

УДК 519.63

doi 10.26089/NumMet.v17r437

## НЕЯВНЫЕ ОБРАТИМЫЕ ПО ВРЕМЕНИ СХЕМЫ “КАБАРЕ” ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Головизнин В.М.<sup>1</sup>, Горбачев Д.Ю.<sup>2</sup>, Колокольников А.М.<sup>3</sup>, Майоров П.А.<sup>4</sup>,  
Майоров П.А.<sup>5</sup>, Тлепсук Б.А.<sup>6</sup>

Предложена новая неявная безусловно устойчивая схема для одномерных уравнений мелкой воды, сохраняющая все особенности явной схемы “кабаре”. Проведен анализ диссипативных и дисперсионных свойств новой схемы и предложен алгоритм ее численного решения. Приведены примеры решения задачи о распаде разрыва.

**Ключевые слова:** схема “кабаре”, уравнения мелкой воды, консервативные схемы, обратимые по времени схемы, численное моделирование.

**1. Введение.** При численном решении систем уравнений в частных производных гиперболического типа большое значение имеет корректность учета области влияний решения [1, 2], которую наиболее полно обеспечивают явные характеристические [3], сеточно-характеристические [4] и балансно-характеристические разностные схемы [5]. Все эти схемы являются условно устойчивыми, и величина допустимого шага интегрирования по времени зависит от размеров расчетных ячеек и скорости распространения возмущений. Согласованность этих трех величин и гарантирует корректность учета области зависимости. В настоящее время явные схемы являются основным инструментом решения систем гиперболических уравнений [2, 6].

Однако бывают ситуации, когда ограничения на временной шаг, диктуемые условиями устойчивости явных схем, требуют привлечения неоправданно больших вычислительных ресурсов. Примером могут служить задачи с тонкими пограничными слоями или высокотемпературными (в случае газовой динамики) локальными включениями. В этих случаях может оказаться целесообразным использование безусловно устойчивых неявных разностных схем [7].

Неявные разностные схемы, снимая ограничения на шаги по времени, порождают дополнительные проблемы. Прежде всего — это сложности с их алгоритмической разрешимостью, поскольку приходится решать сеточную эллиптическую задачу. Кроме того, неявность может приводить к дополнительной аппроксимационной вязкости.

Компромисс между явными и неявными схемами может оказаться плодотворным при их гибридизации, когда переход от явных схем к неявным осуществляется на ограниченных сеточных подмножествах в случае необходимости. Это накладывает дополнительные требования на согласованность явных и неявных аппроксимаций, реализуемых в рамках одного программного комплекса.

Схема “кабаре” относится к классу явных балансно-характеристических [5] разностных схем. Ее отличительные особенности связаны с тем, что вместо интерполяции в ней используется процедура экстраполяции. Это приводит к ее обратимости по времени и, как следствие, к бездиссипативности. Вопрос о неявных безусловно устойчивых схемах типа “кабаре” нигде ранее не рассматривался.

В настоящей статье предложено однопараметрическое семейство разностных схем для простейшего уравнения переноса, включающее в себя как известную ранее явную схему “кабаре”, так и множество неявных безусловно устойчивых схем. Исследованы их диссипативные и дисперсионные характеристики. На

<sup>1</sup> Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, г. Москва; зав. отделом, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: gorbachev-daniil@inbox.ru

<sup>3</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: k.alex-info@mail.ru

<sup>4</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: pavel.a.mayorov@gmail.com

<sup>5</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: maiorov.peter@gmail.com

<sup>6</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 1, 119991, Москва; студент, e-mail: btlepsuk@gmail.com

примере одномерных нестационарных уравнений мелкой воды показано, как эти неявные схемы “кабаре” обобщаются на случай квазилинейных систем законов сохранения гиперболического типа.

**2. Однопараметрическое семейство схем “кабаре” для простейшего уравнения переноса.**

Для простейшего уравнения переноса, имеющего вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const} > 0, \tag{1}$$

рассмотрим однопараметрическое ( $\sigma$  – параметр) семейство разностных схем

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{j+1/2}^{n+1/2} - \varphi_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + c \left[ (1 - \sigma) \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{h_{j+1/2}} + \sigma \frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_j^{n+1}}{h_{j+1/2}} \right] &= 0, \quad \varphi_{j+1}^{n+1} = 2\varphi_{j+1/2}^{n+1/2} - \varphi_j^n, \\ \frac{\varphi_{j+1/2}^{n+1} - \varphi_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + c \left[ \sigma \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{h_{j+1/2}} + (1 - \sigma) \frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_j^{n+1}}{h_{j+1/2}} \right] &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

определенное на максимально компактном вычислительном шаблоне, состоящем из одной пространственно-временной расчетной ячейки. При  $\sigma = 0$  схема (2) совпадает с явной схемой “кабаре”, подробно исследованной в работах [8, 9]. Нетрудно видеть, что при всех  $\sigma \in [0, 1]$  она является обратимой по времени и, следовательно, бездиссипативной.

Если сложить первое и третье уравнения системы (2), то получим

$$\frac{\varphi_{j+1/2}^{n+1} - \varphi_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{c}{2} \left[ \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{h_{j+1/2}} + \frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_j^{n+1}}{h_{j+1/2}} \right] = 0,$$

откуда следует, что уравнения (2) аппроксимируют исходное уравнение (1) на произвольных нерегулярных расчетных сетках со вторым порядком независимо от параметра  $\sigma$ .

Исследуем область устойчивости семейства разностных схем (2) и проанализируем его дисперсионные свойства. Рассмотрим частные решения этой системы в виде бегущих волн вида

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1/2}^n &= A * q^n * \exp(-ik * x_{j+1/2}); \\ \varphi_{j+1/2}^{n+1/2} &= B * q^{n+1/2} * \exp(-ik * x_{j+1/2}); \\ \varphi_{j+1}^n &= C * q^n * \exp(-ik * x_{j+1}), \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\omega$  – частота,  $q^n = \exp(i\omega t_n)$  – неизвестные амплитуды. Подставляя (3) в (2), находим, что нетривиальное решение существует, если выполнено характеристическое уравнение

$$aq^2 + bq + c = 0, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a = [1 + r(1 - e^{-kh})\sigma], \\ b = -[1 - 2(1 - \sigma)r(1 - e^{-kh})], \\ c = -e^{-kh} + r(1 - e^{-kh})\sigma. \end{cases} \tag{4}$$

Решениями квадратного уравнения (4) являются два, вообще говоря, комплексных числа

$$q_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}, \quad q_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, \quad d = b^2 - 4ac,$$

зависящие от двух переменных: локального числа Куранта–Фридрихса–Леви  $r = c * \tau_n/h_{j+1/2}$  и фазы волны  $k * h_{j+1/2} \in [-\pi, \pi]$  с волновым числом  $k$ . Как показано в работах [8, 9], первый из этих корней является “физическим” и отвечает за трансформацию реального решения при переходе с одного временного слоя на другой, другой – определяет временную эволюцию рассогласования в начальных данных величин с целыми и дробными пространственными индексами и влияет только на устойчивость. Если модуль хотя бы одного из этих чисел будет больше единицы, то схема (2) в данной точке плоскости  $(r, kh)$  будет неустойчивой; если же  $|q_1(r, kh)| = |q_2(r, kh)| = 1$ , то эта схема будет бездиссипативной.

Численное исследование поведения модулей перехода, проведенное с помощью программы Wolfram Mathematica, показало, что область устойчивости схемы (2) расширяется с отрезка  $r \in [0, 1]$  при  $\sigma = 0$  до  $r \in [0, \text{inf}]$  при  $\sigma = 0.5$  и далее остается таковой при дальнейшем росте  $\sigma$ .

Дисперсионные характеристики схемы определяются зависимостью приведенной фазовой скорости разностной гармоники  $\frac{\omega}{c * k} = \gamma(r, kh)$  от приведенного волнового числа  $kh$  и безразмерного параметра  $r$ . В точках плоскости  $(r, kh)$ , где  $\gamma(r, kh) < 1$ , сеточная дисперсия называется “нормальной”, а при  $\gamma(r, kh) > 1$  — “аномальной”. Из определения величины  $q$  следует, что  $\omega\tau = -i \ln(q)$ . Дальнейшие преобразования приводят к следующему выражению:  $\frac{\omega}{ck} = \gamma(r, kh) = -\frac{i}{r * kh} \ln(q)$ .

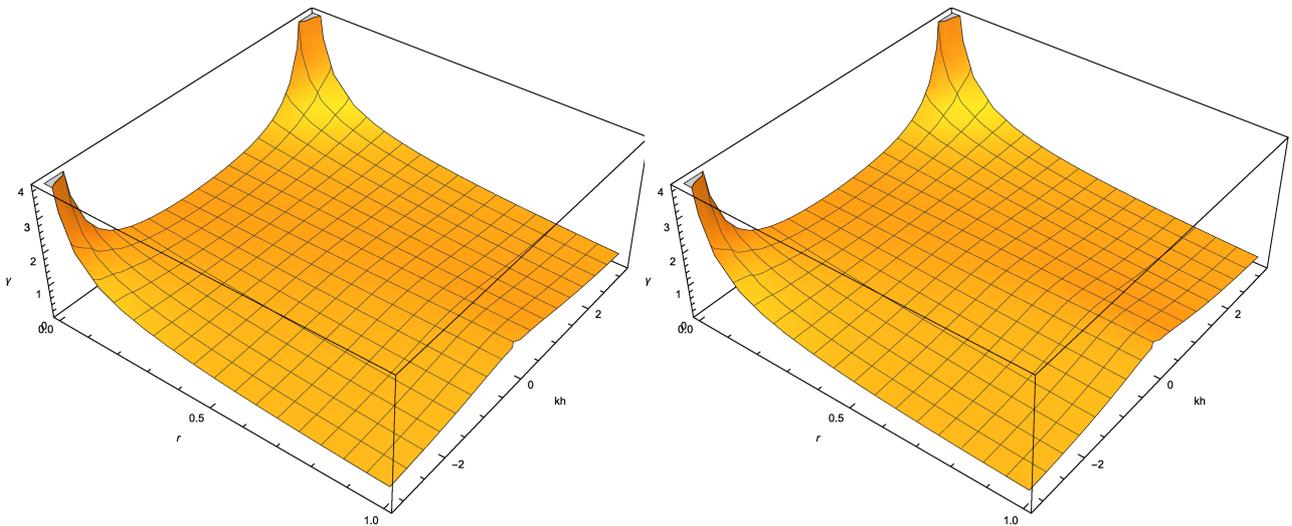


Рис. 1

Как уже отмечалось ранее, свойства численного решения зависят только от дисперсионных характеристик “физического” корня  $q_1$ . При  $r \in [0, 1]$ , т.е. в области устойчивости явной схемы, дисперсионные поверхности неявных схем при всех  $\sigma > 0$  качественно подобны дисперсионной поверхности явной схемы с единственным отличием: эти поверхности не будут проходить через единицу при  $r = 1$  и  $r = 0.5$  для всех  $kh \in [-\pi, \pi]$ , как это имеет место для явной схемы. На рис. 1 приведена дисперсионная поверхность при  $\sigma = 0.5$  и  $\sigma = 1$  соответственно. По оси  $x$  отложено число  $r$ , по оси  $y$  — приведенное волновое число  $kh$ .

На рис. 2 приведены дисперсионные поверхности при тех же  $\sigma$ , но по оси  $x$  здесь отложена величина  $1/r$ , так что нулевому значению соответствует бесконечно большое число Куранта–Фридрихса–Леви.

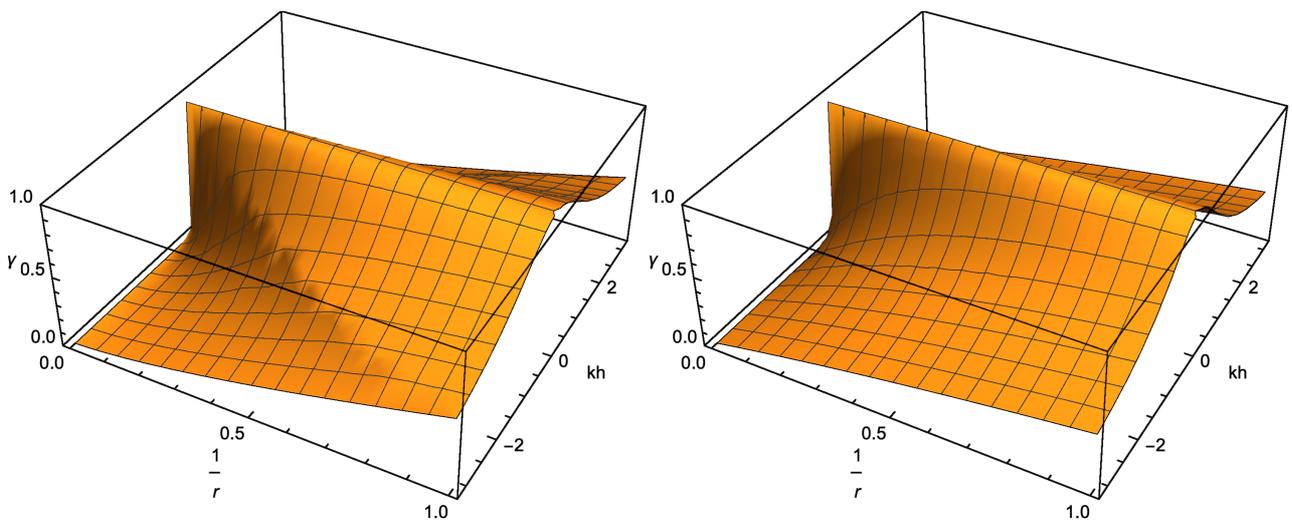


Рис. 2

Численное решение неявных разностных схем (2) осуществляется методом бегущего счета. По заданному из граничных условий значению потоковой переменной  $\phi_L^{n+1}$  бегущим счетом определяются консер-

вативные переменные  $\phi_{i+1/2}^{n+1/2}$  на промежуточном слое:

$$\phi_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{1+r\sigma} \left\{ \phi_{i+1/2}^n - \frac{r}{2} \left[ (1-\sigma)(\phi_{i+1}^n - \phi_i^n) - \sigma(\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_i^{n+1}) \right] \right\}.$$

Линейной экстраполяцией вычисляются новые значения потоковых переменных  $\phi_{i+1}^{n+1}$ :

$$\phi_{i+1}^{n+1} = 2\phi_{i+1/2}^{n+1/2} - \phi_i^n.$$

После этого вычисляются консервативные переменные  $\phi_{i+1/2}^{n+1}$ :

$$\phi_{i+1/2}^{n+1} = \phi_{i+1/2}^{n+1/2} - \frac{r}{2} \left[ \sigma(\phi_{i+1}^n - \phi_i^n) - (1-\sigma)(\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_i^{n+1}) \right].$$

Таким образом, семейство неявных схем (2), безусловно устойчивых при  $\sigma \geq 0.5$ , наследует все основные качества явной схемы “кабаре”.

**3. Уравнения мелкой воды.** Уравнения мелкой воды представляют собой закон сохранения массы и импульса и имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Hu}{\partial t} + \frac{\partial Hu^2 + p}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

где  $p = \frac{g}{2} H^2$ ,  $H$  — высота столба жидкости,  $u$  — скорость вдоль оси  $x$ ,  $g$  — гравитационная постоянная.

Будем рассматривать начально-краевую задачу в области  $G = \{l_1 \leq x \leq l_2, 0 \leq t \leq T\}$ . Требуется найти решение системы (5) в области  $G$  со следующими начальными и краевыми условиями:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= H_0(x), & u(x, 0) &= u_0(x), & x &\in [l_1, l_2], \\ u(l_1, t) + 2\sqrt{gH(l_1, t)} &= \mu_1(t), & u(l_2, t) - 2\sqrt{gH(l_2, t)} &= \mu_2(t), & t &\in (0, T). \end{aligned}$$

Здесь  $H_0(x)$ ,  $u_0(x)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  — известные начальные и краевые условия.

Уравнения (5) можно преобразовать к характеристической форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{g}{c} \frac{\partial H}{\partial t} + (u+c) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{c} \frac{\partial H}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{g}{c} \frac{\partial H}{\partial t} + (u-c) \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g}{c} \frac{\partial H}{\partial x} \right), \tag{6}$$

где  $c = \sqrt{gH}$ . Эту систему можно представить в виде уравнений переноса инвариантов Римана:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

где  $R = u + 2c$  и  $Q = u - 2c$ .

**4. Однопараметрическое семейство разностных схем “кабаре”.** Введем неравномерную сетку  $\Omega$  в области  $G = \{l_1 \leq x \leq l_2, 0 \leq t \leq T\}$ :

$$\Omega = \left\{ \begin{aligned} x_i : x_{i+1} - x_i = h_{i+1/2} > 0; x_0 = l_1; x_N = l_2; i = \overline{0, N}, \\ t^n : t^{n+1} - t^n = \tau^{n+1/2} > 0; t^0 = 0; t^N = T; n = \overline{0, K}. \end{aligned} \right.$$

Искомые переменные будем относить как к узлам расчетной сетки, так и к серединам ячеек и обозначать целыми и дробными индексами соответственно:

$$\begin{aligned} f_c^{n+1/2} = f_{i+1/2}^{n+1/2} &= f(x_i + 0.5h, t^n + 0.5\tau), & f_c^n &= f_{i+1/2}^n = f(x_i + 0.5h, t^n), \\ f_R^n = f_{i+1}^n &= f(x_i + h, t^n), & f_L^n &= f_i^n = f(x_i, t^n). \end{aligned}$$

Переменные, относящиеся к узлам пространственной сетки, будем называть потоковыми, а переменные, относящиеся к их центрам, — консервативными.

При построении явной схемы “кабаре” для систем уравнений гиперболического типа используются разные формы представления исходных дифференциальных уравнений. Консервативные переменные определяются на основе консервативной аппроксимации дивергентной формы (5), а потоковые переменные — на основе характеристической формы (6) или уравнений переноса инвариантов (7).

По аналогии с простейшим линейным случаем построим однопараметрическое семейство неявных схем для консервативных переменных  $H_c^{n+1/2}$ ,  $H_c^{n+1}$ ,  $u_c^{n+1/2}$ ,  $u_c^n$ :

$$\frac{H_c^{n+1/2} - H_c^n}{\tau/2} + \sigma \frac{(Hu)_R^{n+1} - (Hu)_L^{n+1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{(Hu)_R^n - (Hu)_L^n}{h} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{(Hu)_c^{n+1/2} - (Hu)_c^n}{\tau/2} + \sigma \frac{(Hu^2 + P)_R^{n+1} - (Hu^2 + P)_L^{n+1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{(Hu^2 + P)_R^n - (Hu^2 + P)_L^n}{h} = 0,$$

$$\frac{H_c^{n+1} - H_c^{n+1/2}}{\tau/2} + (1 - \sigma) \frac{(Hu)_R^{n+1} - (Hu)_L^{n+1}}{h} + \sigma \frac{(Hu)_R^n - (Hu)_L^n}{h} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{(Hu)_c^{n+1} - (Hu)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + (1 - \sigma) \frac{(Hu^2 + P)_R^{n+1} - (Hu^2 + P)_L^{n+1}}{h} + \sigma \frac{(Hu^2 + P)_R^n - (Hu^2 + P)_L^n}{h} = 0.$$

Если сложить эти уравнения, то в результате получим разностную схему, имеющую второй порядок аппроксимации при любых значениях параметра  $\sigma$ :

$$\frac{H_c^{n+1} - H_c^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[ \frac{(Hu)_R^{n+1} - (Hu)_L^{n+1}}{h} + \frac{(Hu)_R^n - (Hu)_L^n}{h} \right] = 0, \quad (10)$$

$$\frac{(Hu)_c^{n+1} - (Hu)_c^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[ \frac{(Hu^2 + P)_R^{n+1} - (Hu^2 + P)_L^{n+1}}{h} + \frac{(Hu^2 + P)_R^n - (Hu^2 + P)_L^n}{h} \right] = 0.$$

Легко видеть, что части вычислительного алгоритма (8), (9) обратимы по времени. Действительно, обратный переход со слоя  $n + 1$  на слой с номером  $n$  будет осуществляться по тем же самым формулам. Обратимость по времени влечет за собой бездиссипативность этой части общего алгоритма.

Для замыкания системы уравнений (8), (9) необходимо задать алгоритм вычисления новых значений потоковых переменных. Для этого, как и в явной схеме “кабаре”, используем процедуру экстраполяции инвариантов Римана в пределах пространственно-временных расчетных ячеек. Будем считать, что инварианты Римана в каждой ячейке связаны следующими соотношениями (экстраполянтами):

$$\begin{aligned} R_R^{n+1} &= 2R_c^{n+1/2} - R_L^n, \text{ если } u_c^{n+1} + c_c^{n+1} > 0, & Q_R^{n+1} &= 2Q_c^{n+1/2} - Q_L^n, \text{ если } u_c^{n+1} - c_c^{n+1} > 0, \\ R_L^{n+1} &= 2R_c^{n+1/2} - R_R^n, \text{ если } u_c^{n+1} + c_c^{n+1} \leq 0, & Q_L^{n+1} &= 2Q_c^{n+1/2} - Q_R^n, \text{ если } u_c^{n+1} - c_c^{n+1} \leq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $R = u + 2\sqrt{gH} = u + 2c$  и  $Q = u - 2\sqrt{gH} = u - 2c$ .

В дозвуковых течениях в каждый узел на новом временном слое приходят по два экстраполянта: один — со стороны левой расчетной ячейки, второй — со стороны правой ячейки. При сверхзвуковых течениях влево — два экстраполянта справа, при сверхзвуке вправо — два экстраполянта слева. Возможны ситуации, когда приходящих в узел экстраполянтов больше или меньше двух. Это соответствует наличию в течениях так называемых “звуковых точек” [10]. Анализ всех возможных ситуаций существенно усложняет применение неявных разностных схем. Для простоты изложения в настоящей работе будет в дальнейшем рассмотрен только случай дозвуковых течений.

В дозвуковых течениях для определения новых значений потоковых переменных  $u_i^{n+1}$ ,  $H_i^{n+1}$  нужно решить систему уравнений

$$u_i^{n+1} + 2\sqrt{gH_i^{n+1}} = R_i^{n+1}, \quad u_i^{n+1} - 2\sqrt{gH_i^{n+1}} = Q_i^{n+1}, \quad (12)$$

откуда следует, что

$$u_i^{n+1} = \frac{R_i^{n+1} + Q_i^{n+1}}{2}, \quad H_i^{n+1} = \frac{1}{g} \left( \frac{R_i^{n+1} - Q_i^{n+1}}{4} \right)^2. \quad (13)$$

**5. Дисперсионные и диссипативные свойства неявных разностных схем “кабаре”.** Исследуем диссипативные и дисперсионные свойства однопараметрического семейства неявных разностных схем (8), (9), (11), (13) в линейном приближении. Рассмотрим частное решение в виде

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= U_0 + \delta u_i^{n+1}; & H_i^{n+1} &= H_0 + \delta H_i^{n+1}; & u_{i+1/2}^{n+1} &= U_0 + \delta u_{i+1/2}^{n+1}; & U_0 &= \text{const}, \\ H_{i+1/2}^{n+1} &= H_0 + \delta H_{i+1/2}^{n+1}; & u_{i+1/2}^{n+1/2} &= U_0 + \delta u_{i+1/2}^{n+1/2}; & H_{i+1/2}^{n+1/2} &= H_0 + \delta H_{i+1/2}^{n+1/2}; & H_0 &= \text{const}, \end{aligned} \quad (14)$$

где символ  $\delta$  обозначает бесконечно малые возмущения начального фона. Подставляя (14) в разностные уравнения (8) и отбрасывая члены второго порядка малости, соответственно получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\delta H_c^{n+1/2} - \delta H_c^n}{\tau/2} + \sigma H_0 \frac{(\delta u)_R^{n+1} - (\delta u)_L^{n+1}}{h} + \sigma U_0 \frac{(\delta H)_R^{n+1} - (\delta H)_L^{n+1}}{h} + \\ & + (1 - \sigma) H_0 \frac{(\delta u)_R^n - (\delta u)_L^n}{h} + (1 - \sigma) U_0 \frac{(\delta H)_R^n - (\delta H)_L^n}{h} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

и

$$\begin{aligned} & H_0 \frac{(\delta u)_c^{n+1/2} - (\delta u)_c^n}{\tau/2} + U_0 \frac{(\delta H)_c^{n+1/2} - (\delta H)_c^n}{\tau/2} + \\ & + \sigma \left\{ H_0 U_0 \frac{(\delta u)_R^{n+1} - (\delta u)_L^{n+1}}{h} + U_0 \left[ H_0 \frac{(\delta u)_R^{n+1} - (\delta u)_L^{n+1}}{h} + U_0 \frac{(\delta H)_R^{n+1} - (\delta H)_L^{n+1}}{h} \right] \right\} + \\ & + (1 - \sigma) \left\{ H_0 U_0 \frac{(\delta u)_R^n - (\delta u)_L^n}{h} + U_0 \left[ H_0 \frac{(\delta u)_R^n - (\delta u)_L^n}{h} + U_0 \frac{(\delta H)_R^n - (\delta H)_L^n}{h} \right] \right\} + \\ & + \sigma g H_0 \frac{(\delta H)_R^{n+1} - (\delta H)_L^{n+1}}{h} + (1 - \sigma) g H_0 \frac{(\delta H)_R^n - (\delta H)_L^n}{h} = 0. \end{aligned}$$

Последнее выражение с учетом (15) заметно упрощается:

$$\begin{aligned} & \frac{(\delta u)_c^{n+1/2} - (\delta u)_c^n}{\tau/2} + \sigma U_0 \frac{(\delta u)_R^{n+1} - (\delta u)_L^{n+1}}{h} + (1 - \sigma) U_0 \frac{(\delta u)_R^n - (\delta u)_L^n}{h} + \\ & + \sigma g \frac{(\delta H)_R^{n+1} - (\delta H)_L^{n+1}}{h} + (1 - \sigma) g \frac{(\delta H)_R^n - (\delta H)_L^n}{h} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Если умножить (15) на  $\sqrt{g/H_0}$  и сложить с (16), то после несложных преобразований приходим к уравнению

$$\frac{(\delta R)_c^{n+1/2} - (\delta R)_c^n}{\tau/2} + (U_0 + c_0) \left[ \sigma \frac{(\delta R)_R^{n+1} - (\delta R)_L^{n+1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{(\delta R)_R^n - (\delta R)_L^n}{h} \right] = 0, \quad c_0 = \sqrt{gH_0},$$

где  $\delta R_\beta^\alpha = \delta u_\beta^\alpha + \sqrt{g/H_0} \delta H_\beta^\alpha$ .

Умножение (15) на  $-\sqrt{g/H_0}$  и последующее сложение с (16) приводит к выражению

$$\frac{(\delta Q)_c^{n+1/2} - (\delta Q)_c^n}{\tau/2} + (U_0 - c_0) \left[ \sigma \frac{(\delta Q)_R^{n+1} - (\delta Q)_L^{n+1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{(\delta Q)_R^n - (\delta Q)_L^n}{h} \right] = 0, \quad c_0 = \sqrt{gH_0},$$

где  $\delta Q_\beta^\alpha = \delta u_\beta^\alpha - \sqrt{g/H_0} \delta H_\beta^\alpha$ .

Аналогичные действия над разностными уравнениями (9) дают соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{(\delta R)_c^{n+1} - (\delta R)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \lambda_1 \left[ \sigma \frac{(\delta R)_R^n - (\delta R)_L^n}{h} + (1 - \sigma) \frac{(\delta R)_R^{n+1} - (\delta R)_L^{n+1}}{h} \right] = 0, \quad \lambda_1 = U_0 + \sqrt{gH_0}, \\ & \frac{(\delta Q)_c^{n+1} - (\delta Q)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \lambda_2 \left[ \sigma \frac{(\delta Q)_R^n - (\delta Q)_L^n}{h} + (1 - \sigma) \frac{(\delta Q)_R^{n+1} - (\delta Q)_L^{n+1}}{h} \right] = 0, \quad \lambda_2 = U_0 - \sqrt{gH_0}. \end{aligned}$$

Линеаризация экстраполянтов (11) в случае дозвуковых течений приводит к соотношениям:

$$\delta R_R^{n+1} = 2\delta R_c^{n+1/2} - \delta R_L^n; \quad \delta Q_L^{n+1} = 2\delta Q_c^{n+1/2} - \delta Q_R^n.$$

Таким образом, эволюция малых приращений римановых инвариантов описывается линейными разностными уравнениями, исследованными в первом разделе настоящей статьи, откуда следует, что схема обратима по времени, имеет второй порядок аппроксимации при всех значениях параметра  $\sigma$  и безусловно устойчива при  $\sigma \geq 0.5$ .

**6. Алгоритм численного решения.** Алгоритм численного решения неявных схем “кабаре” можно разделить на два этапа. На первом этапе решается система нелинейных алгебраических уравнений (8),

(11), (12), (13) относительно неизвестных величин  $u_{i+1/2}^{n+1/2}$ ,  $H_{i+1/2}^{n+1/2}$ ,  $u_i^{n+1}$ ,  $H_i^{n+1}$ . На втором — явным образом вычисляются консервативные переменные на новом слое из разностных уравнений (10). Для решения нелинейной системы (8), (11), (12), (13) естественно использовать метод Ньютона. Для упрощения дальнейших выкладок, без ограничения общности, будем считать, что  $\sigma = 1$ .

Запишем неявную схему “кабаре”, заменяя индексы  $L$ ,  $c$ ,  $R$  на  $i$ ,  $i + 1/2$ ,  $i + 1$  соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{H_{i+1/2}^{n+1/2} - H_{i+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{(Hu)_{i+1}^{n+1} - (Hu)_i^{n+1}}{h} &= 0; \\ \frac{(Hu)_{i+1/2}^{n+1/2} - (Hu)_{i+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{(Hu^2 + P)_{i+1}^{n+1} - (Hu^2 + P)_i^{n+1}}{h} &= 0; \\ R_{i+1}^{n+1} = 2R_{i+1/2}^{n+1/2} - R_i^n; \quad Q_i^{n+1} = 2Q_{i+1/2}^{n+1/2} - Q_{i+1}^n; \quad u_\beta^\alpha = \frac{R_\beta^\alpha + Q_\beta^\alpha}{2}; \quad H_\beta^\alpha &= \frac{1}{g} \left( \frac{R_\beta^\alpha - Q_\beta^\alpha}{4} \right)^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} H_{i+1/2}^{n+1/2} &= H_{i+1/2}^{n+1/2} \left( R_{i+1/2}^{n+1/2}, Q_{i+1/2}^{n+1/2} \right), & u_{i+1/2}^{n+1/2} &= u_{i+1/2}^{n+1/2} \left( R_{i+1/2}^{n+1/2}, Q_{i+1/2}^{n+1/2} \right), \\ H_{i+1}^{n+1} &= H_{i+1}^{n+1} \left( R_{i+1}^{n+1/2}, Q_{i+3/2}^{n+1/2} \right), & u_{i+1}^{n+1} &= u_{i+1}^{n+1} \left( R_{i+1}^{n+1/2}, Q_{i+3/2}^{n+1/2} \right), \\ H_i^{n+1} &= H_i^{n+1} \left( R_{i-1/2}^{n+1/2}, Q_{i+1/2}^{n+1/2} \right), & u_i^{n+1} &= u_i^{n+1} \left( R_{i-1/2}^{n+1/2}, Q_{i+1/2}^{n+1/2} \right), \end{aligned}$$

представим ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{H_{i+1/2}^{n+1/2} - H_{i+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{(Hu)_{i+1}^{n+1} - (Hu)_i^{n+1}}{h} &= f_{i+1/2}^{(1)} \left( R_{i-1/2}^{n+1/2}, Q_{i-1/2}^{n+1/2}, R_{i+1/2}^{n+1/2}, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, R_{i+3/2}^{n+1/2}, Q_{i+3/2}^{n+1/2} \right); \\ \frac{(Hu)_{i+1/2}^{n+1/2} - (Hu)_{i+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{(Hu^2 + P)_{i+1}^{n+1} - (Hu^2 + P)_i^{n+1}}{h} &= \\ &= f_{i+1/2}^{(2)} \left( R_{i-1/2}^{n+1/2}, Q_{i-1/2}^{n+1/2}, R_{i+1/2}^{n+1/2}, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, R_{i+3/2}^{n+1/2}, Q_{i+3/2}^{n+1/2} \right). \end{aligned}$$

Начальные значения итерируемых переменных зададим в форме

$$\left( R_{i+1/2}^{n+1/2} \right)^{s=0} = \left( u_{i+1/2}^{n+1/2} \right)^{s=0} + 2\sqrt{g(H_i^{n+1})^{s=0}}, \quad \left( Q_{i+1/2}^{n+1/2} \right)^{s=0} = \left( u_{i+1/2}^{n+1/2} \right)^{s=0} - 2\sqrt{g(H_i^{n+1})^{s=0}},$$

где величины  $\left( u_{i+1/2}^{n+1/2} \right)^{s=0}$ ,  $\left( H_i^{n+1} \right)^{s=0}$  вычисляются по явной схеме

$$\begin{aligned} \frac{\left( H_{i+1/2}^{n+1/2} \right)^{s=0} - H_{i+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{(Hu)_{i+1}^n - (Hu)_i^n}{h} &= 0; \\ \frac{\left[ (Hu)_{i+1/2}^{n+1/2} \right]^{s=0} - (Hu)_{i+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{(Hu^2 + P)_{i+1}^n - (Hu^2 + P)_i^n}{h} &= 0. \end{aligned}$$

Раскладывая функции  $f_{i+1/2}^1$ ,  $f_{i+1/2}^2$  в ряд Тейлора до членов второго порядка малости по приращению

$$\Delta R^{s+1} = \left( R^{n+1/2} \right)^{s+1} - \left( R^{n+1/2} \right)^s, \quad \Delta Q^{s+1} = \left( Q^{n+1/2} \right)^{s+1} - \left( Q^{n+1/2} \right)^s,$$



$$Q_{i+1/2}^{s+1} = \begin{cases} \max(Q_{i+1/2}^n, Q_{i+1}^n), & \text{если } Q_{i+1/2}^{s+1} \geq \max(Q_{i+1/2}^n, Q_{i+1}^n), \\ \min(Q_{i+1/2}^n, Q_{i+1}^n), & \text{если } Q_{i+1/2}^{s+1} \leq \min(Q_{i+1/2}^n, Q_{i+1}^n), \\ Q_{i+1/2}^{s+1}, & \text{если } \left[ \min(Q_{i+1/2}^n, Q_{i+1}^n) \leq Q_{i+1/2}^{s+1} \leq \max(Q_{i+1/2}^n, Q_{i+1}^n) \right]. \end{cases}$$

Процедура монотонизации приводит к отклонению результата от точного решения исходной системы нелинейных алгебраических уравнений и может препятствовать сходимости итерационного процесса. Стандартное условие выхода из итераций

$$\max_i \left( \left| \frac{\Delta R_{i+1/2}^{s+1}}{R_{i+1/2}^{s+1}} \right|, \left| \frac{\Delta Q_{i+1/2}^{s+1}}{Q_{i+1/2}^{s+1}} \right| \right) \leq \varepsilon$$

может оказаться недостижимым. В этом случае итерационный процесс прекращается при достижении заданного числа (3–4) итераций. При вычислении консервативных переменных на новом временном слое по разностным уравнениям (10) неполная завершенность итераций не нарушает консервативности алгоритма.

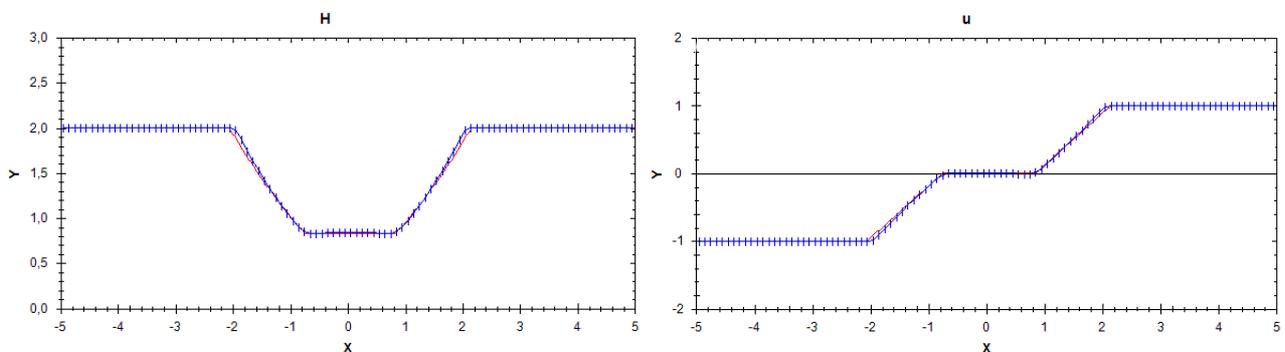


Рис. 3. Явная схема,  $r = 0.2$

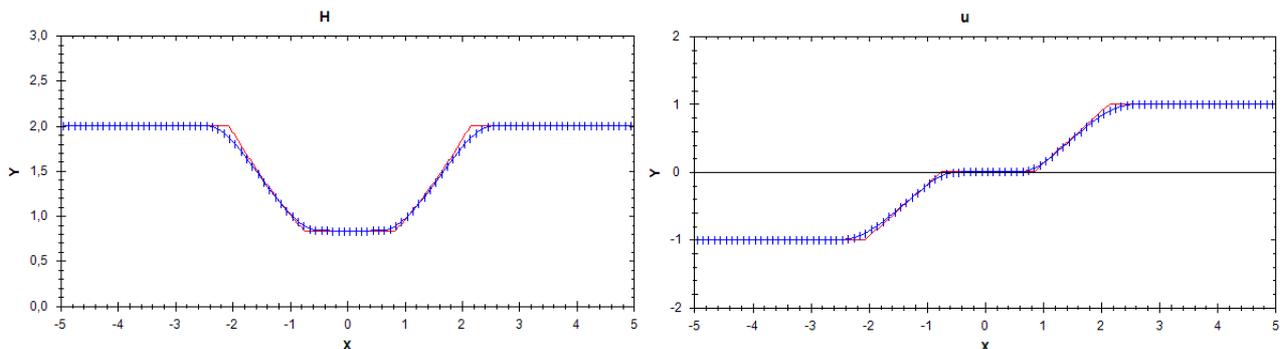


Рис. 4. Неявная схема,  $r = 0.2$

## 7. Задачи о распаде разрыва.

**7.1. Расходящиеся волны разрежения.** Рассмотрим следующие начальные и краевые условия:

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x \in [-5, 0), \\ 1, & x \in [0, 5], \end{cases} \quad H(x, 0) = 2, \quad x \in [5, 5],$$

$$R(-5, t) = \text{const}, \quad t \in (0, T); \quad Q(5, t) = \text{const}, \quad t \in (0, T).$$

Расчет будем проводить при числах Куранта  $r = 0.2$  (рис. 3 и 4) и  $r = 1.2$  (рис. 5 и 6). При  $r = 0.2$  после 100 шагов по времени имеем следующие конфигурации решения для явной и чисто неявной схемы “кабаре” (график с пометкой “H” соответствует графику распределения высот столба жидкости H, а график с пометкой “u” соответствует графику распределения скоростей течения u, красным показано аналитическое решение).

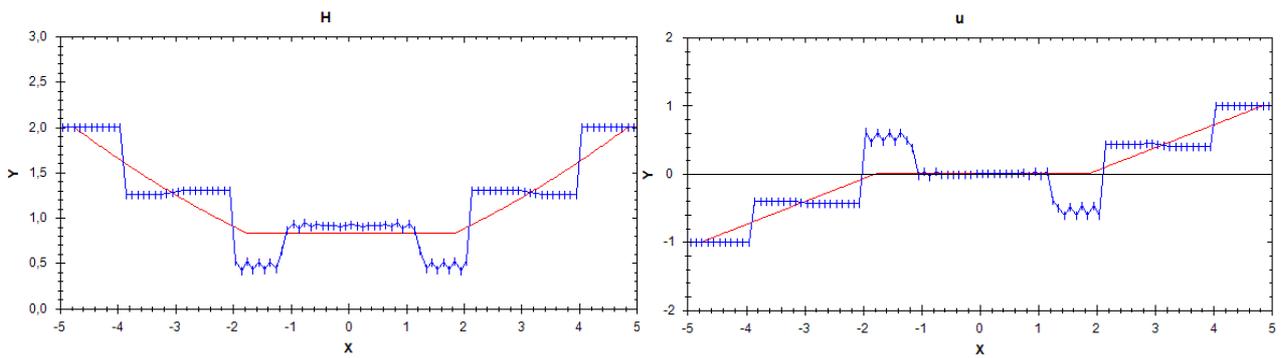


Рис. 5. Явная схема,  $r = 1.2$

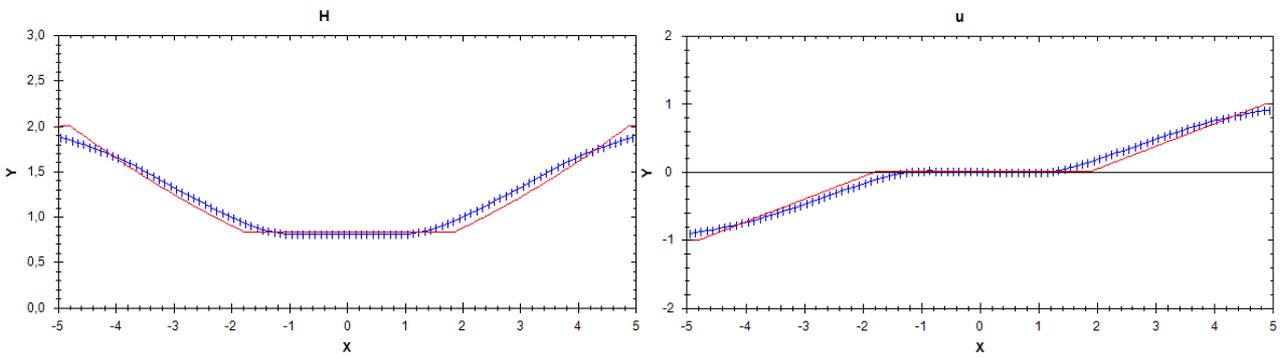


Рис. 6. Неявная схема,  $r = 1.2$

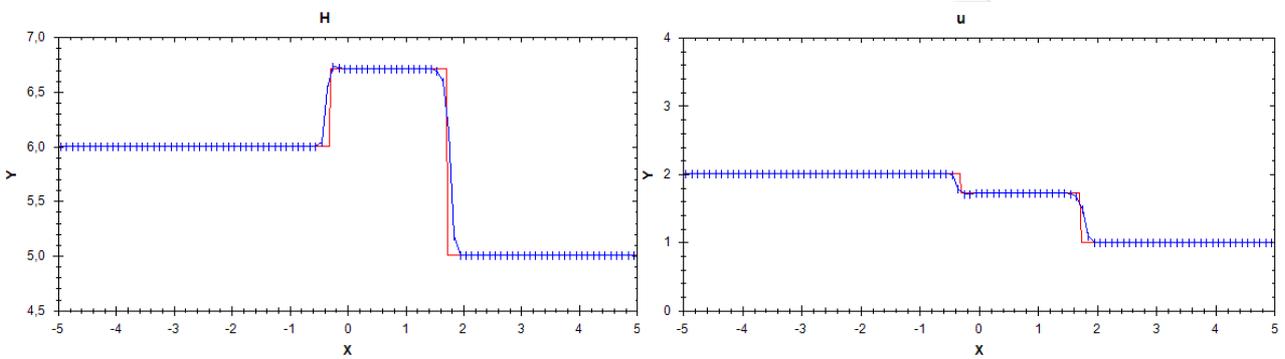


Рис. 7. Явная схема,  $r = 0.2$

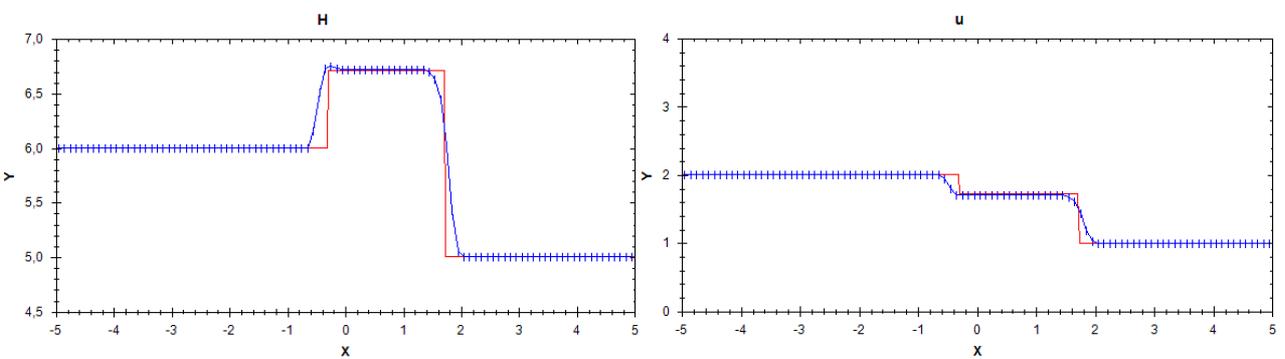
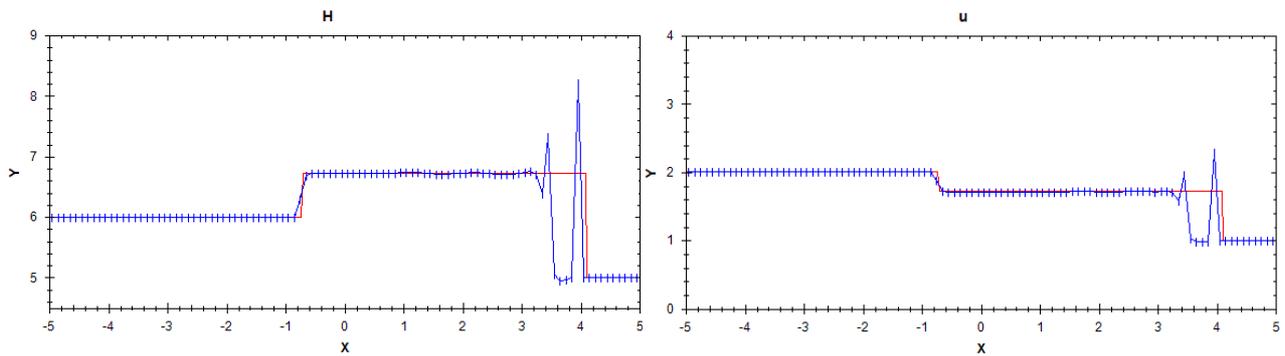
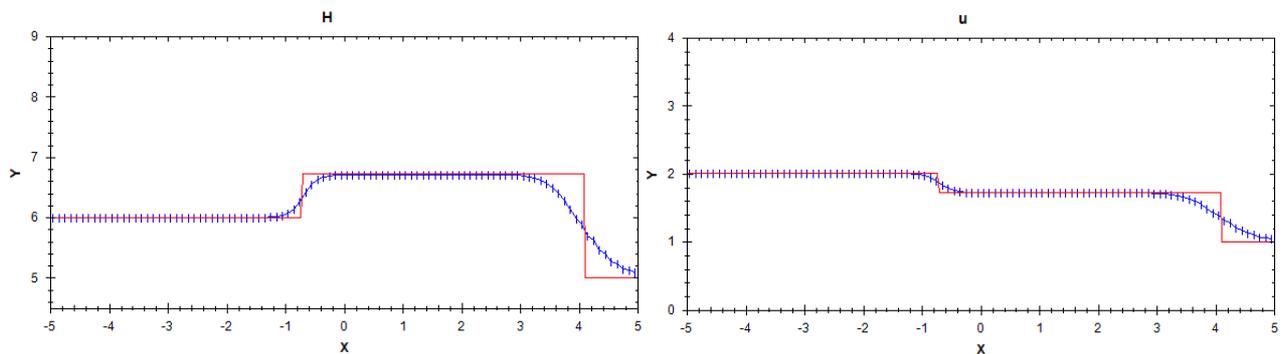


Рис. 8. Неявная схема,  $r = 0.2$

Рис. 9. Явная схема,  $r = 1.2$ Рис. 10. Неявная схема,  $r = 1.2$ 

Графики показывают, что обе схемы устойчивы, но частично-неявная немного “замазывает” решение. Теперь рассмотрим конфигурации решения при числе Куранта  $r = 1.2$  после 40 шагов по времени. Видно, что явная схема неустойчива при числе Куранта  $r = 1.2$ , а чисто неявная — устойчива.

**7.2. Ударная волна.** Рассмотрим следующие начальные и краевые условия:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2, & x \in [-5, 0), \\ 1, & x \in [0, 5], \end{cases} \quad H(X, 0) = \begin{cases} 6, & x \in [-5, 0), \\ 5, & x \in [0, 5], \end{cases}$$

$$R(-5, t) = \text{const}, \quad t \in (0, T); \quad Q(5, t) = \text{const}, \quad t \in (0, T).$$

Конфигурации решения для явной и чисто неявной схемы “кабаре” при  $r = 0.2$  после 100 шагов по времени приведены на рис. 7 и 8 (красным показано аналитическое решение):

Конфигурации решения при  $r = 1.2$  после 40 шагов по времени приведены на рис. 9 и 10. Из графиков видно, что разрывы “размазываются” на 3–10 расчетных ячеек в зависимости от их интенсивности.

**8. Заключение.** Отличительными чертами явной схемы “кабаре” являются вычисление новых потоковых переменных посредством линейной экстраполяции локальных римановых инвариантов и ее временная обратимость на течениях, в которых характеристики одного семейства не пересекаются. При пересечении характеристик включается нелинейная коррекция потоков, нарушающая временную обратимость алгоритма, но обеспечивающая монотонность решения.

Явная схема условно устойчива. Для снятия ограничения на величину допустимого временного шага рассмотрено однопараметрическое семейство неявных разностных схем, наследующих перечисленные выше основные свойства явной схемы “кабаре”. Показано, что при весовом параметре  $\sigma \geq 0.5$  все схемы семейства безусловно устойчивы, а их дисперсионные характеристики слабо зависят от этого параметра. Наименьшее количество арифметических операций при численной реализации неявных схем достигается при  $\sigma = 1$ .

Для иллюстрации свойств неявных схем “кабаре” использована простейшая система нелинейных гиперболических уравнений — система уравнений “мелкой воды”. Описанная методика легко обобщается на более содержательные системы гиперболических уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рожественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
2. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
3. *Жуков А.И.* Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Тр. МИАН СССР. 1960. **58**, № 3. 3–150.
4. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
5. *Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М.* Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. 2003. **15**, № 9. 29–48.
6. *Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А.* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
7. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
8. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 1. 86–100.
9. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Некоторые свойства разностной схемы “кабаре” // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 1. 101–116.
10. *Головизнин В.М., Исаков В.А., Соловьев А.В.* Аппроксимационный алгоритм обработки звуковых точек в схеме КАБАРЕ // Дифференциальные уравнения. 2016. **52** (в печати).
11. *Головизнин В.М., Карабасов С.А.* Нелинейная коррекция схемы Кабаре // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 12. 107–123.

Поступила в редакцию  
25.08.2016

---

**Implicit and Time Reversible CABARET Schemes for Quasilinear Shallow Water Equations**

V. M. Goloviznin<sup>1</sup>, D. Yu. Gorbachev<sup>2</sup>, A. M. Kolokolnikov<sup>3</sup>, P. A. Maiorov<sup>4</sup>, P. A. Maiorov<sup>5</sup>,  
and B. A. Tlepsuk<sup>6</sup>

<sup>1</sup> Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Department, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

<sup>2</sup> Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: gorbachev-daniil@inbox.ru

<sup>3</sup> Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: k.alex-info@mail.ru

<sup>4</sup> Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: pavel.a.mayorov@gmail.com

<sup>5</sup> Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: maiorov.peter@gmail.com

<sup>6</sup> Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: btlepsuk@gmail.com

Received August 25, 2016

**Abstract:** A new implicit unconditionally stable scheme for the one-dimensional shallow water equations is proposed. This implicit scheme retains all the features of the explicit CABARET (Compact Accurately Boundary Adjusting-REsolution Technique) difference scheme. Dissipative and dispersion properties of this new scheme are analyzed; an algorithm of its numerical solution is discussed. Some examples of solving the Riemann problem are considered.

**Keywords:** CABARET scheme, shallow water equations, conservative schemes, time reversible schemes, numerical simulation.

### References

1. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Yanenko, *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1978; Amer. Math. Soc., Providence, 1982).
2. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2001).
3. A. I. Zhukov, "Application of the Method of Characteristics to the Numerical Solution of One-Dimensional Problems in Gas Dynamics," *Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova, Akad. Nauk SSSR* **58** (3), 3–150 (1960).
4. K. M. Magomedov and A. S. Kholodov, *Grid-Characteristic Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
5. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and I. M. Kobrinskii, "Balance-Characteristic Schemes with Separated Conservative and Flux Variables," *Mat. Model.* **15** (9), 29–48 (2003).
6. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *New CFD Algorithms for Multiprocessor Computer Systems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
7. A. A. Samarskii and Yu. P. Popov, *Difference Schemes for Solving Gas Dynamics Problems* (Nauka, Moscow, 1992) [in Russian].
8. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, "Finite Difference Approximation of Convective Transport Equation with Space Splitting Time Derivative," *Mat. Model.* **10** (1), 86–100 (1998).
9. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, "Some Characteristics of Finite Difference Scheme 'cabaret'," *Mat. Model.* **10** (1), 101–116 (1998).
10. V. M. Goloviznin, V. A. Isakov, and A. V. Solovjev, "An Approximation Algorithm for Treatment of Sound Points in the CABARET Scheme," *Differ. Uravn.* **52** (2016) (in press).
11. V. M. Goloviznin and S. A. Karabasov, "Nonlinear Correction of Cabaret Scheme," *Mat. Model.* **10** (12), 107–123 (1998).