

УДК 519.64+537.87

doi 10.26089/NumMet.v17r443

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛАХ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

А. В. Сету́ха¹, С. Н. Фетисов²

Для численного решения классической задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящих объектах используется метод граничных интегральных уравнений с гиперсингулярными интегралами, к которым применяются метод кусочно-постоянных аппроксимаций и метод коллокации. В результате задача сводится к системе линейных уравнений, коэффициенты которой выражаются через интегралы по ячейкам разбиения с сильной степенной особенностью. Для вычисления этих интегралов применяется развитый ранее подход, основанный на выделении в явном виде членов с сильной особенностью, вычисляемых аналитически. В рамках этого подхода в настоящей статье протестирована численная схема, в которой вычисление оставшихся членов со слабосингулярными интегралами по ячейкам разбиения осуществляется путем построения более мелкой сетки второго уровня с домножением подынтегрального выражения на сглаживающий множитель. На примере задачи дифракции на теле в форме прямоугольного крыла показано, что такая схема, в частности, позволяет решать задачи дифракции на телах малой толщины. При этом толщина тела может быть даже меньше диаметра ячеек основного разбиения, но при условии, что диаметр ячеек сетки второго уровня существенно меньше, чем толщина тела.

Ключевые слова: граничные интегральные уравнения, гиперсингулярные интегралы, метод дискретных особенностей, рассеяние электромагнитных волн, эффективная площадь рассеяния.

1. Введение. Рассматривается классическая задача дифракции электромагнитной волны на идеально проводящих объектах в рамках модели, основанной на уравнениях Максвелла. Для численного решения такой задачи высокоэффективным является подход, основанный на методе граничных интегральных уравнений. По сравнению с сеточными методами, предполагающими дискретизацию окружающей объекты пространственной области, здесь расчетная сетка строится только на поверхности облучаемых тел, при этом автоматически выполняются условия на бесконечности и отпадает проблема расширения области, охваченной пространственной сеткой, для правильного учета этих условий. В задачах дифракции последняя проблема стоит особенно остро, поскольку шаг пространственной дискретизации определяется не только сложностью геометрии, но и длиной волны (шаг дискретизации должен быть существенно меньше длины волны). Ограничение, накладываемое длиной волны на шаг сетки, часто является определяющим и не позволяет использовать неравномерные разбиения, как это делается, например, во внешних задачах вычислительной аэрогидродинамики.

В рамках методов граничных интегральных уравнений авторы настоящей статьи развивают подход, основанный на сведении задачи к интегральным уравнениям с сильной особенностью. При этом интегральные уравнения и применяемые для их решения вычислительные алгоритмы являются едиными для случая дифракции как на объемном теле, так и на тонком экране.

Один из подходов к численному решению таких уравнений связан с рассмотрением их как псевдодифференциальных с последующим применением методов типа метода конечных элементов [1–3].

Авторы используют другой подход, в котором интегралы с сильной особенностью понимаются как гиперсингулярные, понимаемые в смысле конечного значения по Адамару. Идея используемого численного метода была сформулирована в статье [4], где выписана численная схема решения граничного интегрального уравнения с гиперсингулярным интегралом, основанная на кусочно-постоянных аппроксимациях неизвестной функции и на методе коллокаций. При дискретизации интегрального уравнения возникает система линейных уравнений с коэффициентами, выражающимися через интегралы с сильными особенностями по ячейкам разбиения поверхности. В статье [5] в развитие этого подхода получены квадратурные

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119991, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: setuhaav@rambler.ru

² Опыттно-конструкторское бюро им. А. Люльки, ул. Касаткина, д. 13, 129301, Москва; инженер-конструктор; e-mail: sereja.fit@gmail.com

формулы для гиперсингулярных интегралов, основанные на выделении в явном виде главной особенности из ядра интегрального уравнения. Для вычисления интеграла от главной части предложены квадратурные формулы, коэффициенты которых могут быть определены аналитически для случая, когда края ячеек разбиения являются пространственными многоугольниками, причем не обязательно плоскими. Для слабосингулярных интегралов использовались формулы типа прямоугольников.

Тестирование такого численного метода на примере решения ряда модельных задач показало его работоспособность. Однако существенные проблемы здесь возникают, когда решается задача дифракции вне тела малой конечной толщины (например, тела, имеющего форму крыла). В силу того, что граничное уравнение записывается на поверхности, состоящей из частей, расположенных на малом расстоянии друг от друга, приходится использовать разбиение, в котором шаг сетки много меньше толщины тела. Заметим, что проблема численного решения краевых задач вне тел малой толщины является типичной для метода граничных интегральных уравнений (не только в задачах дифракции).

В настоящей статье авторы применили численную схему, в которой для более точного вычисления коэффициентов квадратурной формулы, соответствующих слабосингулярному интегралу, используется дополнительное разбиение ячеек основного разбиения на более мелкие ячейки с одновременным сглаживанием особенности подынтегральной функции в малой окрестности особой точки. Такая схема была сформулирована в статье [6], где для нее получены теоретические оценки порядка точности. При этом следует заметить, что при решении задачи более мелкая сетка (сетка второго уровня) применяется только для вычисления коэффициентов системы линейных уравнений, аппроксимирующей интегральное уравнение. Не происходит увеличения числа решаемых линейных уравнений, а это в данной задаче является критическим с точки зрения затрат вычислительных ресурсов (памяти ЭВМ и времени проведения расчета).

Авторы статьи осуществили программную реализацию и тестирование указанной схемы с доработкой ячеек основной сетки на примере классической задачи дифракции на сфере, а также в задаче дифракции на теле малой толщины, в качестве которого бралось прямоугольное крыло. Осуществлялось сравнение полученных результатов с известными теоретическими (для сферы) и экспериментальными данными (для крыла). На примере задачи дифракции на прямоугольном крыле, кроме того, проведено исследование зависимости получаемых характеристик отраженного поля в дальней зоне (диаграммы направленности отраженного поля) от толщины крыла с целью показать значимость учета реальной формы тела малой толщины, а также осуществить сравнение получаемых характеристик с характеристиками, возникающими при замене телесного крыла тонким экраном, что часто приходится делать при решении практических задач для снижения вычислительных затрат.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача рассеяния электромагнитной волны на идеально проводящем объекте или системе таких объектов в трехмерном пространстве. Каждый объект может представлять собой как тело, ограниченное замкнутой поверхностью, так и тонкий экран. Задача решается при следующих допущениях: окружающая среда является однородной и изотропной; падающая волна является монохроматической; в окружающей среде и на теле отсутствуют электрические заряды. Описываемая ниже постановка задачи является классической [7, 8].

Ищутся распределения напряженностей электрического и магнитного полей вне идеально проводящих тел, а также эффективная площадь рассеяния, являющаяся характеристикой электромагнитного поля в дальней зоне. Пусть Σ — суммарная поверхность рассматриваемых идеально проводящих объектов, которая может быть замкнутой (поверхность идеально проводящего тела), разомкнутой (идеально проводящий экран) или состоять из нескольких частей такого вида. Обозначим через Ω область пространства вне рассматриваемых объектов. В монохроматическом случае ищутся распределения напряженностей электрического и магнитного полей $\mathbf{E}^*(x, t)$ и $\mathbf{H}^*(x, t)$ вне облучаемых объектов в виде

$$\mathbf{E}^*(x, t) = \mathbf{E}_{\text{full}}(x)e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H}^*(x, t) = \mathbf{H}_{\text{full}}(x)e^{-i\omega t},$$

где ω — круговая частота электромагнитного поля, t — время, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset R^3$ — точки пространства вне облучаемых объектов, $\mathbf{E}_{\text{full}}(x)$ и $\mathbf{H}_{\text{full}}(x)$ — пространственные составляющие полных электрического и магнитного полей. Предполагается, что полное электромагнитное поле индуцировано заданным первичным электромагнитным излучением, в котором напряженности электрического и магнитного полей имеют вид $\mathbf{E}_{\text{ent}}(x)e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{H}_{\text{ent}}(x)e^{-i\omega t}$ соответственно. При этом пространственные составляющие напряженностей полных электрического и магнитного полей ищем в виде

$$\mathbf{E}_{\text{full}}(x) = \mathbf{E}_{\text{ent}}(x) + \mathbf{E}(x), \quad \mathbf{H}_{\text{full}}(x) = \mathbf{H}_{\text{ent}}(x) + \mathbf{H}(x),$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — неизвестные напряженности вторичных электрического и магнитного полей, которые долж-

ны удовлетворяют уравнениям Максвелла (для монохроматического случая) [7, с. 19; 8, с. 123]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}. \quad (1)$$

Здесь ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости внешней среды. В частности, $\varepsilon = \varepsilon'\varepsilon_0$, $\mu = \mu'\mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ — электрическая постоянная, c — скорость света в вакууме, ε' и μ' — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно. Кроме того, должны выполняться условия Зоммерфельда на бесконечности:

$$\begin{cases} E(x) \rightarrow 0, & H(x) \rightarrow 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \tau} - ikE = o\left(\frac{1}{|x|}\right), & \frac{\partial H}{\partial \tau} - ikH = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \end{cases} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial \tau}$ — производная по направлению вектора $\boldsymbol{\tau} = \frac{x}{|x|}$, а также условие Майскнера конечности энергии излучения:

$$\int_D (\nabla \mathbf{E})^2 dv < \infty, \quad \int_D (\nabla \mathbf{H})^2 dv < \infty \quad (3)$$

для любой ограниченной области D , лежащей вне тел [7, с. 43, 51; 8, с. 130], dv — элемент объема пространства.

На суммарной поверхности облучаемых объектов Σ должно выполняться условие равенства нулю касательной компоненты суммарного электрического поля: $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{full}} = 0$, где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности. Данное условие равносильно условию

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{f}, \quad (4)$$

где $\mathbf{f} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{ent}}$.

Всюду далее считаем, что на замкнутых компонентах поверхности Σ вектор \mathbf{n} направлен наружу. На каждой разомкнутой компоненте поверхности Σ вектор \mathbf{n} направлен в сторону одной из сторон этой поверхности, выбираемой произвольно.

Таким образом, с математической точки зрения решается краевая задача для уравнений (1) относительно напряженностей электрического и магнитного полей $\mathbf{E}(x)$ и $\mathbf{H}(x)$ с граничным условием (4) и условиями (2) и (3).

3. Сведение задачи к интегральному уравнению. Неизвестную напряженность вторичного электрического поля будем искать на основе известного интегрального представления [7, с. 116]

$$\mathbf{E}(x) = \frac{i}{\omega\varepsilon} K[\Sigma, \mathbf{j}](x). \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x)$, $x \in \Sigma$, — неизвестное векторное поле на поверхности Σ , направленное в каждой точке $x \in \Sigma$ по касательной к поверхности (поверхностные токи), а

$$K[\Sigma, \mathbf{j}](x) = \int_{\Sigma} \left\{ \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x [\mathbf{j}(y)\Phi(x-y)] + k^2 \mathbf{j}(y)\Phi(x-y) \right\} d\sigma_y, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

где $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$, Φ — функция Грина скалярного уравнения Гельмгольца: $\Phi(x) = \frac{e^{ikr}}{r}$, $r = |x|$.

Как показано в работе [5], при заданном поверхностном поле $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x)$, $x \in \Sigma$, и при выполнении определенных требований на гладкость этого поля векторное поле \mathbf{E} , определяемое выражением (5), имеет краевые значения на каждой из сторон поверхности на поверхности Σ и при этом выполнены соотношения

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^+ = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^- = \mathbf{n} \times \mathbf{E},$$

где \mathbf{E} — значение векторного поля, получаемое непосредственно из выражений (5)–(6) при подстановке в них точки $x \in \Sigma$. При этом подынтегральное выражение в правой части формулы (6) имеет особенность порядка $O(|x-y|^{-3})$ и интеграл следует понимать как гиперсингулярный в смысле конечного значения по Адамару.

Подставляя неизвестное поле $\mathbf{E}(x)$ в граничное условие (5), получаем следующее граничное интегральное уравнение с гиперсингулярным интегралом:

$$\mathbf{n}(x) \times \frac{1}{\omega \varepsilon} \int_{\Sigma} \left\{ \text{grad}_x \text{div}_x [\mathbf{j}(y) \Phi(x-y)] + k^2 \mathbf{j}(y) \Phi(x-y) \right\} d\sigma_y = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Sigma. \quad (7)$$

4. Численная схема. Для численного решения интегрального уравнения (7) используется метод коллокации с применением квадратурных формул типа прямоугольников на основе значений неизвестной функции в узлах, совпадающих с точками коллокации.

Суммарную поверхность Σ аппроксимируем системой ячеек $\sigma_i, i = 1, \dots, n$. В нашей работе используется поверхностная сетка, которая строится следующим образом. Поверхность Σ разбивается на модули, каждый из которых аппроксимируется регулярной сеткой с ячейками, края которых суть пространственные прямоугольники. На каждом таком прямоугольнике выбирается точка коллокации x_i как центр тяжести вершин ячейки (в предположении, что все вершины имеют равную массу) и строится орт вектора нормали \mathbf{n}_i как вектор, ортогональный диагоналям ячейки. Далее на каждой ячейке строится локальная ортонормированная система координат с векторами \mathbf{e}_{i1} и $\mathbf{e}_{i2} = \mathbf{n}_i \times \mathbf{e}_{i1}$, лежащими в касательной плоскости к поверхности (плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}_i). Направление вектора \mathbf{e}_{i1} выбирается произвольно в указанной плоскости. Векторы $\mathbf{e}_{i1}, \mathbf{e}_{i2}$ и \mathbf{n}_i образуют правую тройку векторов. Могут возникать и треугольные ячейки, которые рассматриваются как вырожденный случай четырехугольной ячейки со сдвоенной вершиной.

Нами используются квадратурные формулы, полученные в работе [5] и основанные на выделении в явном виде гиперсингулярной части в интегральном операторе $K[\Sigma, \mathbf{j}]$, определяемом формулой (6). Этот оператор представляется в виде

$$K[\Sigma, \mathbf{j}] = K^0[\Sigma, \mathbf{j}] + K^1[\Sigma, \mathbf{j}], \quad K^k[\Sigma, \mathbf{j}] = \int_{\Sigma} e^k(x, y, \mathbf{j}) d\sigma_y, \quad k = 0, 1, \quad (8)$$

$$e^0(x, y, \mathbf{j}(y)) = \frac{-\mathbf{j} + 3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{j})}{R^3},$$

$$e^1(x, y, \mathbf{j}(y)) = (\mathbf{j} - 3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{j})) \frac{1 - e^{ikR} + ikR e^{ikR}}{R^3} + (\mathbf{j} - \mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{j})) \frac{k^2 e^{ikR}}{R},$$

где $R = |x - y|$, $\mathbf{r} = (x - y)/R$ и (\cdot, \cdot) — скалярное произведение. При этом функция $e^1(x, y, \mathbf{j}(y))$ имеет при $x \rightarrow y$ особенность порядка $O(1/R)$ и интеграл в формуле (8) для $k = 1$ является несобственным абсолютно сходящимся при $x \in \Sigma$.

Будем искать векторы \mathbf{j}_i , являющиеся приближенными значениями неизвестной функции \mathbf{j} в точках коллокации $x_i, i = 1, \dots, n$. Для аппроксимации гиперсингулярного интеграла $K^0[\Sigma, \mathbf{j}]$ функция \mathbf{j} аппроксимируется на каждой ячейке разбиения интеграла функцией $\mathbf{j}_i^*(y) = (\mathbf{n}_i \times \mathbf{j}_i) \times \mathbf{n}(y), y \in \sigma_i$. Интеграл от такой функции по ячейке был сведен в [5] к контурному интегралу:

$$K^0[\sigma_i, \mathbf{j}_i^*](x) = \int_{\sigma_i} e^0(x, y, \mathbf{j}_i^*(y)) d\sigma_y = \text{grad} \oint_{\partial\sigma_i} \frac{1}{|x - y|} (\mathbf{j}_i^*(y) \times \mathbf{n}(y), \boldsymbol{\tau}(y)) ds_y. \quad (9)$$

Когда контур $\partial\sigma_i$, т.е. край ячейки σ_i , является ломаной, последний интеграл в формуле (9) для величины $K^0[\sigma_i, \mathbf{j}_i^*](x)$ был найден аналитически [5]. Пусть отрезок L с началом в точке a и концом в точке b есть одно из звеньев ломаной $\partial\sigma_i$. Тогда

$$(\mathbf{j}_i^*(y) \times \mathbf{n}(y), \boldsymbol{\tau}(y)) = (\mathbf{j}_i \times \mathbf{n}_i, \boldsymbol{\tau}_L), \quad \boldsymbol{\tau}_L = \frac{b - a}{|b - a|}, \quad y \in L,$$

$$\text{grad} \int_L \frac{1}{|x - y|} (\mathbf{j}_i^*(y) \times \mathbf{n}(y), \boldsymbol{\tau}(y)) ds_N = (\mathbf{j}_i \times \mathbf{n}_i, \boldsymbol{\tau}_L) \text{grad} \int_L \frac{1}{|x - y|} ds_N,$$

$$\text{grad} \int_L \frac{1}{|x - y|} ds_N = - \left(\frac{x - a}{|x - a|} + \frac{x - b}{|x - b|} \right) \frac{|b - a|}{(x - a, x - b) + |x - a| |x - b|}.$$

Для аппроксимации интеграла $K^1[\Sigma, \mathbf{j}]$ в работе [5] функция \mathbf{j} на каждой ячейке разбиения σ_i аппроксимировалась постоянным значением \mathbf{j}_i , а интеграл по ячейке разбиения представлялся в виде

$$K^1[\sigma_i, \mathbf{j}_i](x) = \int_{\sigma_i} e^1(x, y, \mathbf{j}_i) d\sigma_y. \quad (10)$$

Для приближенного вычисления последнего интеграла по ячейке в точке x , являющейся точкой коллокации, использовалась приближенная формула с переходом в полярные координаты с центром в точке x и вычислением подынтегральной функции один раз в для значения $y = x_i$.

Теперь для нахождения неизвестных $\mathbf{j}_i \approx \mathbf{j}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, заменим интеграл в уравнении (7) описанной квадратурной формулой и потребуем выполнения уравнения (7) в узлах коллокации. В итоге получим систему операторных уравнений

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \mathbf{j}_j = \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

где $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(x_i)$, $A_{ij} \mathbf{j}_j = \frac{i}{\omega \varepsilon} \mathbf{n}_i \times K[\sigma_j, \mathbf{j}_j](x_i)$, $K[\sigma_j, \mathbf{j}_j](x) = K^0[\sigma_j, \mathbf{j}_j^*](x) + K^1[\sigma_j, \mathbf{j}_j](x)$.

Систему операторных уравнений (11) можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно координат векторов \mathbf{j}_i , $i = 1, \dots, n$, в локальных базисах, построенных на ячейках разбиения: $\mathbf{j}_j = j_j^1 \mathbf{e}_j^1 + j_j^2 \mathbf{e}_j^2$.

Применяя к вектору электрического тока \mathbf{j}_j оператор A_{ij} и раскладывая результат в локальном базисе ячейки y_i , получим $A_{ij} \mathbf{j}_j = c_{ij}^1 \mathbf{e}_i^1 + c_{ij}^2 \mathbf{e}_i^2$.

При этом столбец координат $(c_{ij}^1, c_{ij}^2)^T$ получается из столбца $(j_j^1, j_j^2)^T$ линейным преобразованием

$$\begin{pmatrix} c_{ij}^1 \\ c_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{11} & a_{ij}^{12} \\ a_{ij}^{21} & a_{ij}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_j^1 \\ j_j^2 \end{pmatrix},$$

в котором коэффициенты матрицы определяются выражением

$$\alpha_{ij}^{ml} = (A_{ij} \mathbf{e}_j^l, \mathbf{e}_i^m), \quad m, l = 1, 2, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Тогда система уравнений (11) записывается в виде следующей системы из $2n$ линейных алгебраических уравнений относительно $2n$ комплексных неизвестных j_j^l , $l = 1, 2$, $j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ l=1, 2}} \alpha_{ij}^{ml} j_j^l = f_i^m, \quad i = 1, \dots, n, \quad m = 1, 2, \quad (13)$$

где $f_i^m = (\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_i^m)$, $i = 1, \dots, n$, $m = 1, 2$.

Такой метод был описан в работе [5] и протестирован на примере некоторых модельных задач. Дальнейшее тестирование этого метода показало, что даже при предположении, что на всей ячейке σ_i поверхностный ток имеет постоянное значение \mathbf{j}_i , повышение точности вычисления интеграла (10) для функции $K^1[\sigma_i, \mathbf{j}_i](x)$ позволяет существенно повысить точность получаемых решений всей задачи. Повышения точности вычисления этого интеграла можно добиться за счет дополнительного разбиения каждой ячейки основного разбиения на более мелкие ячейки и применения на каждой ячейке основного разбиения квадратурных формул на измельченной сетке. В статье [6] были предложены квадратурные формулы типа прямоугольников для вычисления интегралов со слабой особенностью вида (10) и получены теоретические оценки их точности. Такой подход был апробирован для задачи рассеяния скалярных волн, которая сводилась к гиперсингулярному интегральному уравнению [9, 10].

В настоящей статье излагаются результаты работы по численной реализации и тестированию данного подхода с доразбиением ячеек применительно к рассматриваемой задаче дифракции электромагнитной волны.

5. Аппроксимация слабосингулярных интегралов. При наборе матрицы системы линейных уравнений (13) по формулам (12) возникает необходимость вычисления каждой координаты векторов $K^1[\sigma_j, \mathbf{E}_j^l](x_i)$, $l = 1, 2$, $i, j = 1, \dots, n$, где $x_i \in \Sigma$, определяемых формулой (10). При этом каждый раз возникает интеграл вида

$$u(x) = \int_{\sigma_i} K(x, y) d\sigma_y, \quad x \in \Sigma, \quad (14)$$

где $K(x, y)$ — некоторое ядро, представляющееся в форме [6]

$$K(x, y) = \sum_{\beta=1,2,3} K_{\beta}(x, y), \quad K_{\beta}(x, y) = \frac{K_{\beta}^*(x, y)}{|x - y|^{\beta}}, \quad (15)$$

$$K_{\beta}^*(x, y) \in C^1(\Sigma) \quad \text{при} \quad \beta = 1, 2, 3,$$

$$|K_{\beta}^*(x, y)| \leq O(|x - y|^{\beta-1}) \quad \text{при} \quad \beta = 2, 3,$$

$$\left| \frac{\partial K_3^*(x, y)}{\partial y_i} \right| \leq O(|x - y|) \quad \text{при} \quad i = 1, 2, 3.$$

Приближенно интегралы вида (14) будем вычислять по формулам типа прямоугольников с доразбиением ячеек σ_i и сглаживанием особенности в ядре $K(x, y)$. Разобьем дополнительно каждую ячейку σ_i на более мелкие ячейки σ_i^p , $p = 1, \dots, P$. Пусть h' — максимальный из диаметров разбиения ячеек σ_i^p , $p = 1, \dots, P$, $i = 1, \dots, n$. Положим

$$\tilde{u}(x) = \sum_{p=1}^P K_{\varepsilon}(x, x_i^p) s_i^p, \quad K_{\varepsilon}(x, y) = K(x, y) \theta_{\varepsilon}(|x - y|), \quad (16)$$

где s_i^p — площадь ячейки σ_i^p , $x_i^p \in \sigma_i^p$ — узлы, выбираемые по одному на каждой ячейке, $\theta_{\varepsilon}(r)$ — сглаживающая функция, выбираемая так, что

$$\theta_{\varepsilon}(r) \in C^1[0, \infty),$$

$$\theta_{\varepsilon}(r) = 1 \quad \text{при} \quad r \geq \varepsilon,$$

$$0 \leq \theta_{\varepsilon}(r) \leq \frac{C_0 r}{\varepsilon} \quad \text{при} \quad 0 \leq r \leq \varepsilon,$$

где C_0 — константа, не зависящая от r и ε , а ε — малый параметр, который в соответствии с теоретическими оценками из статьи [6] следует выбирать как величину порядка h' . При реализации данной схемы функция θ_{ε} бралась в виде $\theta_{\varepsilon}(r) = 3\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^3$ при $0 \leq r \leq \varepsilon$. Параметр ε в расчетах, приведенных далее, выбирался как $\varepsilon = 2h'$. Доразбиение ячеек основного разбиения σ_i на более мелкие ячейки и построение узлов x_i^p осуществлялось по схеме, описанной в статье [9].

6. Нахождение диаграмм рассеяния. В приводимых ниже примерах рассматривается задача дифракции на идеально проводящих телах плоской волны. В этом случае первичное поле имеет вид

$$\mathbf{E}_{\text{ent}}(x) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}_{\text{ent}}(M) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0,$$

где \mathbf{k} — волновой вектор (при этом $k = |\mathbf{k}|$), \mathbf{r} — радиус-вектор точки x , \mathbf{E}_0 — заданный вектор, ортогональный вектору \mathbf{k} (вектор \mathbf{E}_0 определяет поляризацию волны). Расчеты проводились в предположении, что во внешней среде $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$. Важной характеристикой первичного поля является длина волны, для которой при последнем предположении справедливы выражения $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$.

Основной исследуемой характеристикой являлись диаграммы направленности вторичного поля. Эти диаграммы характеризуют зависимость эффективной площади рассеяния (ЭПР) σ в направлении заданного единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$, определяемую формулой

$$\sigma(\boldsymbol{\tau}) = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{|E(R\boldsymbol{\tau})|^2}{|E_{\text{ent}}|^2}, \quad (17)$$

от направления вектора $\boldsymbol{\tau}$. Если напряженность электрического поля представлена в виде (5), то для

величины $\sigma(\boldsymbol{\tau})$ справедлива формула
$$\sigma(\boldsymbol{\tau}) = \frac{4\pi}{|E_{\text{ent}}|^2} k^2 \left| \int_{\Sigma} \frac{i}{\omega\varepsilon} e^{-i\mathbf{k}(\boldsymbol{\tau}, y)} (\mathbf{j}(y) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{j}(y), \boldsymbol{\tau})) d\sigma_y \right|^2.$$

При численном решении используем приближенную формулу

$$\sigma(\boldsymbol{\tau}) = \frac{4\pi}{|E_{\text{ent}}|^2} \left| \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma} e^{-i\mathbf{k}(\boldsymbol{\tau}, x_j)} \frac{i}{\omega\varepsilon} k^2 (\mathbf{j}_j - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{j}_j, \boldsymbol{\tau})) |\sigma_j| \right|^2, \quad (18)$$

где $|\sigma_j|$ — площадь ячейки разбиения σ_j .

7. Тестирование численного алгоритма.

7.1. Дифракция плоской волны на сфере. Для первоначального тестирования разработанной версии численного алгоритма были получены решения задачи дифракции плоской волны на идеально проводящей сфере радиуса 1. В этих расчетах использовалось разбиение сферы на основные ячейки, равномерное по сферическим координатам на поверхности сферы. При вычислении интегралов $K^1[\sigma_j, e_j^l](x_i)$ при нахождении коэффициентов матрицы системы линейных уравнений (13) каждая ячейка дополнительно разбивалась на более мелкие ячейки путем деления по каждому направлению на m равных частей (при этом на каждой ячейке основного разбиения возникало m^2 ячеек сетки второго уровня). В результате расчета строилась диаграмма направленности, выражающая зависимость ЭПР $\sigma(\tau)$, определяемую формулой (17), от угла α между векторами $-\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\alpha)$ в случае, когда вектор $\boldsymbol{\tau}$ лежит в плоскости, определяемой векторами \mathbf{k} и \mathbf{E}_0 (см. рис. 1). На рис. 2 и 3 приведены графики функции

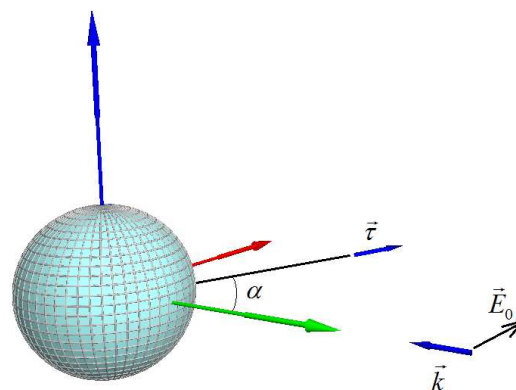


Рис. 1. К задаче о рассеянии волны на сфере

$$\tilde{\sigma}(\alpha) = 10 \lg \frac{\sigma(\boldsymbol{\tau}(\alpha))}{\pi}, \quad (19)$$

где $\tilde{\sigma}(\alpha)$ — ЭПР сферы, нормированная на площадь поперечного сечения сферы, выраженная в децибелах.

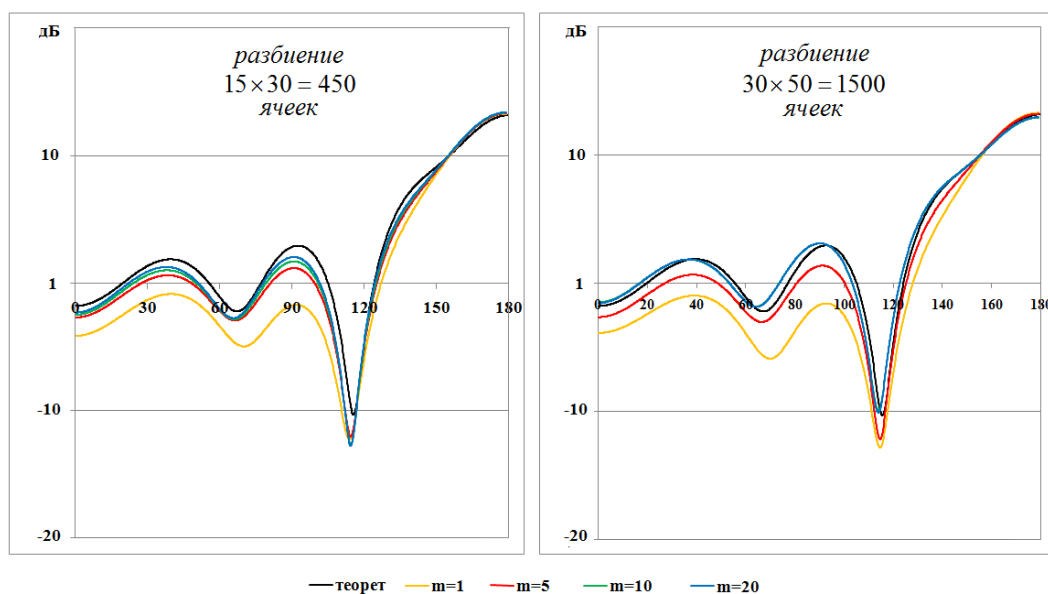


Рис. 2. Диаграмма рассеяния сферы, $k = 4.1$

На рис. 2 и 3 приведены диаграммы рассеяния для волнового числа $k = 4.1$, полученные при использовании основного разбиения на $15 \times 30 = 450$ ячеек и $30 \times 50 = 1500$ ячеек (первый множитель есть число ячеек по широте, второй — по длине). На каждом рисунке приведены кривые, полученные при различных значениях параметра m (указывает число ячеек доразбиения по каждому направлению) в сравнении с теоретическим решением [7, с. 403].

Из этих рисунков следует, что без использования доразбиения основных ячеек результаты имеют большую погрешность. При использовании мелкой сетки точность результатов существенно повышается, причем при значениях параметра $m = 10$ и $m = 20$ полученные диаграммы рассеяния близки друг к другу (на рис. 2 для разбиения $30 \times 50 = 1500$ ячеек кривая, соответствующая значению $m = 10$, даже не видна, будучи накрытой кривой, соответствующей значению $m = 20$). Аналогичное поведение результатов имеет место и на рис. 3, слева, где приведены диаграммы направленности, полученные для волнового числа $k = 10$ при использовании основного разбиения на $30 \times 50 = 1500$ ячеек. На рис. 3 справа приведены диаграммы направленности, полученные для значения волнового числа $k = 20$ на сетке

$30 \times 50 = 1500$ при использовании параметра доразбиения $m = 20$ в сравнении с теоретическим решением. Здесь имеется качественное соответствие численной и теоретической кривых, различие в окрестностях локальных максимумов достигает 3 дБ.

Снижение точности получаемых решений при увеличении волнового числа связано с уменьшением длины волны λ , которая составляет $\lambda \approx 1.53$ для $k = 4.1$, $\lambda \approx 0.628$ для $k = 10$, $\lambda \approx 0.314$ для $k = 20$. В то же время, максимальный размер стороны ячейки основного разбиения составляет $h \approx 0.21$ для разбиения 15×30 ячеек, что при расчете для волнового числа $k = 4.1$ соответствует примерно $1/7$ длины волны. Для разбиения 30×50 ячеек максимальный размер стороны ячейки составляет примерно $h \approx 0.12$, что соответствует примерно $1/13$ длины волны для $k = 4.1$, $1/5$ для $k = 10$ и $1/2.5$ для $k = 20$.

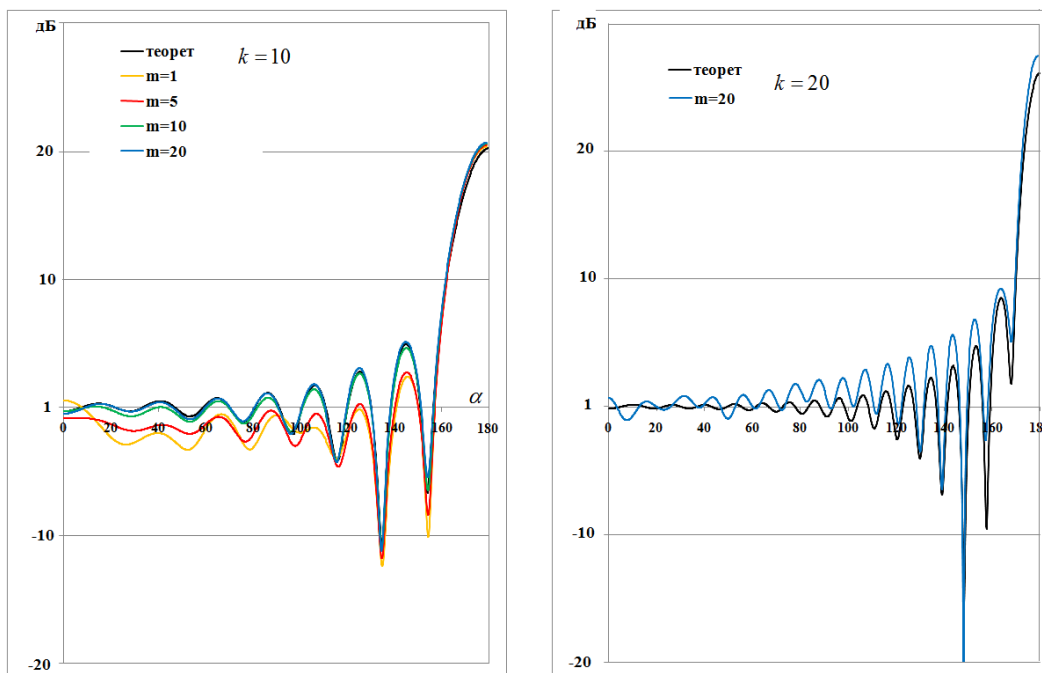


Рис. 3. Диаграмма рассеяния сферы. Разбиение на $30 \times 50 = 1500$ ячеек

Таким образом, при использовании дополнительного разбиения для аккуратного вычисления слабосингулярных интегралов хорошее согласование теоретических и расчетных результатов может быть достигнуто при отношении максимального размера ячеек разбиения и длины волны около $1/6$, что согласуется с известными оценками для наиболее эффективных численных методов. Для значения волнового числа $k = 20$ используемых сеток явно не достаточно.

Отметим, что в работе [5], где, как уже указывалось, использовалась схема с аппроксимацией слабосингулярных интегралов только по основной сетке, были получены аналогичные диаграммы направленности, хорошо согласующиеся с теоретическими для ряда значений волнового числа $k \leq 4.1$ при использовании разбиения на около 11 000 ячеек, что существенно больше, чем в расчетах, описанных в настоящей работе.

7.2. Дифракция электромагнитной волны на прямоугольном крыле. Для тестирования вычислительного алгоритма применительно к телам малой толщины была рассмотрена дифракция плоской электромагнитной волны на прямоугольном крыле. В такой задаче отражаются основные проблемы, связанные с применением метода граничных интегральных уравнений для тел малой толщины, такие как наличие расположенных близко друг к другу граничных поверхностей, наличие закругленной кромки с малым радиусом закругления и наличие острой кромки в форме двугранного угла малого раствора.

Для исследований было выбрано прямоугольное крыло с удлинением, равным 5 (размах крыла L , хорда крыла b , $L = 5b$), и классическим профилем НАСА-0012, толщина которого варьировалась: рассмотрены варианты с относительной толщиной профиля $C_{\max} = 5, 10, 15, 25\%$ (C_{\max} — отношение максимальной толщины профиля к хорде, выраженное в процентах). Кроме того, рассматривалась дифракция на плоской пластине ($C_{\max} = 0\%$), имеющей такую же форму в плане. Общий вид исследуемого объекта и схема облучения представлены на рис. 4.

В результате решения задачи дифракции строилась диаграмма обратного рассеяния, которая пред-

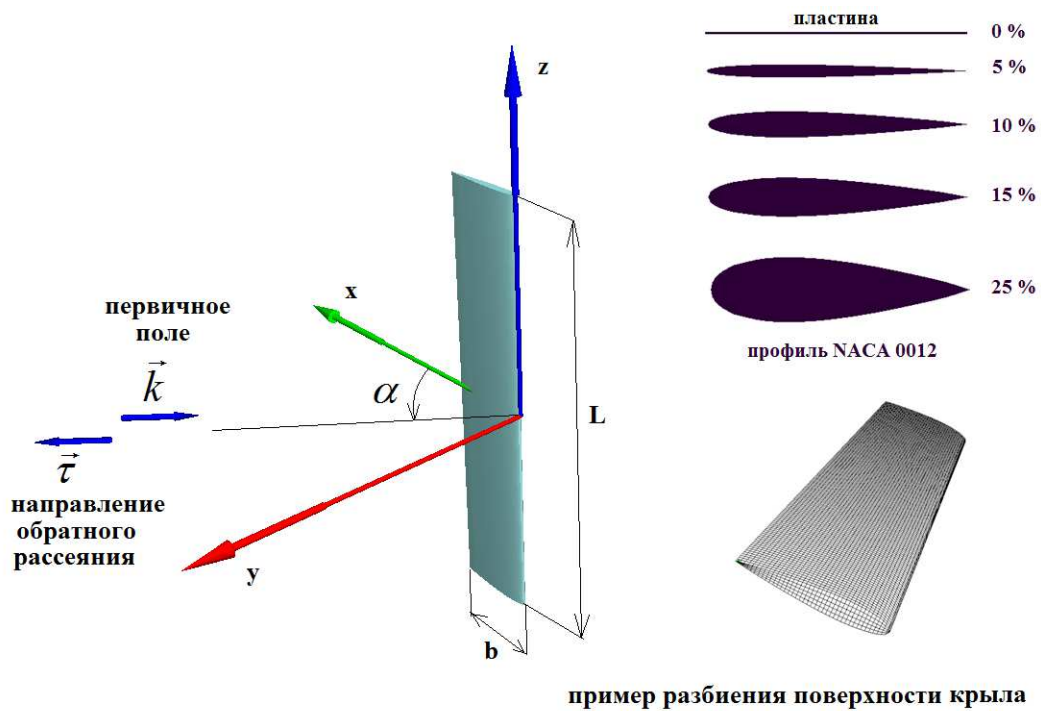


Рис. 4. Общий вид исследуемого объекта и схема облучения

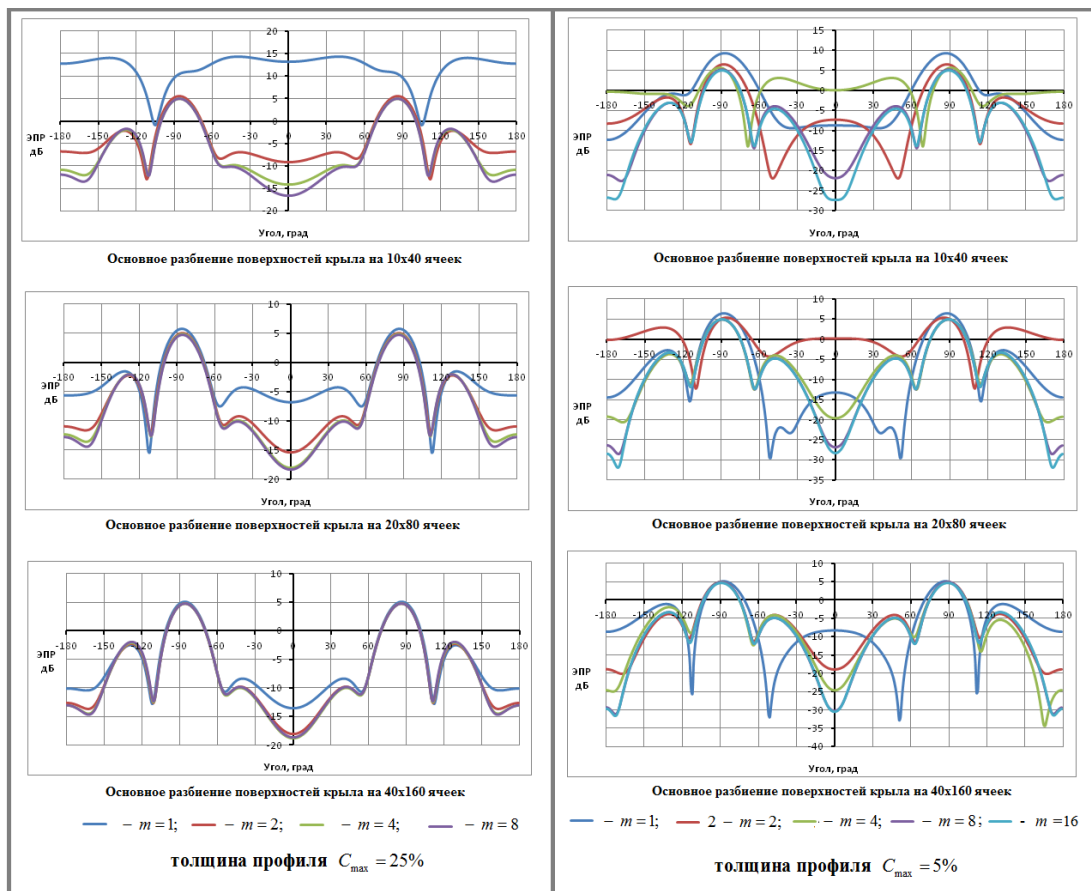


Рис. 5. Диаграмма обратного рассеяния. Зависимость от параметра m — числа ячеек дополнительного разбиения по каждой стороне основной ячейки. Длина волны $\lambda = b$

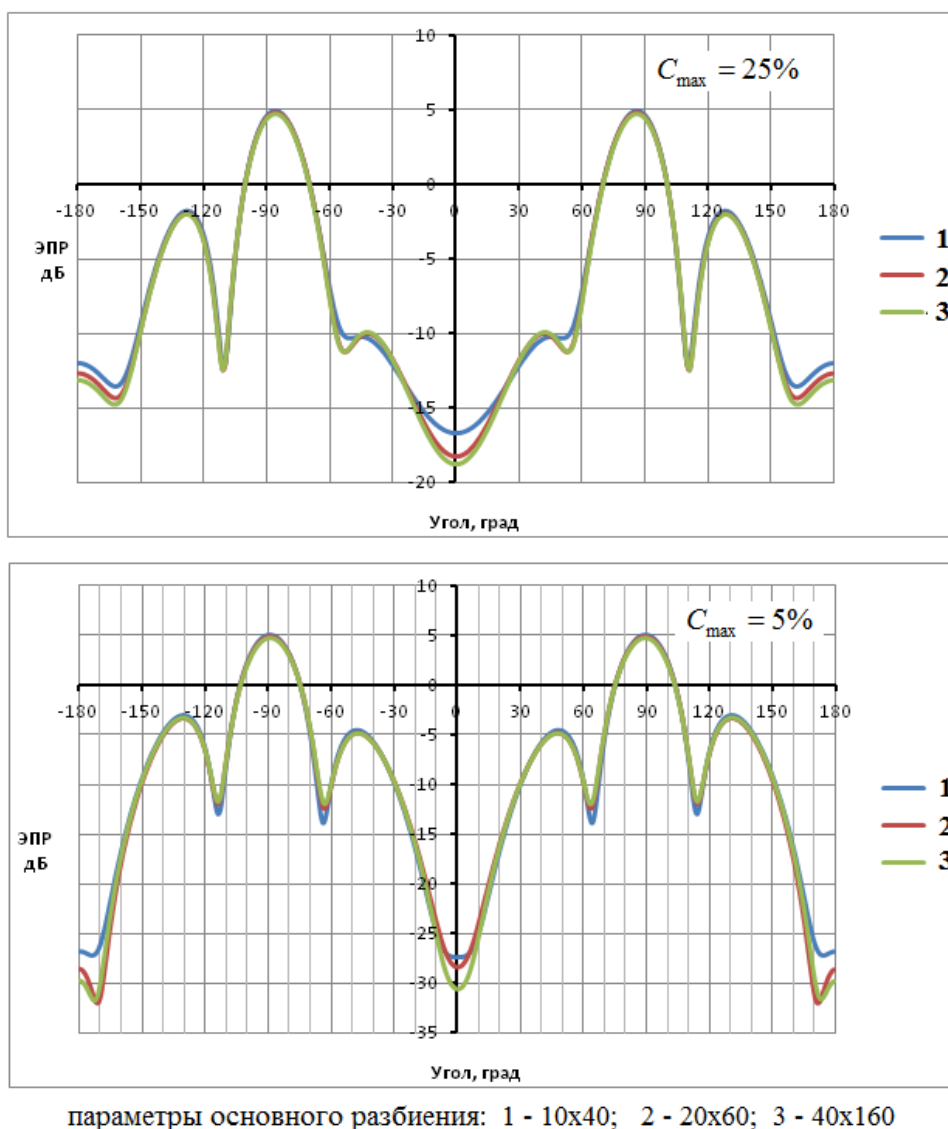


Рис. 6. Диаграмма обратного рассеяния. Зависимость от числа ячеек основного разбиения. Длина волны $\lambda = b$

ставляет собой зависимость величины эффективной площади рассеяния $\tilde{\sigma}(\alpha)$, выраженной в децибелах (см. формулы (18)–(19)), в направлении, обратном направлению падения волны, от угла облучения α . Варьирование направления облучения (волнового вектора \mathbf{k}) осуществлялось в плоскости поперечного срединного сечения крыла — плоскости OXY (рис. 4). Угол направления облучения α , определяющий направление вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\alpha)$, отсчитывается от оси OX в этой плоскости против часовой стрелки; в данном случае в формулах (18)–(19) вектор $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\alpha)$ есть единичный вектор, противоположно направленный вектору \mathbf{k} . В серии численных экспериментов рассматривалась только горизонтальная поляризация волны, при которой вектор напряженности первичного электрического поля параллелен плоскости OXY .

При решении задачи использовалось разбиение поверхности крыла, структура которого тоже показана на рис. 4. Для исследования сеточной сходимости численных решений для каждого варианта крыла, определяемого относительной толщиной профиля, были подготовлены сеточные модели с разбиением верхней и нижней поверхностей крыла на 10×40 , 20×80 и 40×160 ячеек, где первое число — количество ячеек вдоль хорды b , а второе — вдоль размаха L . В процессе нахождения коэффициентов матрицы системы линейных уравнений (13) при вычислении слабосингулярных интегралов вида (14) по формуле (16) использовалось дополнительное разбиение каждой ячейки на $t \times t$ дополнительных ячеек — на t ячеек по каждой стороне. Значение параметра t варьировалось в вычислительных экспериментах для выяснения его влияния на точность получаемых решений. Отметим, что значение этого параметра $t = 1$ соответствует расчету без дополнительного разбиения ячеек.

На рис. 5 и 6 приведены диаграммы обратного рассеяния для крыльев с профилями толщиной 25%

и 5%, полученные при падении первичного поля с длиной волны $\lambda = b$, при различных значениях вычислительных параметров.

Рис. 5 иллюстрирует зависимость получаемых результатов от параметра m — числа ячеек дополнительного разбиения по каждой стороне основной ячейки. Здесь видно, что при увеличении числа ячеек дополнительного разбиения на каждой сетке основного разбиения наблюдается практическая сходимость получаемых результатов, при этом число ячеек дополнительного разбиения необходимо увеличивать при уменьшении толщины крыла. С другой стороны, при измельчении основного разбиения необходимое число ячеек дополнительного разбиения на каждой ячейке уменьшается.

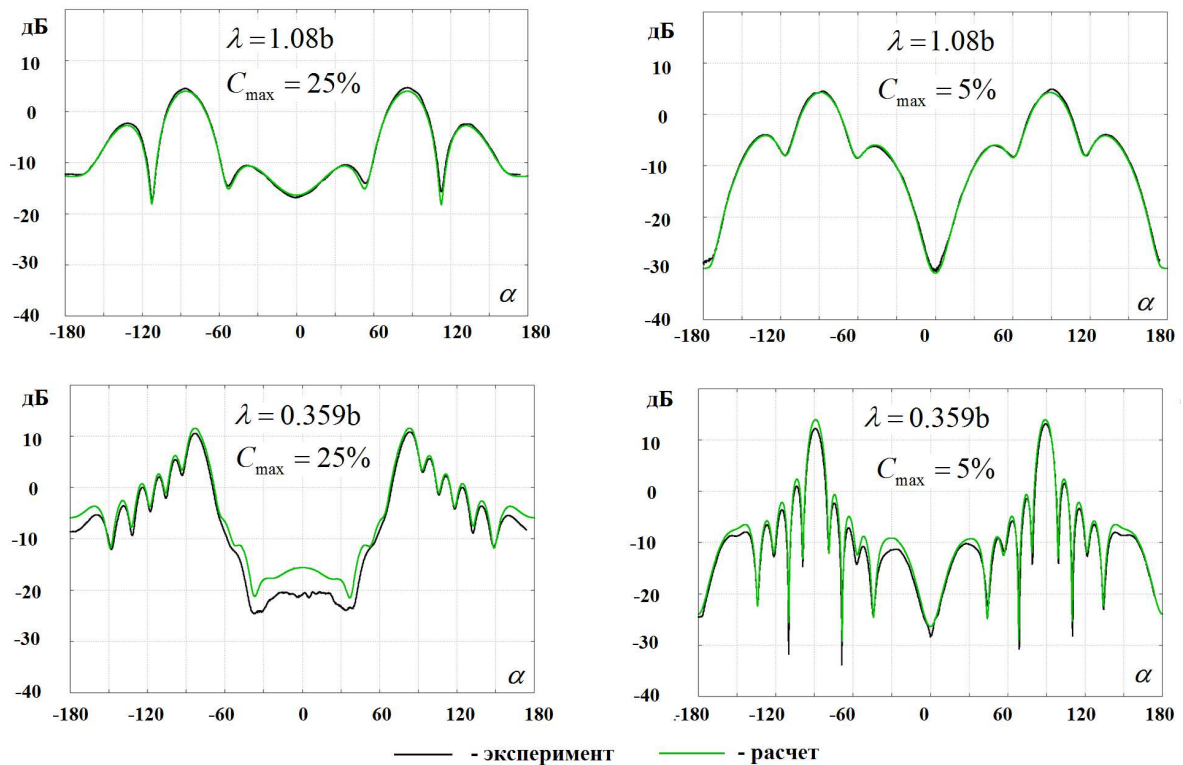


Рис. 7. Диаграммы обратного рассеяния. Сравнение расчетных и экспериментальных данных

Рис. 6 иллюстрирует зависимость получаемых результатов от числа ячеек основного разбиения при использовании достаточно мелкого дополнительного разбиения: для профиля с относительной толщиной 25% приведены результаты, полученные при $m = 8$, для профиля с относительной толщиной 5% — при $m = 16$. Здесь тоже видна тенденция к сходимости получаемых решений.

На рис. 7 приведены расчетные диаграммы обратного рассеяния в сравнении с экспериментальными данными (данные предоставлены Институтом теоретической и прикладной электродинамики РАН). Эти графики подтверждают достижение точности расчетов в пределах нескольких децибел.

Анализ описанных выше результатов показывает, что даже на грубой основной сетке с разбиением поверхностей крыла на 10×40 ячеек можно получить достаточно точные результаты, если использовать дополнительное разбиение каждой стороны ячейки на 8 более мелких ячеек для крыла с относительной толщиной 25% и на 16 ячеек для крыла с относительной толщиной 5%. Заметим, что при этом для крыла с относительной толщиной 5% толщина максимальная профиля крыла составляет $C = 0.05b$, размер ячейки основного разбиения составляет $h = 0.1b = 2C$, а размер ячейки дополнительного разбиения составляет $h = 0.00625b = C/8$.

На рис. 8 приведены диаграммы обратного рассеяния, полученные для крыла с различной относительной толщиной при облучении с различной длиной волны. Анализ этих результатов показывает, что при направлениях падения падающей волны от 0 до 60 градусов (облучение со стороны задней кромки) и от 160 до 180 градусов (облучение со стороны передней кромки) наблюдается сильная зависимость ЭПР от толщины крыла. При анализе отражающих свойств крыла при таких направлениях облучения нельзя заменять крыло тонким экраном, что часто делается для снижения вычислительной сложности прикладных расчетов.

Заметим также, что для повышения вычислительной эффективности описанного метода при решении более сложных задач представляется целесообразным применение быстрых алгоритмов решения систем линейных уравнений. Так, могут быть применены алгоритмы, основанные на сжатии матрицы системы линейных уравнений методом мозаично-скелетных аппроксимаций [11], как это сделано в статье [12] применительно к рассматриваемому классу задач и применительно к алгоритму, близкому к рассмотренному в настоящей работе.

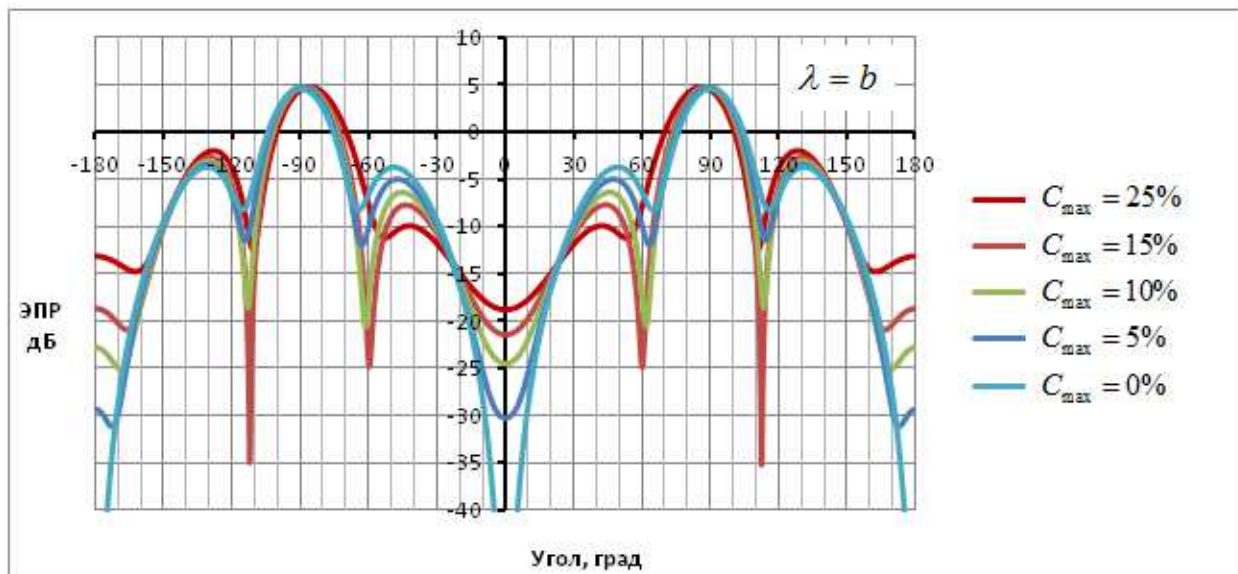


Рис. 8. Влияние толщины профиля на диаграмму обратного рассеяния

8. Заключение. Проведенное тестирование показало, что схема с использованием доразбиения ячеек основного разбиения и сглаживанием особенности при вычислении слабосингулярных интегралов позволяет существенно повысить точность получаемых численных решений без увеличения числа ячеек основного разбиения. Правильные результаты получаются при выполнении условия, что размер ячеек основного разбиения в несколько раз меньше длины волны (примерно в 6 раз и более). При этом для тел малой толщины правильные результаты расчета могут быть получены даже в случае, когда этот размер ячеек основного разбиения больше толщины тела, но при условии, что размер ячеек дополнительного разбиения в несколько раз меньше этой толщины.

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00804-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах: псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции. М.: Радиотехника, 1996.
2. Rao S.M., Wilton D.R., Glisson A.W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1982. **30**, № 3. 409–418.
3. Смирнов Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза: Пензенский гос. унив., 2009.
4. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // Докл. АН. 1984. **276**, № 1. 96–100.
5. Захаров Е.В., Рыжиков Г.В., Сетуха А.В. Численное решение трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеальнопроводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2014. **50**, № 9. 1253–1263.
6. Захаров Е.В., Сетуха А.В., Безобразова Е.Н. Метод гиперсингулярных интегральных уравнений в трехмерной задаче дифракции электромагнитных волн на кусочно-однородном диэлектрическом теле // Дифференциальные уравнения. 2015. **51**, № 9. 1206–1219.
7. Хёны Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
8. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
9. Давва С.Г., Сетуха А.В. О численном решении краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии (Электронный научный журнал). 2015. **16**, 421–435.

10. *Daeva S.G., Setukha A.V.* Numerical simulation of scattering of acoustic waves by inelastic bodies using hypersingular boundary integral equation // AIP Conference Proceedings. Vol. 1648. 2015. doi 10.1063/1.4912614.
11. *Tyrtysnikov E.* Mosaic-skeleton approximations // *Calcolo*. 1996. **33**, № 1–2. 47–57.
12. *Stavtsev S.L.* Block LU preconditioner for the electric field integral equation // Proc. of Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS). Prague: Czech Tech. Univ., 2015. 1523–1527.

Поступила в редакцию
24.10.2016

Peculiarities of the Boundary Integral Equation Method in the Problem of Electromagnetic Wave Scattering on Ideally Conducting Bodies of Small Thickness

A. V. Setukha¹ and S. N. Fetisov²

¹ *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: setuhaav@rambler.ru*

² *A. Lyulka Design Bureau, ulitsa Kasatkina, 13, Moscow, 129301, Russia; Design Engineer, e-mail: sereja.fit@gmail.com*

Received October 24, 2016

Abstract: The method of boundary integral equations with hypersingular integrals is used for the numerical solution of the classical problem of electromagnetic wave scattering on ideally conducting bodies. The corresponding integral equations are solved by the methods of piecewise constant approximations and collocation. As a result, the problem is reduced to a system of linear algebraic equations whose coefficients are expressed in terms of integrals over partition cells with a strong power singularity. These integrals are evaluated using the previously developed approach based on the extraction of terms with a strong singularity calculated analytically. The proposed numerical scheme based on the calculation of the remaining terms with weakly singular integrals over partition cells is performed by constructing a fine grid of second level with multiplication of the integrands on a smoothing factor is tested. By the example of scattering on a rectangular it is shown, in particular, that this scheme allows one to solve the scattering problem on bodies of small thickness. In this case, the thickness of a body may be less than the diameter of the first level cells. However, the diameter of the second level cells must be much less than the thickness of the body.

Keywords: boundary integral equations, hypersingular integrals, discrete singularity method, electromagnetic waves scattering, scattering cross section.

References

1. A. S. Il'insky and Yu. G. Smirnov, *Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens* (Radiotekhnika, Moscow, 1996; VSP, Utrecht, 1998).
2. S. M. Rao, D. Wilton, and A. W. Glisson, "Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape," *IEEE Trans. Antennas Propag.* **30** (3), 409–418 (1982).
3. Yu. G. Smirnov, *Mathematical Methods for Electrodynamical Problems* (Penza State Univ., Penza, 2009) [in Russian].
4. A. G. Davydov, E. V. Zakharov, and Yu. V. Pimenov, "Method for the Numerical Solution of Problems in the Diffraction of Electromagnetic Waves by Open Surfaces of Arbitrary Shape," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **276** (1), 96–100 (1984) [*Sov. Phys. Dokl.* **29**, 380–384 (1984)].
5. E. V. Zakharov, G. V. Ryzhakov, and A. V. Setukha, "Numerical Solution of 3D Problems of Electromagnetic Wave Diffraction on a System of Ideally Conducting Surfaces by the Method of Hypersingular Integral Equations," *Differ. Uravn.* **50** (9), 1253–1263 (2014) [*Differ. Equ.* **50** (9), 1240–1251 (2014)].
6. E. V. Zakharov, A. V. Setukha, and E. N. Bezobrazova, "Method of Hypersingular Integral Equations in a Three-Dimensional Problem of Diffraction of Electromagnetic Waves on a Piecewise Homogeneous Dielectric Body," *Differ. Uravn.* **51** (9), 1206–1219 (2015) [*Differ. Equ.* **51** (9), 1197–1210 (2015)].
7. H. Hönl, A. W. Maue, and K. Westpfahl, *Theorie der Beugung* (Berlin, Springer, 1961; Mir, Moscow, 1964).

8. D. Colton and R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory* (New York, Wiley, 1983; Mir, Moscow, 1987).
9. S. G. Daeva and A. V. Setukha, "On the Numerical Solution of the Neumann Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation Using the Method of Hypersingular Integral Equations," *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 421–435 (2015).
10. S. G. Daeva and A. V. Setukha, "Numerical Simulation of Scattering of Acoustic Waves by Inelastic Bodies Using Hypersingular Boundary Integral Equation," *AIP Conf. Proc.* **1648** (2015). doi 10.1063/1.4912614
11. E. Tyrtshnikov, "Mosaic-Skeleton Approximations," *Calcolo* **33** (1–2), 47–57 (1996).
12. S. L. Stavtsev, "Block LU Preconditioner for the Electric Field Integral Equation," in *Proc. of Progress in Electromagnetics Research Symposium, Prague, Czech Republic, July 6–9, 2015* (Czech Tech. Univ., Prague, 2015), pp. 1523–1527.