

УДК 519.246.8

doi 10.26089/NumMet.v17r441

ФЛУКТУАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ В УРАВНЕНИЯХ ГАЛАКТИЧЕСКОГО ДИНАМО

Е. А. Михайлов¹, В. В. Пушкарев²

При исследовании магнитных полей в галактиках с неоднородной средой оказывается полезным рассмотрение уравнений динамо со случайными коэффициентами. Эти уравнения описывают магнитные поля в галактиках с интенсивным звездообразованием, взрывами сверхновых и другими активными процессами, которые сильно меняют свойства межзвездной среды. Ранее были изучены уравнения, в которых стохастическими закономерностями описывается альфа-эффект. В настоящей статье исследована задача, в которой учтены случайные флуктуации коэффициентов, отвечающих за турбулентную диффузию. Предложена модель, в рамках которой соответствующий коэффициент на коротких промежутках времени принимает одно из двух значений с определенной вероятностью, после чего обновляется. Получены асимптотические оценки скорости роста решения. Эти оценки проверены и уточнены с помощью численного моделирования. Показано, что при определенном значении вероятности устойчивый рост магнитного поля сменяется затуханием. Продемонстрировано, что в указанной задаче присутствует явление перемежаемости: старшие статистические моменты решения растут быстрее младших. Изучено поведение магнитного поля в случае, если магнитное поле описывается нелинейной модификацией уравнений динамо, что соответствует возникновению неоднородности в межзвездной среде уже после того, как магнитное поле вышло на стационарное значение.

Ключевые слова: магнитные поля галактик, уравнения со случайными коэффициентами, перемежаемость, теория динамо.

1. Введение. С точки зрения как теории вероятностей, так и вычислительной математики большой интерес представляют дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами. Их решения демонстрируют ряд интересных свойств, таких как перемежаемость, заключающуюся в том, что старшие статистические моменты решения растут быстрее младших [1]. Кроме того, подобные уравнения находят большое количество приложений в физике, астрономии и других естественных науках. Например, известное в молекулярной физике явление, связанное с тем, что среднеквадратичные скорости частиц газа выше, чем их средние значения, свидетельствует о наличии перемежаемости в соответствующих стохастических задачах [2]. Распространение света во Вселенной может быть описано при помощи поля, подчиняющегося уравнению Якоби со случайным коэффициентом [3, 4]. В простейшем случае свет моделируется кусочно-постоянной функцией времени (на каждом из коротких временных отрезков принимает случайные значения, не зависящие друг от друга). Если составить вектор-строку, первый из элементов которой — решение уравнения, а второй — его производная, то эволюция данного вектора представляется при помощи фундаментальной матрицы. Эта матрица составляется путем перемножения большого числа переходных матриц. Каждая из них соответствует одному интервалу обновления случайной величины. Начиная с некоторого момента решение начинает расти по экспоненциальному закону. Этот результат может быть получен как при помощи теоретического исследования [5], так и путем численного моделирования [4].

Настоящая статья посвящена приложению стохастических дифференциальных уравнений для решения одной из важных задач теории динамо, описывающей эволюцию крупномасштабных полей в галактиках. Система уравнений, возникающая в этом случае, качественно похожа на то, что было рассмотрено в [4], при этом имеет вполне прозрачное физическое приложение. Важно проверить, будет ли ее решение воспроизводить результаты, полученные ранее.

Механизм динамо основан на двух явлениях: дифференциальном вращении (связанном с тем, что угловая скорость вращения галактики зависит от расстояния до ее центра) и альфа-эффекте, характеризующем “закрученность” турбулентных движений [6, 7]. Они описываются безразмерными управляющими

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; ассистент, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru

² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: pushkarev.vv14@physics.msu.ru

параметрами, характеризующими свойства межзвездной среды. В большинстве случаев полагается, что они постоянны и не отличаются в разных частях галактики. При этом есть ряд объектов, в которых происходят такие процессы, как звездообразование, взрывы сверхновых и другие явления, сильно меняющие свойства межзвездного газа. Подобные процессы вызывают бурные изменения свойств межзвездной среды и должны быть учтены при задании управляющих параметров динамо. В таком случае перспективным выглядит исследование моделей магнитного поля, в которых управляющие параметры динамо описываются стохастическими закономерностями [9], поскольку области звездообразования расположены довольно случайным образом и существуют в течение сравнительно недолгого времени.

Заметим, что модели динамо со случайными коэффициентами на данный момент изучены довольно мало. Можно отметить ряд работ, посвященных исследованиям стохастических эффектов в солнечном динамо [10–13]. Что касается галактик, то существуют исследования [8, 14], посвященные флуктуациям альфа-эффекта. При этом нет уверенности, что не следует рассматривать задачу, когда коэффициент турбулентной диффузии тоже является случайным. Интенсивность подобных процессов увеличивается при росте скорости турбулентных движений, и это должно быть учтено при моделировании магнитных полей галактик. Поэтому в нашей работе мы изучили возможность флуктуации случайного коэффициента, отвечающего за турбулентную диффузию.

В качестве модели для коэффициентов брались кусочно-постоянные случайные процессы с конечным временем памяти. В рамках наших предположений полагалось, что с определенной вероятностью величина турбулентной вязкости принимает одно из двух возможных значений. Мы получили асимптотические оценки скоростей роста для разных значений вероятности, после чего результаты были проверены путем численного моделирования. Продемонстрировано, что в определенных случаях наблюдается не рост поля, а его затухание. Получено “пороговое” значение для вероятности, при котором происходит переключение с одного режима на другой. Подтверждено, что в рамках описанной модели среднеквадратичное поле растет быстрее среднего, т.е. в рассматриваемой задаче действительно наблюдается эффект перемежаемости.

2. Модель галактического динамо. Эволюция крупномасштабного магнитного поля описывается уравнением Штеенбека–Краузе–Рэдлера [15]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \text{rot} (\alpha \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \quad (1)$$

где \mathbf{B} — магнитное поле, \mathbf{V} — скорость крупномасштабных движения среды, α — коэффициент, отвечающий за альфа-эффект (характеризует “закрученность” турбулентных движений), η — коэффициент турбулентной диффузии.

В случае галактик широко применяется так называемое планарное приближение [16, 17], которое учитывает то, что галактический диск является тонким. В его рамках уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\frac{dB_r}{dt} = -\frac{\pi\alpha}{2h} B_\varphi - \eta \frac{\pi^2}{4h^2} B_r, \quad \frac{dB_\varphi}{dt} = -r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \eta \frac{\pi^2}{4h^2} B_\varphi. \quad (2)$$

Если полагать, что “спокойной” межзвездной среде соответствует коэффициент турбулентной диффузии η_0 , то можно ввести “безразмерное” время $t' = \frac{\eta_0}{h^2} t$ [16] и два безразмерных параметра

$$R_\alpha = \frac{\pi\alpha h}{2\eta_0}, \quad R_\omega = \frac{1}{\eta_0} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} h^2.$$

Обычно считают, что $R_\alpha \sim 1$, $R_\omega \sim 10$.

Тогда система уравнений (2) может быть переписана в форме

$$\frac{dB_r}{dt'} = -R_\alpha B_\varphi - k B_r, \quad \frac{dB_\varphi}{dt'} = -R_\omega B_r - k B_\varphi, \quad (3)$$

где $k = \frac{\pi^2 \eta}{4\eta_0}$ — коэффициент, характеризующий отличие величины турбулентной диффузии в исследуемом случае от того, что соответствует “спокойной” галактике с небольшой долей ионизованной компоненты. В дальнейшем мы будем опускать штрихи и понимать под временем его безразмерный вариант.

В ряде случаев весьма важно учитывать, что рост галактического магнитного поля обусловлен переходом кинетической энергии турбулентных движений в энергию магнитного поля. Поэтому, когда эти энергии становятся сопоставимыми, рост поля должен замедляться. Это можно учесть, сделав нелинейную модификацию коэффициента, отвечающего за альфа-эффект [17]: $R_\alpha = R_{\alpha 0} \left(1 - \frac{B_r^2 + B_\varphi^2}{B_*^2} \right)$, где

B^* — магнитное поле, соответствующее равномерному распределению энергии между турбулентными движениями и магнитным полем [17]. Для удобства далее мы будем измерять поле в единицах B^* . Тогда система (3) будет переписана в форме

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_{\alpha 0} B_{\varphi} (1 - B_r^2 - B_{\varphi}^2) - k B_r, \quad \frac{dB_{\varphi}}{dt} = -R_{\omega} B_r - k B_{\varphi}. \quad (4)$$

Мы полагали, что k на каждом из полуинтервалов $[0, \tau), [\tau, 2\tau), \dots, [(n-1)\tau, n\tau), \dots$ для асимптотических оценок принимает одно из двух случайных значений:

$$k = \begin{cases} k_1 & \text{с вероятностью } p; \\ k_2 & \text{с вероятностью } (1-p). \end{cases} \quad (5)$$

Численное моделирование предполагает возможность рассмотрения более сложной плотности распределения (рис. 1):

$$f(k) = \begin{cases} p & \text{при } k_1 - 0.5 < k < k_1 + 0.5; \\ (1-p) & \text{при } k_2 - 0.5 < k < k_2 + 0.5; \\ 0 & \text{при всех остальных } k. \end{cases} \quad (6)$$

При переходе от одного полуинтервала к другому значение k обновляется. Вероятность p характеризует интенсивность процессов, связанных со звездообразованием, взрывами сверхновых и др.

3. Оценка поведения магнитного поля. Оценим скорость роста магнитного поля при флуктуациях параметров межзвездной среды в линейном случае (3). Если положить, что решение имеет вид

$$B_r(t) = B_{0r} \exp(\gamma t), \quad B_{\varphi}(t) = B_{0\varphi} \exp(\gamma t),$$

то система уравнений (3) имеет решение при следующих значениях скорости роста:

$$\gamma^+ = -k + \sqrt{R_{\alpha} R_{\omega}}, \quad \gamma^- = -k - \sqrt{R_{\alpha} R_{\omega}}.$$

Решение представляется в виде

$$\mathbf{B} = C_+ \mathbf{B}_+ \exp(\gamma^+ t) + C_- \mathbf{B}_- \exp(\gamma^- t), \quad \text{где } \mathbf{B}_+ = \begin{pmatrix} -\sqrt{R_{\alpha}} \\ \sqrt{R_{\omega}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_- = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{\alpha}} \\ \sqrt{R_{\omega}} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что векторы \mathbf{B}_+ и \mathbf{B}_- не зависят от значения k .

Если в момент времени $t = 0$ имеем $\mathbf{B} = C_+ \mathbf{B}_+ + C_- \mathbf{B}_-$, то

$$\mathbf{B}(n\tau) = C_+ \mathbf{B}_+ \exp(\gamma^+(0)\tau) \dots \exp(\gamma^+((n-1)\tau)\tau) + C_- \mathbf{B}_- \exp(\gamma^-(0)\tau) \dots \exp(\gamma^-((n-1)\tau)\tau). \quad (7)$$

Вторая часть суммы в (7) соответствует лишь отрицательной скорости роста, поэтому при больших временах ею можно пренебречь. Для модуля поля $B = \sqrt{B_r^2 + B_{\varphi}^2}$ при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$B(n\tau) = A \exp(\gamma^+(0)\tau) \dots \exp(\gamma^+((n-1)\tau)\tau) + o\left(\exp(-n\tau\sqrt{R_{\alpha} R_{\omega}})\right),$$

где $A = C_+ \sqrt{R_{\alpha} + R_{\omega}}$.

Поэтому скорость экспоненциального роста типичной реализации магнитного поля можно оценить следующим образом:

$$\lambda_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln|B(n\tau)|}{n\tau} = p\gamma_1 + (1-p)\gamma_2, \quad \text{где } \gamma_1 = -k_1 + \sqrt{R_{\alpha} R_{\omega}}; \quad \gamma_2 = -k_2 + \sqrt{R_{\alpha} R_{\omega}}. \quad (8)$$

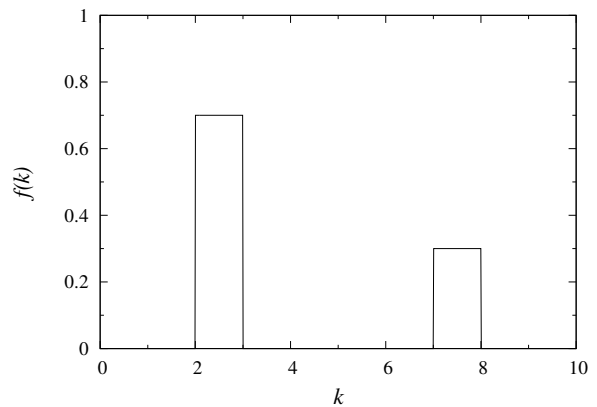


Рис. 1. Функция плотности вероятности $f(k_1)$ при $p = 0.3, k_1 = 7.5, k_2 = 2.5$

Оценим теперь среднее значение магнитного поля в момент времени $t = n\tau$. Поскольку на каждом из отрезков времени значение поля описывается формулой (5), то с вероятностью $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ модуль поля B представляется в виде

$$B(n\tau) = A \exp(m\gamma_1\tau) \exp((n-m)\gamma_2\tau). \quad (9)$$

Среднее значение выразится так:

$$\langle B(n\tau) \rangle = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} A \exp(m\gamma_1\tau) \exp((n-m)\gamma_2\tau), \quad (10)$$

или так: $\langle B(n\tau) \rangle = A(p \exp(\gamma_1\tau) + (1-p) \exp(\gamma_2\tau))^n = A \exp(\gamma_2 n\tau) \left(1 - p + p \exp((\gamma_1 - \gamma_2)\tau)\right)^n$.

При малых τ , удерживая слагаемые вплоть до второго порядка малости по τ включительно, получим

$$1 - p + p \exp((\gamma_1 - \gamma_2)\tau) = 1 + p(\gamma_1 - \gamma_2)\tau + \frac{1}{2}p(\gamma_1 - \gamma_2)^2\tau^2. \quad (11)$$

Логарифмируя (11) и вновь оставляя слагаемые вплоть до второго порядка малости, получим

$$\ln\left(1 - p + p \exp((\gamma_1 - \gamma_2)\tau)\right) = p(\gamma_1 - \gamma_2)\tau + \frac{1}{2}p(1-p)(\gamma_1 - \gamma_2)^2\tau^2.$$

Тогда $\langle B(n\tau) \rangle = A \exp\left(\left((1-p)\gamma_2 + p\gamma_1 + \frac{1}{2}p(1-p)(\gamma_1 - \gamma_2)^2\tau\right)n\tau\right)$.

С учетом того, что $t = n\tau$, скорость роста среднего магнитного поля при больших n выражается формулой

$$\lambda_1 = (1-p)\gamma_2 + p\gamma_1 + \frac{1}{2}p(1-p)(\gamma_1 - \gamma_2)^2\tau. \quad (12)$$

Оценим скорость роста среднеквадратичного поля. По аналогии с (9) и (10) получим

$$\begin{aligned} B^2(n\tau) &= A^2 \exp(2m\gamma_1\tau) \exp(2(n-m)\gamma_2\tau); \\ \langle B^2(n\tau) \rangle &= \sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} A^2 \exp(2m\gamma_1\tau) \exp(2(n-m)\gamma_2\tau); \\ \langle B^2(n\tau) \rangle &= A^2 (p \exp(2\gamma_1\tau) + (1-p) \exp(2\gamma_2\tau))^n = \\ &= A^2 \exp(2\gamma_2 n\tau) \left(1 - p + p \exp(2(\gamma_1 - \gamma_2)\tau)\right)^n. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные вычисления, получим

$$\langle B^2(n\tau) \rangle = A^2 \exp\left(\left(2(1-p)\gamma_2 + 2p\gamma_1 + 2p(1-p)(\gamma_1 - \gamma_2)^2\tau\right)n\tau\right).$$

Извлекая квадратный корень, получим

$$\sqrt{\langle B^2(n\tau) \rangle} = A \exp\left(\left((1-p)\gamma_2 + p\gamma_1 + p(1-p)(\gamma_1 - \gamma_2)^2\tau\right)n\tau\right).$$

Скорость роста среднеквадратичного магнитного поля выражается формулой

$$\lambda_2 = (1-p)\gamma_2 + p\gamma_1 + p(1-p)(\gamma_1 - \gamma_2)^2\tau = \lambda_1 + \frac{1}{2}p(1-p)(\gamma_1 - \gamma_2)^2\tau. \quad (13)$$

Таким образом, среднеквадратичное магнитное поле должно расти быстрее, чем среднее. Можно показать, что $\sqrt[3]{\langle B^3(t) \rangle}$ и следующие статистические моменты растут еще быстрее. В этом заключается так называемая перемежаемость [1].

Отметим, что оценки скорости роста магнитного поля могут быть также получены с помощью так называемой инвариантной меры [18]. Для одного из частных случаев подобная работа проводилась, например, в [19].

Полученные оценки имеет смысл проверить численно. Кроме того, важно изучить поведение поля в случае нелинейной задачи (4).

4. Численное исследование моделей. При численном решении системы уравнений (3) мы полагаем, что коэффициент k описывается формулой (6) с интервалом обновления $\tau = 0.01$ и значениями $k_1 = 7.5$ и $k_2 = 2.5$. Отметим, что при переходе к “размерным” единицам интервал обновления соответствует величине около 7×10^6 лет, что близко к характерному времени существования областей ионизованного водорода. Для численной реализации данного процесса использовался генератор случайных чисел, встроенный в среду программирования C++ (компилятор g++). Численное исследование позволяет нам рассмотреть коэффициент, значения которого распределены не только дискретно, но и непрерывно. Поэтому мы изучили случай, когда они имеют плотности вероятности, локализованные в небольших, но конечных областях.

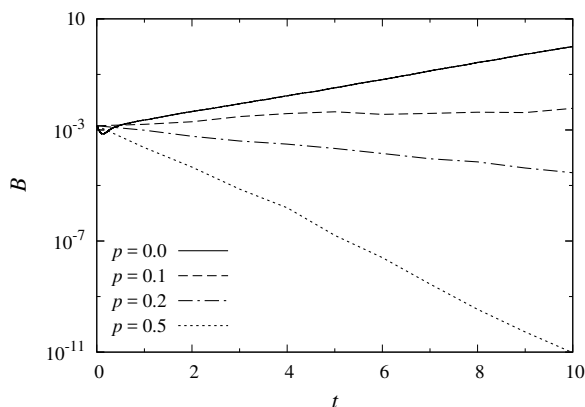


Рис. 2. Зависимость B от времени для различных значений вероятности p . Сплошная линия соответствует $p = 0.0$, штриховая — $p = 0.1$, штрихпунктирная — $p = 0.2$, пунктирная — $p = 0.5$

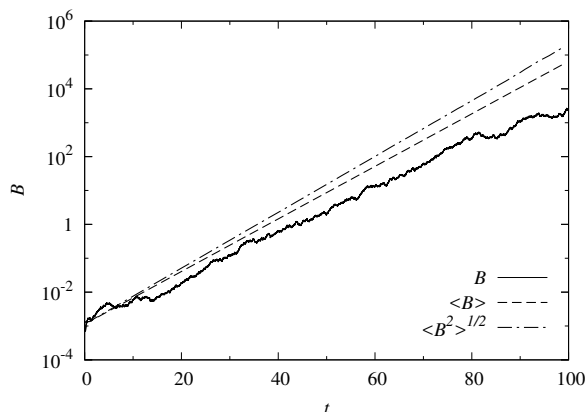


Рис. 3. Типичное решение и статистические моменты магнитного поля при $p = 0.1$. Сплошная линия соответствует типичному решению, штриховая — среднему значению, штрихпунктирная — среднеквадратичному

Поведение поля при различных значениях p показано на рис. 2. Устойчивый рост поля наблюдается при $p < 0.13$, при бóльших значениях p поле затухает. На рис. 3 показано поведение типичной реализации магнитного поля, его среднего и среднеквадратичного значения (проводилось усреднение по 10^5 реализациям). Можно видеть, что магнитное поле демонстрирует эффект перемежаемости, т.е. среднеквадратичное решение растет быстрее среднего и типичной реализации [1].

Показатели экспоненциального роста типичного решения, среднего и среднеквадратичного значения в задаче с флуктуациями коэффициента турбулентной диффузии

p	Численные значения			Теоретические оценки		
	λ_0	λ_1	λ_2	λ_0	λ_1	λ_2
0.0	0.671	0.680	0.681	0.662	0.662	0.662
0.1	0.182	0.180	0.191	0.162	0.174	0.185
0.2	-0.366	-0.300	-0.280	-0.338	-0.318	-0.298
0.5	-1.86	-1.79	-1.76	-1.84	-1.81	-1.78

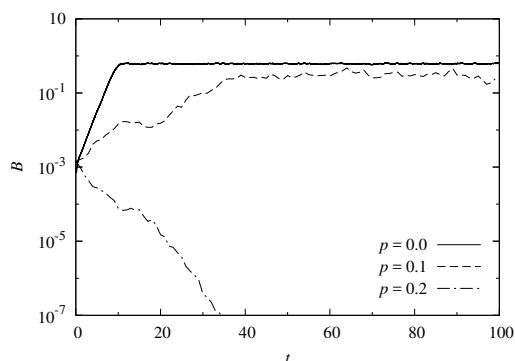


Рис. 4. Зависимость B от времени для различных значений вероятности p в нелинейном варианте задачи. Сплошная линия соответствует $p = 0.0$, штриховая — $p = 0.1$, штрихпунктирная — $p = 0.2$

В таблице приведены скорости экспоненциального роста различных статистических моментов (типичной реализации, среднего и среднеквадратичного значений). Кроме того, там же указаны теоретические оценки, полученные по формулам (8), (12) и (13). Можно отметить, что оба метода демонстрируют весьма неплохое сходство друг с другом.

Кроме того, исследовался нелинейный вариант модели (система уравнений (4)), при этом коэффициент турбулентной диффузии k тоже задавался с помощью функции плотности вероятности (6). Результаты приведены на рис. 4. При малых значениях напряженности магнитное поле ведет себя примерно так же, как и в линейном случае. Однако когда магнитное поле приближается к равновесному значению (в нашем случае безразмерных единиц $B = 1.0$), оно начинает совершать колебания в его окрестности. Это позволяет судить о том, что будет в случае, если флуктуации магнитного поля происходят не на начальной стадии эволюции галактики, а позднее, когда поле уже вышло на стационарное значение.

5. Заключение. Мы исследовали модель галактического динамо с флуктуациями коэффициента турбулентной диффузии. Были получены как теоретические оценки, так и численные расчеты, которые хорошо согласуются друг с другом. Показано, что влияние флуктуаций на поведение магнитного поля имеет пороговый характер. При небольшой их величине (малые значения p) они лишь слегка возмущают зависимость решения от времени, но после достижения определенных пороговых значений рост сменяется затуханием.

Полученные результаты могут быть использованы при изучении влияния на поведение магнитного поля таких процессов, как звездообразование, взрывы сверхновых и др. Так, если растет скорость турбулентных движений, то увеличивается пропорциональный ей коэффициент турбулентной диффузии, что и иллюстрирует наша модель с его флуктуациями. Время существования областей ионизованного водорода, в которых и происходит рост скоростей турбулентных движений, близко ко времени обновления случайного коэффициента в наших расчетах. Это позволяет сделать вывод, что в том случае, если влияние звездообразования действительно сводится к возмущениям коэффициента турбулентной диффузии, характер влияния звездообразования на магнитное поле является пороговым. Это соответствует результатам, полученным в *детерминистической модели* [8].

Следует также отметить, что результаты для рассматриваемой задачи похожи на то, что было получено для более абстрактного уравнения Якоби. Решение растет по экспоненциальному закону и демонстрирует эффект перемежаемости. Среднеквадратичное поле растет быстрее среднего, что подтверждается как теоретическими оценками, так и путем численного моделирования.

Авторы благодарят профессора Д. Д. Соколова за ценные рекомендации и всестороннее обсуждение данной работы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 16-32-00056 мол _а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Перемежаемость в случайной среде // Успехи физических наук. 1987. **152**, № 1. 3–32.
2. Грачев Д.А. О соотношении между численным и аналитическим подходами к исследованию стохастических дифференциальных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**. 234–238.
3. Зельдович Я.Б. Наблюдения во Вселенной, однородной лишь в среднем // Астрон. журн. 1964. **41**, № 1. 19–24.
4. Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н. Фундаментальная матрица для уравнения Якоби со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 261–268.
5. Tutubalin V.N. A central limit theorem for products of random matrices and some of its applications // Symposia Mathematica. 1977. **XXI**. 101–116.
6. Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D. Galactic magnetism: recent development and perspectives // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1996. **34**. 155–206.
7. Arshakian T.G., Beck R., Krause M., Sokoloff D. Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array // Astron. Astrophys. 2009. **494**, N 1. 21–32.
8. Михайлов Е.А. Звездообразование и модель галактического динамо с потоками спиральности // Письма в астрономический журнал. 2014. **40**, № 7. 445–453.
9. Михайлов Е.А., Модяев И.И. Уравнения галактического динамо со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 351–358.
10. Proctor M.R.E. Effects of fluctuation on $\alpha\Omega$ dynamo models // Mon. Not. R. Astr. Soc. 2007. **382**, N 1. L39–L42.
11. Richardson K.J., Proctor M.R.E. Fluctuating $\alpha\Omega$ dynamos by iterated matrices // Mon. Not. R. Astr. Soc. 2012. **422**, N 1. L53–L56.
12. Newton A.P.L., Kim E. Determining the temporal dynamics of the solar α effect // Astron. Astrophys. 2013. **551**. doi 10.1051/0004-6361/201219456.
13. Passos D., Nandy D., Hazra S., Lopes I. A solar dynamo model driven by mean-field alpha and Babcock–Leighton sources: fluctuations, grand-minima-maxima, and hemispheric asymmetry in sunspot cycles // Astron. Astrophys. 2014. **563**. doi 10.1051/0004-6361/201322635.
14. Sur S., Subramanian K. Galactic dynamo action in presence of stochastic α and shear // Mon. Not. R. Astr. Soc. 2009. **392**, N 1. L6–L10.

15. *Морфат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980.
16. *Moss D.* On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1995. **275**, N 1. 191–194.
17. *Phillips A.* A comparison of the asymptotic and no-z approximations for galactic dynamos // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* 2001. **94**, N 1–2. 135–150.
18. *Илларионов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Стационарное распределение произведения матриц со случайными коэффициентами // *Вычислительные методы и программирование.* 2012. **13**. 218–225.
19. *Mikhailov E.A., Modyaev I.I.* Dynamo equations with random coefficients // *Magnetohydrodynamics.* 2015. **51**, N 2. 285–292.

Поступила в редакцию
14.10.2016

Fluctuations of the Turbulent Diffusion Coefficient in Galaxy Dynamo Equations

E. A. Mikhailov¹ and V. V. Pushkarev²

¹ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Assistant, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru*

² *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Student, e-mail: pushkarev.vv14@physics.msu.ru*

Received October 10, 2016

Abstract: When studying magnetic fields in galaxies with inhomogeneous media, it is reasonable to study dynamo equations with random coefficients. These equations are useful to describe magnetic fields in galaxies with intensive star formation, supernova explosions and other active processes that change the properties of interstellar media. Before we studied the equations where the alpha-effect coefficient is random. In this paper we study the problem where the turbulent diffusion coefficient has fluctuations. We propose a model where the coefficient takes one of two values with some probabilities on small time intervals and after that renews. We obtain estimates for the asymptotic rates of growth. These estimates are confirmed and improved by numerical simulation procedures. It is shown that for some probabilities the growth of the magnetic field is changed by decay. It is also shown that the intermittency phenomenon takes place in such equations: the higher momenta of the magnetic field grow faster than the lower ones. The magnetic field behavior is studied in the nonlinear case, which corresponds to the appearance of inhomogeneity in the interstellar medium after the instant when the magnetic field has reached the stationary state.

Keywords: galaxy magnetic fields, equations with random coefficients, intermittency, dynamo theory.

References

1. Ya. B. Zel'dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov, "Intermittency in Random Media," *Usp. Fiz. Nauk* **152** (1), 3–32 (1987) [*Sov. Phys. Usp.* **30** (5), 353–369 (1987)].
2. D. A. Grachev, "A Relation between Numerical and Analytical Results for Stochastic Differential Equations," *Vychisl. Metody Programm.* **9**, 234–238 (2008).
3. Ya. B. Zel'dovich, "Observations in a Universe Homogeneous in the Mean," *Astron. Zh.* **41** (1), 19–24 (1964) [*Sov. Astron.* **8** (1), 13–16 (1964)].
4. E. A. Mikhailov, D. D. Sokoloff, and V. N. Tutubalin, "The Fundamental Matrix for the Jacobi Equation with Random Coefficients," *Vychisl. Metody Programm.* **11**, 261–268 (2010).
5. V. N. Tutubalin, "A Central Limit Theorem for Products of Random Matrices and Some of Its Applications," *Symposia Mathematica* **XXI**, 101–116 (1977).
6. R. Beck, A. Brandenburg, D. Moss, et al., "Galactic Magnetism: Recent Development and Perspectives," *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 155–206 (1996).
7. T. G. Arshakian, R. Beck, M. Krause, and D. Sokoloff, "Evolution of Magnetic Fields in Galaxies and Future Observational Tests with the Square Kilometre Array," *Astron. Astrophys.* **494** (1), 21–32 (2009).
8. E. A. Mikhailov, "Star Formation and Galactic Dynamo Model with Helicity Fluxes," *Pis'ma Astron. Zh.* **40** (7), 445–453 (2014) [*Astron. Lett.* **40** (7), 398–405 (2014)].

9. E. A. Mikhailov and I. I. Modyaev, “Galactic Dynamo Equations with Random Coefficients,” *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 351–358 (2014).
10. M. R. E. Proctor, “Effects on Fluctuations on $\alpha\Omega$ Dynamo Models,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **382** (1), L39–L42 (2007).
11. K. J. Richardson and M. R. E. Proctor, “Fluctuating $\alpha\Omega$ Dynamos by Iterated Matrices,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **422** (1), L53–L56 (2012).
12. A. P. L. Newton and E. Kim, “Determining the Temporal Dynamics of the Solar α Effect.” *Astron. Astrophys.* **551** (2013). doi 10.1051/0004-6361/201219456
13. D. Passos, D. Nandy, S. Hazra, and I. Lopes, “A Solar Dynamo Model Driven by Mean-Field Alpha and Babcock–Leighton Sources: Fluctuations, Grand-Minima-Maxima, and Hemispheric Asymmetry in Sunspot Cycles,” *Astron. Astrophys.* **563** (2014). doi 10.1051/0004-6361/201322635
14. S. Sur and K. Subramanian, “Galactic Dynamo Action in Presence of Stochastic α and Shear,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **392** (1), L6–L10 (2009).
15. H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978; Mir, Moscow, 1980).
16. D. Moss, “On the Generation of Bisymmetric Magnetic Field Structures in Spiral Galaxies by Tidal Interactions,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **275** (1), 191–194 (1995).
17. A. Phillips, “A Comparison of the Asymptotic and no-z Approximations for Galactic Dynamos,” *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **94**, Nos. 1–2, 135–150 (2001).
18. E. A. Illarionov, D. D. Sokoloff, and V. N. Tutubalin, “Stationary Distribution of Product of Matrices with Random Coefficients,” *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 218–225 (2012).
19. E. A. Mikhailov and I. I. Modyaev, “Dynamo Equations with Random Coefficients,” *Magnetohydrodynamics* **51** (2), 285–292 (2015).