел в данной области, и ссылки на основные источники могут быть найдены в [1].

Теоретически при обращении полных волновых полей должна использоваться вся полезная информация, содержащаяся в зарегистрированных сейсмограммах, которая может быть объяснена в рамках выбранной математической модели. Причем ее “извлечение” происходит автоматически с минимальным вмешательством человека. В силу того, что оптимизацию приходится вести для очень большого количества параметров (с этим фактом напрямую связана необходимость многократного решения прямой задачи, а моделирование полных волновых полей само по себе требует значительных вычислительных затрат), выбор методов оптимизации ограничивается методами градиентного типа. Возможность достоверного решения обратной динамической задачи в такой постановке определяется поведением целевого функционала в окрестности глобального минимума (т.е. “правильной” модели). На этапе планирования эксперимента это соображение позволяет перейти к рассмотрению ОДЗ в линеаризованной постановке, где линеаризация производится относительно “правильной” модели. В “правильную” модель закладываются основные характеристики геологического строения интересующего района, а также целевого объекта, свойства которого наиболее интересны при проведении сейсмических исследований.

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН (ИНГГ СО РАН), пр. Коптюга, 630090, г. Новосибирск; мл. науч. сотр., e-mail: gadylshinkg@ipgg.sbras.ru

² Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН (ИНГГ СО РАН), пр. Коптюга, 630090, г. Новосибирск; ст. науч. сотр., e-mail: NeklyudovDA@ipgg.sbras.ru

³ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН (ИНГГ СО РАН), пр. Коптюга, 630090, г. Новосибирск; ст. науч. сотр., e-mail: SilvestrovIY@ipgg.sbras.ru

Линеаризованный оператор ОДЗ может быть аппроксимирован матрицей. Фундаментальные свойства решения и математическая взаимосвязь параметров модели с параметрами системы наблюдений содержатся в этой матрице и могут быть детально проанализированы с привлечением хорошо развитого аппарата линейной алгебры [2]. Для этого строится сингулярное разложение (SVD — Singular Value Decomposition) матрицы ОДЗ, на основании которого в общем виде может быть оценено качество решения (его разрешенность и устойчивость) при различных сценариях проведения наблюдений и заданном уровне помех.

2. Теория и методы.

2.1. Обратная динамическая задача сейсмологии. В рамках настоящей статьи рассматриваются уравнения линейной динамической теории упругости для двумерных изотропных сред в области временных частот в следующей форме:

$$\left(i\omega M(x, z) + P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{U} = \mathbf{f}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{U} = (u_x, u_z, \sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz})^T$, \mathbf{f} — правая часть и матрицы M , P и Q имеют вид

$$M = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)}$, $b = \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)}$, $c = \frac{1}{\mu}$, λ , μ — коэффициенты Ламе, u_x , u_z — компоненты вектора смещений, а σ_{xx} , σ_{zz} , σ_{xz} — компоненты тензора напряжений.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченное подмножество. Решив систему дифференциальных уравнений в частных производных (1) при заданных в Ω функциях $\lambda(x, z)$, $\mu(x, z)$, $\rho(x, z)$ и краевых условиях на $\partial\Omega$ (в данной работе используются поглощающие граничные условия PML (Perfectly Matched Layer) [11]), получим функцию \mathbf{U} . Взяв след решения в конечном наборе точек (в дальнейшем — сейсмоприемниках), получим элемент пространства данных d : $d = (u_x(\mathbf{x}_{r_1}), u_z(\mathbf{x}_{r_1}), \dots, u_x(\mathbf{x}_{r_{NR}}), u_z(\mathbf{x}_{r_{NR}}))^T$, где $\{\mathbf{x}_{r_k}\}_1^{NR}$ — координаты сейсмоприемников, u_x , u_z — горизонтальные и вертикальные компоненты вектора смещений соответственно. Таким образом, мы задали отображение F пространства упругих моделей сред M в пространство данных D (более формальное описание приведено ниже в приложении): $F : M \rightarrow D$. Оператор F принято называть оператором прямого моделирования. В этих обозначениях обратная динамическая задача сейсмологии формулируется как следующее нелинейное операторное уравнение: $F(m^*) = d^*$, где $d^* \in D$ — наблюдаемые в приемниках сейсмические данные (полные волновые поля) и $m^* \in M$ — искомое решение ОДЗ.

2.2. Линеаризованное обращение и анализ различных сценариев обратной динамической задачи сейсмологии. Анализируя свойства оператора прямой задачи F , можно попытаться “предсказать”, какой наилучший результат может быть достигнут при решении обратной задачи в заданных условиях и насколько устойчивы будут получаемые решения к помехам с теми или иными статистическими характеристиками. Наиболее просто подобный анализ может быть выполнен для линейных задач

$$Lm = d, \quad (2)$$

где матрица L представляет собой дискретизованный линеаризованный оператор обратной динамической задачи (см. приложение); m — вектор, описывающий поправку к априорно заданному распределению параметров модели (референтная модель); правая часть d — невязка наблюдаемых данных относительно данных, рассчитанных в референтной модели (в нашем случае данные — это зарегистрированные волновые поля, а именно компоненты векторов смещений, измеренные в точках приема). В случае изотропной упругой среды вектор m состоит из трех параметров: скоростей продольных и поперечных волн V_p и V_s и плотности ρ . Напомним, что скорости продольных и поперечных волн связаны с коэффициентами Ламе следующим образом: $V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. В принципе, можно брать различные наборы трех параметров — и указанные выше, и параметры Ламе, и продольные и поперечные импедансы, и коэффициенты Пуассона и модуль Юнга и др. Одна из целей настоящей работы как раз и состоит в разработке

численного подхода к определению оптимальной параметризации упругой среды при решении конкретной обратной задачи при заданной системе наблюдений и форме зондирующего сигнала.

Формально решение линейного уравнения (2) может быть записано в виде: $m_{\text{est}} = L^\dagger d$, где L^\dagger — псевдообратная матрица и m_{est} некоторая оценка искомого распределения упругих параметров. В силу фундаментальных причин, таких как несовершенная математическая модель, задаваемая матрицей L , свойства самой матрицы L , помехи в данных, характеристики которых подчас неизвестны, — “точное” решение никогда не может быть получено (т.е. $L^\dagger = L^{-1}$).

Одним из способов анализа линейризованных обратных задач и построения регуляризированной “псевдообратной” матрицы L^\dagger является сингулярное разложение (SVD): $L = U\Sigma V^*$.

Столбцы матриц V и U (правые и левые сингулярные векторы) образуют ортогональные базисы в пространстве моделей и пространстве данных соответственно. Диагональная матрица $\Sigma = \text{diag}(\sigma_j)$ состоит из сингулярных чисел, расположенных в невозрастающем порядке: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$. Более подробно с основными аспектами SVD-анализа можно ознакомиться в [5, 6].

В настоящей работе мы рассматриваем составную линейную систему ($Lm = d$):

$$\begin{bmatrix} L(\omega_1) \\ \vdots \\ L(\omega_{Nf}) \end{bmatrix} m = \begin{pmatrix} \mathbf{d}(\omega_1) \\ \vdots \\ \mathbf{d}(\omega_{Nf}) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь $L(\omega_j)$ — дискретизованный линейризованный оператор обратной динамической задачи на фиксированной частоте ω_j , которая является первой производной оператора прямого моделирования $\frac{\delta F}{\delta m}(\omega_j)$ (см. приложение).

В том факте, что рассматривается составная система вида (3), заключается ряд преимуществ. Прежде всего, это возможность учесть вклад каждой частотной компоненты в общее решение и изучить влияние заранее выбранного частотного диапазона на качество решения. В такой постановке можно промоделировать любую форму зондирующего сигнала, например максимально сосредоточенного во времени, частотные составляющие которого имеют одинаковое значение, т.е. равноценны. Приводя систему (3) к нормальному виду, т.е. подействовав справа сопряженным оператором L^* , получим:

$$\left[\sum_j L^* L(\omega_j) \right] m = \sum_j L^* \mathbf{d}(\omega_j), \quad j = 1, \dots, Nf,$$

где Nf — количество рассматриваемых временных частот. В данной работе использовались численные методы построения SVD, не требующие явного задания матрицы (см. раздел 2.3). В силу симметричности матрицы L^*L ее SVD-разложение имеет вид $L^*L = V\Sigma V^*$. Оценка искомого возмущения находится как действие r -псевдообратной матрицы [6] на данные:

$$m_{\text{est}} = (L^*L)_r^\dagger(L^*d) = (V\Sigma_r^{-1}V^*)(L^*d).$$

Диагональные элементы матрицы $\Sigma_r^{-1} = \text{diag}(\sigma_j^{-1})$ равны нулю начиная с заранее заданного индекса r . Индекс r определяет число обусловленности усеченной системы: $\text{cond} = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$, т.е. устойчивость решения к помехам и его разрешенность. В данном случае индекс r суть регуляризирующий параметр.

Решение обратной задачи всегда подразумевает компромисс между разрешенностью результата и его устойчивостью. Улучшение разрешающей способности может достигаться только за счет потери устойчивости. При этом важнейшим фактором является предполагаемый тип и уровень помех в данных. Регуляризирующий параметр контролирует этот фундаментальный компромисс (иллюстрирующий пример будет приведен ниже). При решении практических задач выбор оптимального параметра регуляризации весьма нетривиален. Эта проблема хорошо изучена, ей посвящено множество публикаций (обзор может быть найден, например, в монографиях [3, 12]). Как итог, предложен ряд подходов, которые могут оказаться приемлемыми в тех или иных ситуациях. Однако сам факт их многообразия говорит о том, что не существует эффективного способа, годного “на все случаи жизни”.

2.3. Вычислительный алгоритм построения SVD. Оператор прямого моделирования F представляет собой набор решений уравнений линейной динамической теории упругости в частотной области

для набора временных частот и различных положений источника. Его программная реализация имеет несколько уровней параллелизма. На первом уровне производится распараллеливание по временным частотам, что логично, так как при заданной скоростной модели и различных временных частотах получаются разные системы линейных алгебраических уравнений. Для каждой временной частоты строится своя группа MPI-процессов, количество которых задается во входном файле настроек. Управление всеми частотными группами (всего Nf штук) осуществляется путем создания выделенного управляющего MPI-процесса.

Следующий уровень параллелизма — независимое распараллеливание каждой частотной группы, которое достигается за счет параллельной реализации LU-разложения в библиотеке SuperLU [7], что обуславливает хорошую масштабируемость вычислительного алгоритма (фактически масштабируемость определяется эффективностью использованных высокооптимизированных математических библиотек).

Вычисление производной Фреше оператора прямого моделирования $\frac{\delta F}{\delta m}$ также сводится к набору решений уравнений линейной динамической теории упругости, а значит, для расчетов можно использовать аналогичную схему распараллеливания.

Для сокращения объема вычислений используется итерационный метод построения старших сингулярных чисел и соответствующих им сингулярных векторов, не требующий явного задания матрицы [8, 9]. Его реализация выполняется с использованием специализированной библиотеки SLEPc (Scalable Library for Eigenvalue Problem Computations), ориентированной на высокопроизводительные вычислительные системы с параллельной архитектурой (<http://www.grupar.upv.es/slep/>). Для проведения вычислений необходимо задать параметр r , т.е. размерность устойчивого пространства, и иметь подпрограмму, вычисляющую действие матрицы на произвольный вектор.

Алгоритм расчета SVD состоит из двух стадий:

1. инициализация,
2. итерационный процесс построения старших сингулярных чисел и соответствующих им сингулярных векторов.

На стадии инициализации создаются частотные группы MPI-процессов и управляющий MPI-процесс. Управляющий процесс считывает файл настроек, в котором указывается вся необходимая информация для расчетов, в частности, параметры регулярной сетки, параметры PML, набор временных частот, путь к файлу с упругой моделью среды, в окрестности которой производится линеаризация задачи, количество MPI-процессов на каждую частотную группу, конфигурация системы наблюдения (расположение источников и приемников), количество старших сингулярных векторов. Далее по очереди настройки считывают все частотные группы процессов. Затем независимо друг от друга каждая частотная группа генерирует соответствующую ей матрицу, ассоциированную с прямой задачей на текущей временной частоте, и обращается к библиотеке SuperLU для построения LU-факторов. Когда LU-факторы построены, частотная группа переходит в режим ожидания. Параллельно с инициализацией частотных групп управляющий процесс создает экземпляр класса из библиотеки SLEPc, которому необходимо указать, какой из итерационных методов расчета SVD будет использоваться, значение толерантности (вещественное число, характеризующее допустимый уровень относительной погрешности расчета сингулярных чисел и векторов) и размерность задачи.

Непосредственно вычисление SVD начинается, когда запускается итерационный процесс, инициированный библиотекой SLEPc. Этот процесс требует задания процедуры, вычисляющей действие производной Фреше $\frac{\delta F}{\delta m}(m)\langle h \rangle$ на произвольный вектор h . Причем каждую компоненту $\frac{\delta F^j}{\delta m}(m)\langle h \rangle$ производной, соответствующую частоте ω_j , можно считать независимо от остальных частотных групп MPI-процессов.

Расчет производной $\frac{\delta F}{\delta m}(m)\langle h \rangle$ реализуется следующим образом: управляющий процесс отправляет каждой группе вектор h и переходит в режим ожидания; в свою очередь, частотные группы, находящиеся в режиме ожидания, получают вектор h и начинают расчет своей компоненты производной; как только расчет завершается, данные отправляются на управляющий процесс и частотная группа опять переходит в режим ожидания. Схема MPI-обменов расчета производной изображена на рис. 1.

3. Численные эксперименты. В этом разделе мы приведем примеры использования описанной выше методологии анализа сценариев обратной динамической задачи сейсмологии.

Мы рассмотрим два примера, весьма актуальных с точки зрения применения метода обращения полных волновых полей для решения практических задач. В первом эксперименте мы попытаемся ответить на следующий вопрос: как влияет учет свободной поверхности на результаты классического обращения

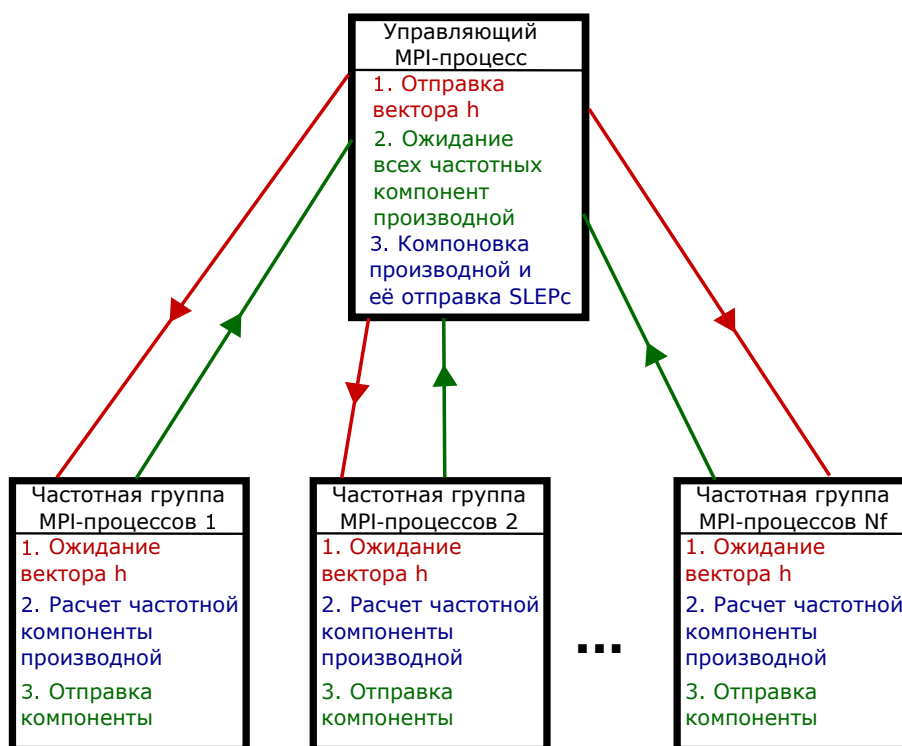


Рис. 1. Блок-схема расчета действия производной $\frac{\delta F}{\delta t}(m)\langle h \rangle$ на вектор h

полного волнового поля, улучшает ли присутствие волн Рэлея в полном волновом поле результат классического обращения или же наоборот, этот тип волн должен быть предварительно подавлен? Во втором примере мы проанализируем, как влияет выбор двух различных параметризаций восстанавливаемой изотропной упругой модели. Мы сравним параметризацию модели через скорости продольных и поперечных волн плюс плотность и параметризацию через продольные и поперечные импедансы плюс плотность.

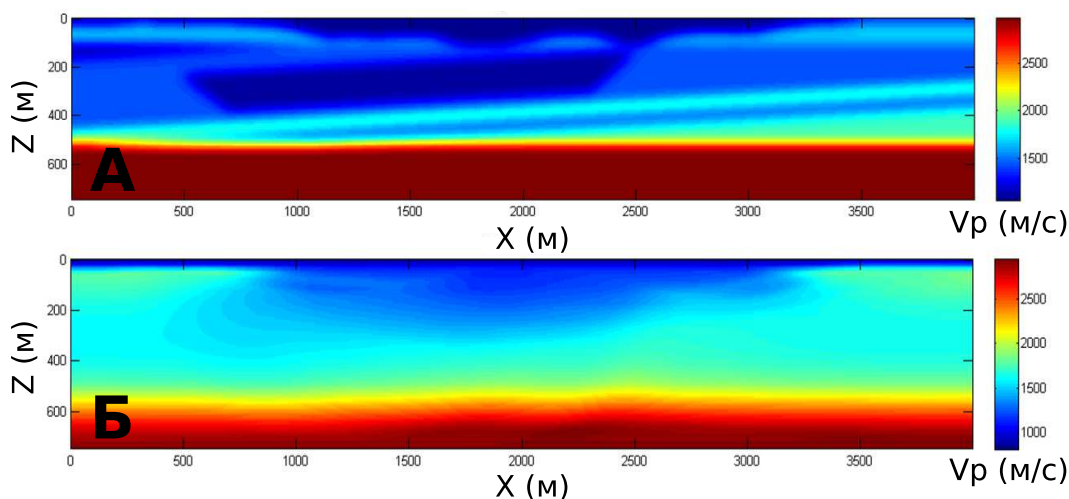


Рис. 2. Скорости продольных волн V_p для истинной модели (а) и для начального приближения (б)

3.1. Эксперимент 1. Идеология первого эксперимента заключается в следующем. На рис. 2а представлена “правильная” скоростная модель, на рис. 2б — “начальная” скоростная модель (скорости продольных волн, V_p). Вопрос, на который мы пытаемся ответить при анализе двух сценариев упругого обращения (сценарии с учетом свободной поверхности и без нее), состоит в следующем: теоретически при каком из сценариев мы можем наилучшим образом восстановить поправку к начальной скоростной модели, приближающую ее к “правильной”. Под идеальной поправкой к модели мы имеем в виду прямую

разность: “поправка” — это “правильная модель” минус “начальная модель”. Для каждого из сценариев мы строим заданный набор сингулярных чисел и правых сингулярных векторов, образующих в пространстве моделей каждого из операторов устойчивое подпространство. Сравнивая поведение сингулярных чисел, можно сделать важные выводы об эффективности обращения в каждом из случаев. Для того чтобы сделать эти заключения более наглядными, мы вычисляем проекции “идеальной поправки” на устойчивые подпространства каждого из операторов. Число правых сингулярных векторов в устойчивых подпространствах определяется заданным наперед числом обусловленности, в данном примере $\text{cond} = 1000$ для обоих сценариев.

Скорости поперечных волн V_s были взяты путем масштабирования скоростей продольных волн $V_s = \frac{1}{\sqrt{3}} V_p$, а плотность вычислялась по известной в петрофизике эмпирической формуле Гарднера [10]: $\rho = 0.23 \times V_p^{0.25}$ (эти соотношения достаточно адекватно описывают связь трех упругих параметров V_p , V_s , ρ для осадочных пород — наиболее распространенного объекта сейсмических исследований). Размер области, в которой проводятся расчеты, составляет 4000 м по латерали и 800 м в глубину, т.е. в данном примере мы предполагаем, что процедура обращения полных волновых полей специально ориентируется на восстановление распределения упругих параметров в верхней части разреза. Дискретизация области реконструкции была выбрана следующей: $N_x = 790$, $N_z = 150$, шаги дискретизации $h_x = h_z = 5$ м.

Система наблюдения состоит из 195 приемников, расположенных на поверхности $Z = 0$ с шагом 20 м. Приемники регистрируют две компоненты вектора смещений упругих колебаний u_x и u_z . Источники колебаний типа вертикальной силы двигаются по поверхности с шагом 350 м (всего 12 источников). В

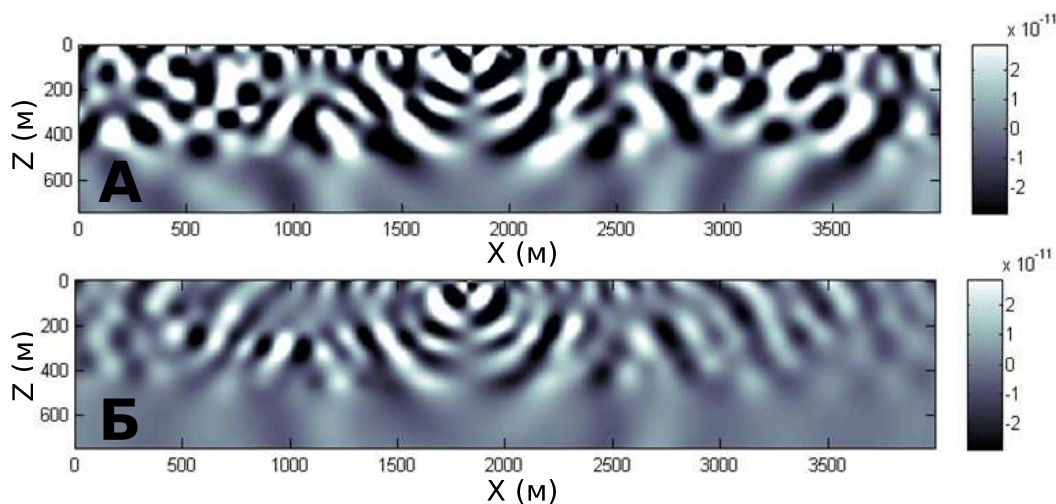


Рис. 3. Полное волновое поле (компонента u_x) на частоте 3 Гц, рассчитанное в истинной скоростной модели, в случае со свободной поверхностью (СП) (а) и без СП (б). X -координата источника — 1800 м

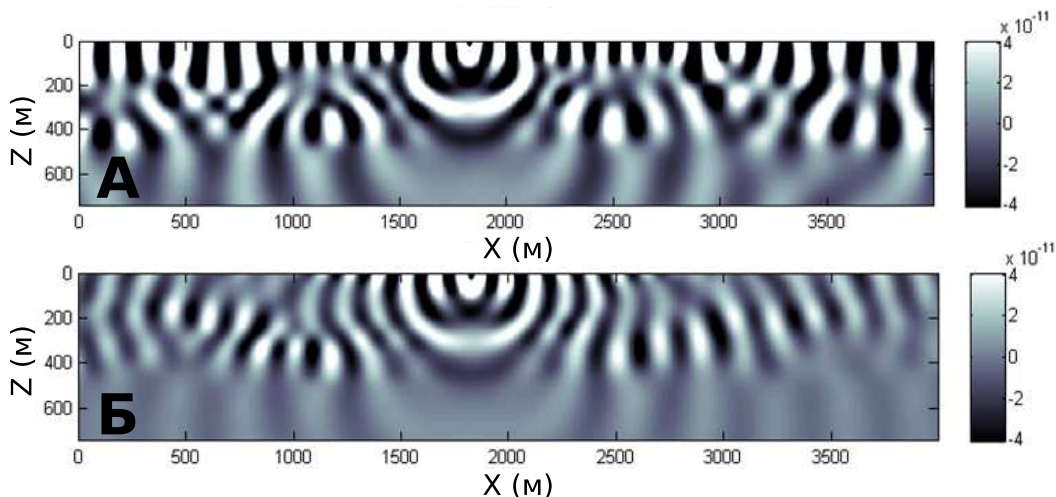


Рис. 4. Полное волновое поле (компонента u_z) на частоте 3 Гц, рассчитанное в истинной скоростной модели, в случае со свободной поверхностью (СП) (а) и без СП (б). X -координата источника — 1800 м

рассматриваемой нами задаче точечный источник типа вертикальной силы с определенными оговорками может считаться достаточно адекватной моделью типичных источников колебаний в наземной сейсморазведке — сейсмических вибраторов. Поскольку мы ориентируемся на восстановление гладкого распределения упругих параметров модели (макроскоростной упругой модели), мы будем рассматривать только низкий диапазон временных частот зарегистрированного волнового поля. Обращение полных волновых полей проводится одновременно для трех частот — 3, 6, 8 Гц. Отметим, что современная аппаратура позволяет уверенно возбуждать и регистрировать полезный сигнал в выбранном диапазоне частот.

При решении обратной задачи мы пытаемся восстановить распределения всех трех упругих параметров. Параметры приведены к безразмерному виду (путем нормировки каждого из параметров на его среднее значение в области реконструкций). На рис. 3 и 4 приведены сравнения волновых полей в частотной области на частоте 3 Гц во всей расчетной области. Как можно видеть, основные отличия волновых картин связаны с верхней частью модели, в той области, где распространяются поверхностные волны Рэлея. Очевидно, что при попытке восстановления верхней части разреза основное отличие двух сценариев обращения будет связано именно с влиянием рэлеевской волны.

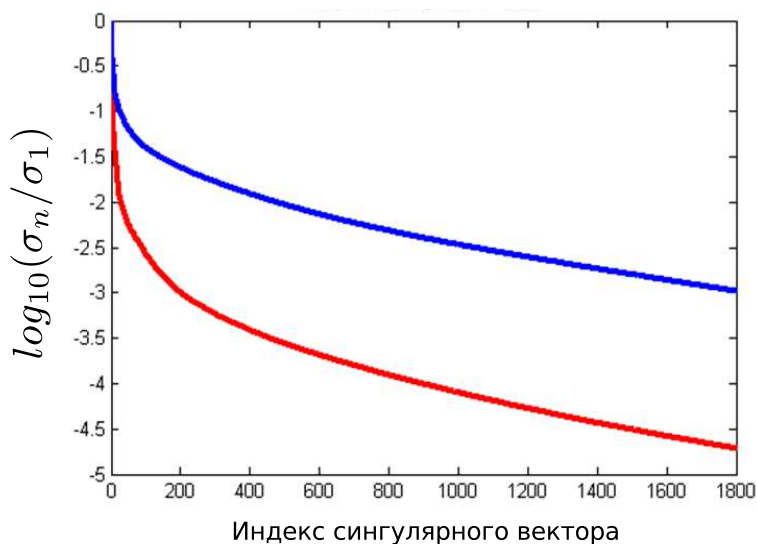


Рис. 5. Сингулярные спектры в логарифмическом масштабе для сценария с СП (красным) и без СП (синим)

На рис. 5 мы приводим сравнение нормализованных сингулярных чисел для двух сценариев. Как можно видеть, в случае без свободной поверхности сингулярные числа убывают с ростом индекса гораздо медленнее, чем в случае со свободной поверхностью. Это означает, что теоретически в первом случае нужно ожидать более высокую информативность результата инверсии (для заданного уровня помех можно использовать более высокую размерность устойчивого подпространства).

Далее, на рис. 6–8 приведены проекции “идеального возмущения” на устойчивые подпространства для каждого из сценариев. На рис. 6 приводится сравнение “идеального возмущения” скоростей продольных волн (а), результат “идеального обращения” для сценария без учета свободной поверхности (б), результат “идеального обращения” для сценария с учетом СП (в).

На основании полученных результатов можно сделать следующие заключения:

- классическое обращение полных волновых полей, в котором учитывается свободная поверхность, обладает меньшей разрешающей способностью при восстановлении макроскоростного строения среды, чем обращение без учета СП; при этом подразумевается, что в обрабатываемых данных во втором сценарии полностью подавлена волна Рэлея;

- наиболее достоверным параметром при восстановлении в заданной геометрии и заданном типе источника будет скорость поперечных волн V_s , наименее достоверным — плотность ρ .

3.2. Эксперимент 2. Мы покажем применение описанного выше метода для анализа важнейшего вопроса при решении обратных задач с несколькими параметрами различного физического смысла. При решении ОДЗ существует проблема выбора оптимального набора упругих параметров. Теоретически существует полное взаимное соответствие между ними. Однако структура устойчивых подпространств в

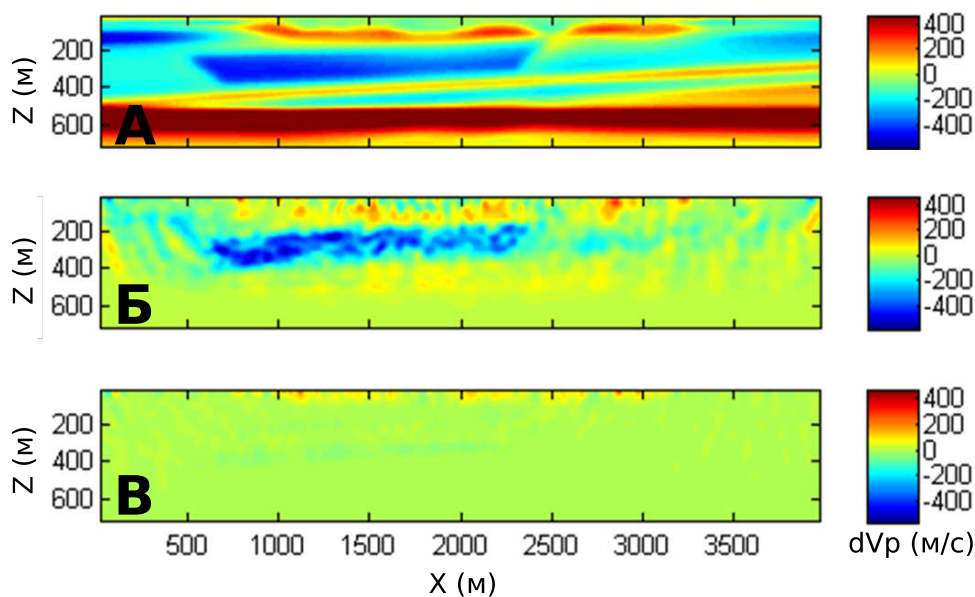


Рис. 6. Проекция искомого возмущения скоростей продольных волн V_p (а) для сценария с СП (в) и без СП (б)

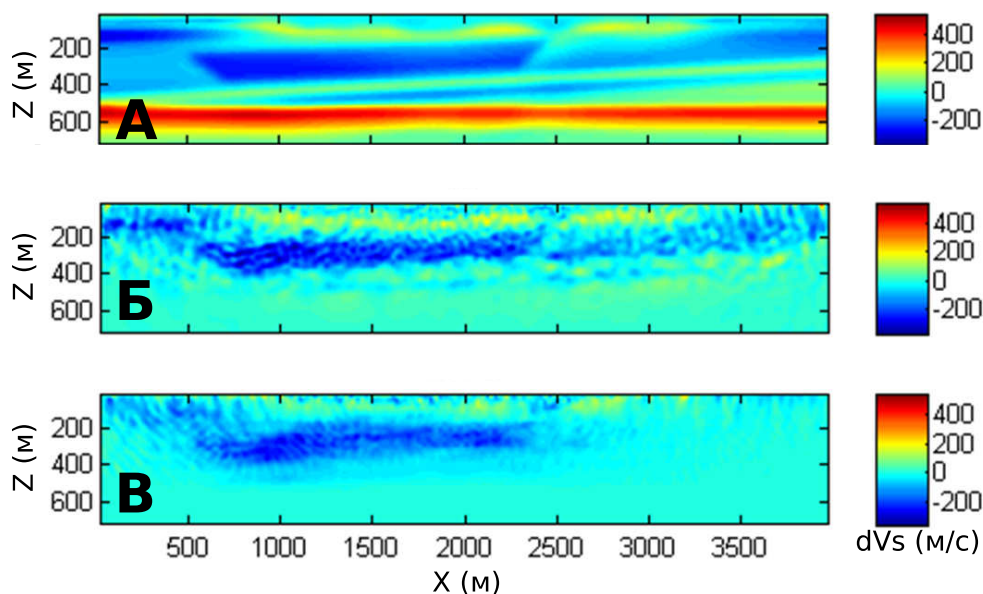


Рис. 7. Проекция искомого возмущения скоростей поперечных волн V_s (а) для сценария с СП (в) и без СП (б)

каждом случае оказывается различной. Поэтому в зависимости от решаемой задачи, геометрии наблюдений, типов источников и приемников необходимо определять оптимальный выбор параметров именно для этой задачи.

Итак, мы хотим выяснить, который из двух наборов параметров (первый — скорости продольных и поперечных волн плюс плотность или второй — продольные и поперечные импедансы плюс плотность) более адекватен конкретному сценарию для решения обратной задачи при заданном частотном диапазоне и геометрии наблюдений. Для модели и расстановки, приведенной в предыдущем примере, мы строим два линеаризованных оператора для каждого из сценариев. В скорости поперечных волн V_s вносились возмущения в виде вертикальных столбцов, в которых фоновое значение V_s возмущалось на 10% (рис. 9). Обратим внимание, что для обоих случаев возмущение фактически одинаково по V_s (возмущение IS по

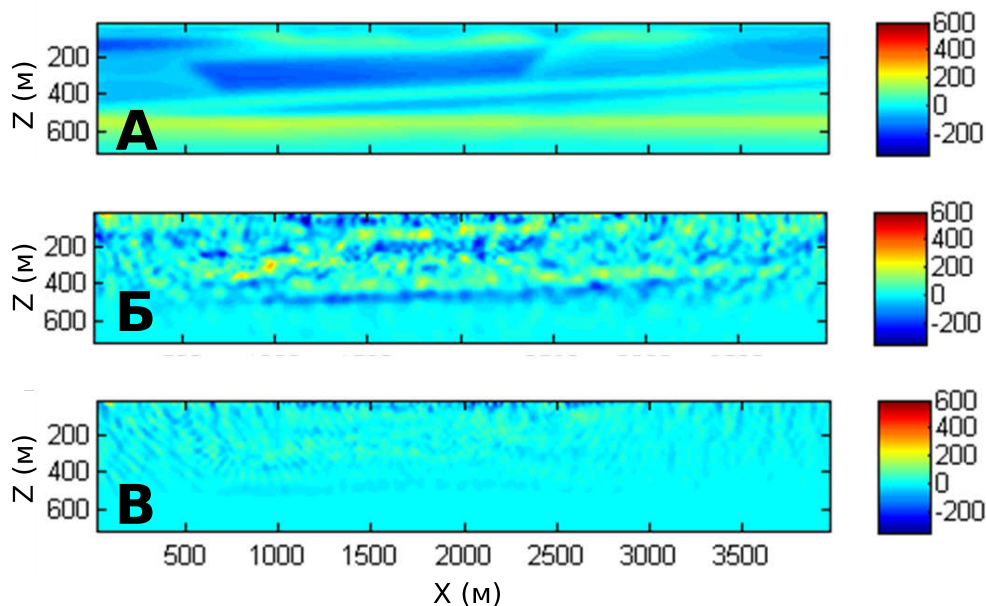


Рис. 8. Проекция искомого возмущения плотности ρ (а) для сценария с СП (в) и без СП (б)

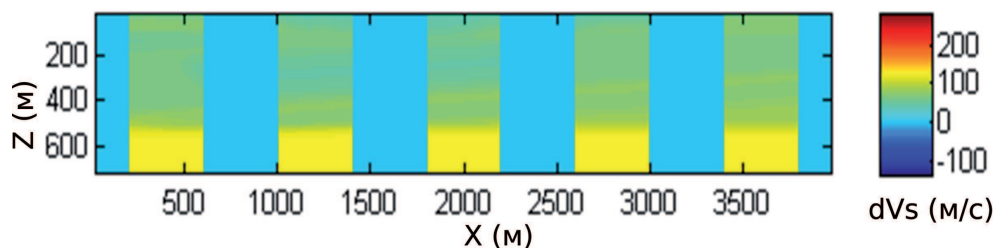


Рис. 9. Искомое возмущение скоростей поперечных волн V_s

импедансам поперечных волн вычислялось по скоростям поперечных волн).

Сингулярные спектры линеаризованных операторов приведены на рис. 10. Как видно из их сравнения, их поведение достаточно схоже, поэтому не следует ожидать драматической разницы в результатах обращения. Параметризация в скоростях все же несколько предпочтительнее. Для иллюстрации сделанного вывода мы приводим результаты “идеального” обращения в каждом из случаев (рис. 11, 12) для фиксированного параметра регуляризации (числа обусловленности, $cond = 5000$). Как можно видеть, результаты, как и ожидается, вполне схожи. Проявление эффекта “связности параметров”, когда возмущение лишь в одном из них “перетекает” при обращении на остальные, в случае с параметризацией импедансами несколько выше. Таким образом, еще раз подтверждается вывод, что для решаемой задачи выбор параметризации по скоростям более предпочтителен.

4. Заключение. В настоящей статье представлен алгоритм построения сингулярного разложения линеаризованного оператора обратной динамической задачи сейсмологии. Численно реализованный в виде программного обеспечения алгоритм построения SVD представляет собой мощный инструмент для решения практических задач при восстановлении верхней части геологического разреза. С помощью этого инструмента на предварительных этапах решения обратной динамической задачи могут быть изучены различные сценарии обращения. Приведенный численный пример анализа влияния волн Рэлея на результат обращения наглядно демонстрирует, что при обращении полных волновых полей учет волны Рэлея в наблюдаемых данных значительно усложняет задачу восстановления макроскоростного строения среды — разрешающая способность соответствующего оператора борновского типа значительно ниже, чем в случае без учета свободной поверхности. В рамках другого численного эксперимента показано, что в случае поверхностной системы наблюдения при измерении двух компонент вектора смещений и источника типа

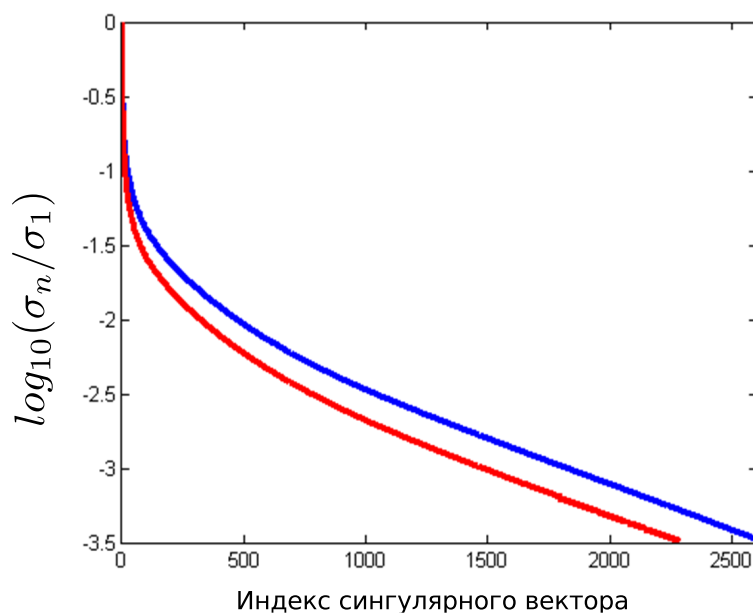


Рис. 10. Сингулярные спектры в логарифмическом масштабе для параметризации (ρ, V_p, V_s) — синим, для параметризации (ρ, IP, IS) — красным

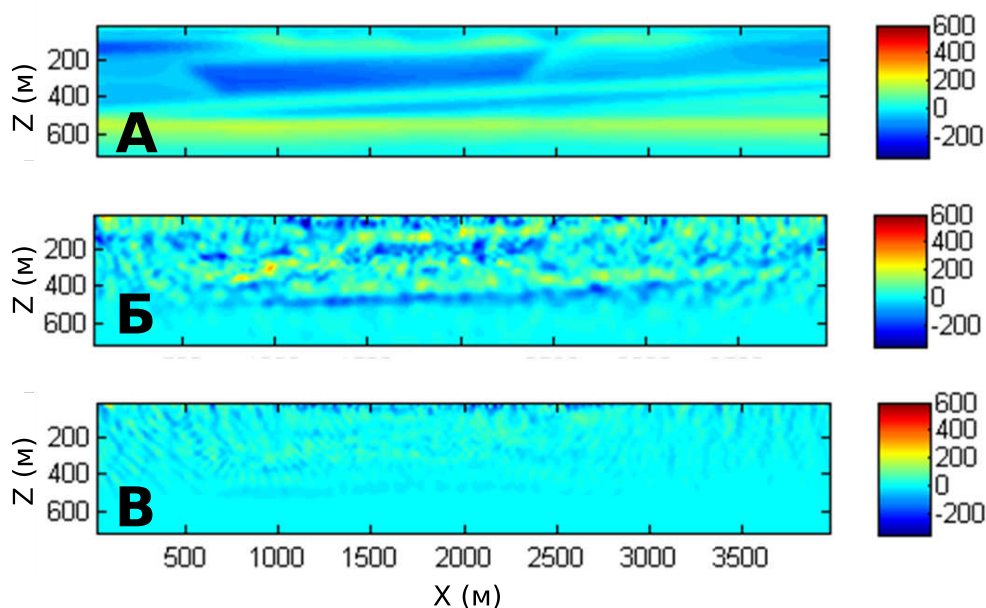


Рис. 11. Проекция искомого возмущения для параметризации через упругие импедансы

“вертикальная сила” параметризация упругой модели через скорости продольных и поперечных волн и плотности более приемлема, так как в этом случае эффект связности упругих параметров изотропной среды менее ярко выражен, чем в случае параметризации модели через упругие импедансы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-35-00240 и 16-05-00800), а также частично поддержана в рамках проекта “Разработка научных основ технологий сбора и обработки сейсмических данных в условиях развитого ледового покрова в транзитной зоне и на шельфе Северного Ледовитого океана” программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Поисковые фундаментальные научные исследования в интересах развития Арктической зоны Российской Федерации” на 2016 г.

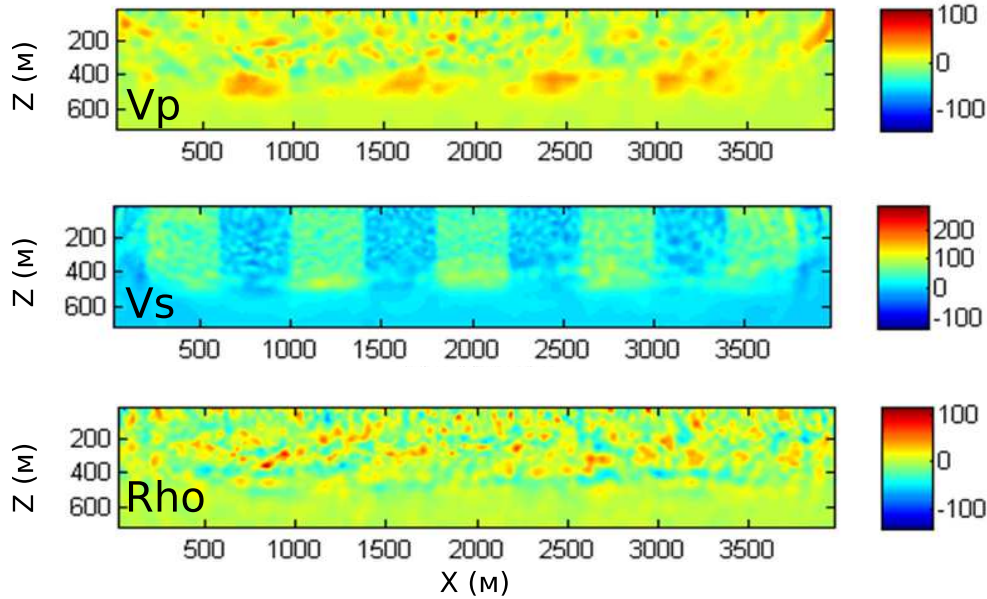


Рис. 12. Проекция искомого возмущения для параметризации через скорости

Приложение. Прямая задача и приближение Борна. Пусть пространство моделей M состоит из упругих моделей среды $m \in M$ и $m = (a(x, z), b(x, z), c(x, z))^T$. Рассмотрим пространство решений U — пространство функций, удовлетворяющих условию излучения Зоммерфельда, и пространство правых частей W . Введем дифференциальный оператор $\mathcal{L} : M \times \mathbb{R} \times U \rightarrow W$, такой, что

$$\mathcal{L}(m; \omega)d = \left(i\omega M(x, z) + P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial z} \right) d.$$

Оператор $\mathcal{F}_{x_s}(m; \omega)$ — решение уравнений линейной динамической теории упругости для модели $m = (a, b, c)^T$, частоты ω , точечного источника (правой части) $f_{x_s} = (0, w(\omega)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), 0, 0, 0)^T$ и формы импульса $w(\omega)$, т.е. $\mathcal{F}_{x_s} : M \times \mathbb{R} \rightarrow U$. В терминах дифференциального оператора \mathcal{L} последнее выражение можно переписать в форме

$$\mathcal{F}_{x_s}(m; \omega) = \mathcal{L}(m; \omega)^{-1} \langle f_{x_s} \rangle.$$

Пусть $\delta m \in M$, $\delta m = (\delta a, \delta b, \delta c)^T$ — малое возмущение референтной модели $m_0 = (a_0, b_0, c_0)^T$. Тогда $\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$ — решение уравнений линейной динамической теории упругости для модели $m_0 + \delta m$, т.е.

$$i\omega \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 + \delta a & -b_0 - \delta b & 0 \\ 0 & 0 & -b_0 - \delta b & a_0 + \delta a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 + \delta c \end{pmatrix} (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) + \left(P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) = \mathbf{f}_{x_s},$$

и $\mathbf{u} = (u_x, u_z, \sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz})^T$. После очевидных упрощений и используя тот факт, что $\mathcal{L}(m_0; \omega)\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{f}_{x_s}$, получим:

$$\delta \mathbf{u} = \mathcal{L}(m_0; \omega)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\omega(-\delta a \sigma_{xx} + \delta b \sigma_{zz}) \\ i\omega(\delta b \sigma_{xx} - \delta a \sigma_{zz}) \\ -i\omega \delta c \sigma_{xz} \end{pmatrix} + \mathcal{L}(m_0; \omega)^{-1} \langle o(\|\delta m\|_M) \rangle.$$

Обозначим

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta m}(m_0; \omega) \langle \delta m \rangle = \begin{pmatrix} \delta u_x \\ \delta u_z \\ \delta \sigma_{xx} \\ \delta \sigma_{zz} \\ \delta \sigma_{xz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i\omega\sigma_{xx} \\ -i\omega\sigma_{zz} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\omega\sigma_{zz} \\ i\omega\sigma_{xx} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -i\omega\sigma_{xz} \end{pmatrix}$$

и $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(m_0; \omega)$. Окончательно имеем $\frac{\delta \mathcal{F}_{\mathbf{x}_s}}{\delta m}(m_0; \omega) \langle \delta m \rangle = \mathcal{L}_0^{-1} \langle \delta a \mathbf{f}_a + \delta b \mathbf{f}_b + \delta c \mathbf{f}_c \rangle$.

На практике при решении обратной задачи имеется информация о решении уравнения не во всей области, а лишь в конечном наборе точек — сейсмоприемниках. Определим оператор взятия следа решения в позициях приемников: $P : U \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times NR}$, где NR — количество сейсмоприемников и P — линейный оператор, такой, что $P(\mathbf{u}) = (u_x(\mathbf{x}_{r_1}), u_z(\mathbf{x}_{r_1}), \dots, u_x(\mathbf{x}_{r_{NR}}), u_z(\mathbf{x}_{r_{NR}}))^T$, где $\{\mathbf{x}_{r_k}\}_1^{NR}$ — координаты приемников.

Пусть NS — количество сейсмических источников и \mathbf{x}_i — координата i -го источника, $\{\omega_j\}_1^{Nf}$ набор временных частот. Тогда можно ввести оператор прямого моделирования $F_i^j : M \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times NR}$ в виде

$$F_i^j(m) = P \circ \mathcal{F}_{\mathbf{x}_i}(m; \omega_j). \quad (4)$$

Далее вводится оператор $F^j : M \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times NR \times NS}$: $F^j(m) = \begin{pmatrix} F_1^j(m) \\ \dots \\ F_{NS}^j(m) \end{pmatrix}$.

Обозначим пространство данных $D = \mathbb{C}^{2 \times NR \times NS \times Nf}$ и определим оператор прямого моделирования $F : M \rightarrow D$, такой, что: $F(m) = \begin{pmatrix} F^1(m) \\ \dots \\ F^{Nf}(m) \end{pmatrix}$.

Рассмотрим самый простой случай: $Nf = 1$ и $NS = 1$. Поскольку $F : M \rightarrow D$, где $D = \mathbb{C}^{2 \times NR}$, можно записать: $F(m) = P \circ \mathcal{F}_{\mathbf{x}_s}(m; \omega)$.

Очевидно, что $\frac{\delta F}{\delta m}(m) \langle \delta m \rangle = P \circ \frac{\delta \mathcal{F}_{\mathbf{x}_s}}{\delta m}(m; \omega) \langle \delta m \rangle$. Все выражения в этом разделе получены для параметризации упругой модели через функции (ρ, a, b, c) . Формулы производной Фреше для других параметризаций упругой модели (ρ, V_p, V_s) или (ρ, IP, IS) получаются с помощью соответствующих матриц Якоби перехода от одной параметризации к другой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Virieux J., Operto S. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics // Geophysics. 2009. **74**, N 6. WCC1–WCC26.
2. Menke W. Geophysical data analysis: discrete inverse theory. New York: Academic Press, 1989.
3. Vogel C.R. Computational methods for inverse problems. Philadelphia: SIAM Press, 2002.
4. Grote M.J., Sim I. Efficient PML for the wave equation. ArXiv preprint: 1001.0319v1 [math.NA]. Ithaca: Cornell Univ., 2010.
5. Гадильшин К.Г., Чеверда В.А. Обращение полных волновых полей нелинейным методом наименьших квадратов: SVD анализ // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 499–513.
6. Чеверда В.А., Костин В.И. r -псевдообратный для компактного оператора // Сибирские электронные математические известия. 2010. № 7. 258–282.
7. Li X.S., Demmel J.W. SuperLU_DIST: a scalable distributed-memory sparse direct solver for unsymmetric linear systems // ACM Trans. on Math. Software. 2003. **29**, N 2. 110–140.
8. Hernandez V., Roman J.E., Vidal V. SLEPC: a scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems // ACM Trans. on Math. Software. 2005. **31**, N 3. 351–362.
9. Hernandez V., Roman J.E., Tomas A. A robust and efficient parallel SVD solver based on restarted Lanczos bidiagonalization // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 2008. **31**. 68–85.
10. Gardner G.H.F., Gardner L.W., Gregory A.R. Formation velocity and density — the diagnostic basics for stratigraphic traps // Geophysics. 1974. **39**, N 6. 770–780.
11. Collino F., Tsogka C. Application of PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media // Geophysics. 2001. **66**, N 1. 294–307.

12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
6.11.2016

Near Surface Reconstruction Using the Full Waveform Inversion Method: A Resolution Analysis

K. G. Gadylshin¹, D. A. Neklyudov², and I. Yu. Silvestrov³

¹ Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Koptuyug prospekt 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Junior Scientist, e-mail: gadylshinkg@ipgg.sbras.ru

² Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Koptuyug prospekt 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: NeklyudovDA@ipgg.sbras.ru

³ Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Koptuyug prospekt 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: SilvestrovIY@ipgg.sbras.ru

Received November 11, 2016

Abstract: The effect of the Rayleigh wave on full waveform inversion (FWI) is studied. It is shown that the Born operator resolution is better when the Rayleigh waves are not taken into account. A numerical algorithm to analyze the influence of different parameters of the inverse dynamical seismic problem (such as source/receiver geometry, frequency range, elastic model parametrization, etc.) on the near-surface geological section reconstruction is proposed. As a demonstrative example, we show that the best elastic parameters for macrovelocity reconstruction via FWI for a subsurface observation system are P- and S-velocities and density.

Keywords: full waveform inversion method, SVD analysis, resolution capability, inverse dynamical problem, free surface, Rayleigh waves, elastic parameter coupling.

References

1. J. Virieux and S. Operto, "An Overview of Full-Waveform Inversion in Exploration Geophysics," *Geophysics* **74** (6), WCC1–WCC26 (2009).
2. W. Menke, *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory* (Academic, New York, 1989).
3. C. R. Vogel, *Computational Methods for Inverse Problems* (SIAM, Philadelphia, 2002).
4. M. J. Grote and I. Sim, *Efficient PML for the Wave Equation*. arXiv preprint: 1001.0319v1 [math.NA] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2010), available at <https://arxiv.org/abs/1001.0319v1>.
5. K. G. Gadylshin and V. A. Tcheverda, "Nonlinear Least-Squares Full Waveform Inversion: SVD Analysis," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 499–513 (2014).
6. V. A. Tcheverda and V. I. Kostin, "*r*-Pseudoinverse for a Compact Operator," *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **7**, 258–282 (2010).
7. X. S. Li and J. W. Demmel, "SuperLU_DIST: A Scalable Distributed-Memory Sparse Direct Solver for Unsymmetric Linear Systems," *ACM Trans. Math. Softw.* **29** (2), 110–140 (2003).
8. V. Hernandez, J. E. Roman, and V. Vidal, "SLEPc: A Scalable and Flexible Toolkit for the Solution of Eigenvalue Problems," *ACM Trans. Math. Softw.* **31** (3), 351–362 (2005).
9. V. Hernandez, J. E. Roman, and A. Tomas, "A Robust and Efficient Parallel SVD Solver Based on Restarted Lanczos Bidiagonalization," *Electron. Trans. Numer. Anal.* **31**, 68–85 (2008).
10. G. H. F. Gardner, L. W. Gardner, and A. R. Gregory, "Formation Velocity and Density — the Diagnostic Basics for Stratigraphic Traps," *Geophysics* **39** (6), 770–780 (1974).
11. F. Collino and C. Tsogka, "Application of PML Absorbing Layer Model to the Linear Elastodynamic Problem in Anisotropic Heterogeneous Media," *Geophysics* **66** (1), 294–307 (2001).
12. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Solution of Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1979; Wiley, New York, 1977).