

УДК 519.63

doi 10.26089/NumMet.v17r436

**ВРЕМЕННАЯ ОБРАТИМОСТЬ И КОРРЕКЦИЯ ПОТОКОВ В СХЕМЕ “КАБАРЕ”
ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА****Головизнин В.М.¹, Горбачев Д.Ю.², Колокольников А.М.³, Майоров П.А.⁴,
Майоров П.А.⁵, Тлепсук Б.А.⁶**

Для двумерного линейного уравнения конвекции рассматривается разностная схема “кабаре” с пятью различными модификациями нелинейной коррекции потоков на основе принципа максимума. Вычислительная эффективность различных вариантов определяется по результатам решения задачи Кроули о вращении конуса вокруг оси, не совпадающей с осью конуса, на сгущающихся ортогональных расчетных сетках. Сформулированы рекомендации по повышению вычислительной эффективности всего класса схем “кабаре” для законов сохранения гиперболического типа и процессов с доминирующим сеточным переносом.

Ключевые слова: схема “кабаре”, уравнения мелкой воды, консервативные схемы, обратимые по времени схемы, численное моделирование.

1. Введение. Расчеты процессов конвекции–диффузии с доминирующей конвекцией представляют серьезную вычислительную проблему из-за вычислительной дисперсии и диффузии [1], в различной степени присущих всем численным алгоритмам. Вычислительная диффузия приводит к “амплитудным” ошибкам, сглаживающим локальные минимумы и максимумы, тогда как вычислительная дисперсия порождает “фазовые” ошибки, приводящие к возникновению новых локальных экстремумов, т.е. к потере монотонности. В ряде вычислительных алгоритмов амплитудные ошибки отсутствуют. Разностные схемы без амплитудных ошибок обладают свойством временной обратимости (бездиссипативности). К числу бездиссипативных разностных схем относятся схемы “крест” (LeapFrog) [2] и “кабаре” (UpwindLeapFrog) [3]. Обе эти схемы имеют второй порядок аппроксимации и по теореме С. К. Годунова [4] не являются монотонными. Для их “монотонизации” обычно используются методы искусственной вязкости [5] и нелинейной коррекции [6]. Нелинейная коррекция схемы “кабаре” базируется на принципе максимума для уравнения переноса [7]. В случае нескольких пространственных переменных перенос по каждой координате описывается неоднородным уравнением, в правой части которого стоит оператор переноса по другим направлениям с обратным знаком. При нахождении допустимых максимумов и минимумов численного решения по каждому из направлений необходимо учитывать интеграл по времени от соответствующей правой части. Правые части уравнения переноса при его “расщеплении” по пространственным направлениям могут быть аппроксимированы разными способами, а качество численного решения может зависеть от вида этой аппроксимации.

В настоящей статье рассмотрены пять разных способов аппроксимации правых частей пространственно расщепленных уравнений переноса для оценки локальных экстремумов при использовании алгоритма нелинейной коррекции в схеме “кабаре”. Оценка их относительной вычислительной эффективности осуществлялась на двумерной задаче Кроули [8] о вращении конуса вокруг оси, не совпадающей с осью конуса, на сгущающихся ортогональных расчетных сетках. Получены практические рекомендации по повышению вычислительной эффективности всего класса схем “кабаре” для законов сохранения гиперболического типа и процессов с доминирующим сеточным переносом.

¹ Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, г. Москва; зав. отделом, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: gorbachev-daniil@inbox.ru

³ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: k.alex-info@mail.ru

⁴ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: pavel.a.mayorov@gmail.com

⁵ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: maiorov.peter@gmail.com

⁶ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: btlepsuk@gmail.com

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейное уравнение переноса пассивного скаляра φ в виде закона сохранения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(u\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\varphi)}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Пусть $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — скорости переноса по осям x , y соответственно. Решение будем искать в квадратной области $G : \{-1 \leq x \leq 1\} \times \{-1 \leq y \leq 1\}$ на поле скоростей, отвечающем вращению плоскости по часовой стрелке с единичной угловой скоростью вокруг начала координат:

$$u(x, y) = \omega \cdot y, \quad v(x, y) = -\omega \cdot x, \quad \omega = 1. \quad (2)$$

Заданное таким образом поле скоростей однозначно определяет четыре участка границы области:

$$\begin{aligned} \partial G_1 : \{x = -1, 0 < y \leq 1\}, \quad \partial G_2 : \{0 < x \leq 1, y = 1\}, \\ \partial G_3 : \{x = 1, -1 \leq y < 0\}, \quad \partial G_4 : \{-1 \leq x < 0, y = -1\}, \end{aligned}$$

на которых должны быть заданы граничные условия. Зададим эти условия в виде

$$\varphi|_{\partial G_1} = \varphi|_{\partial G_2} = \varphi|_{\partial G_3} = \varphi|_{\partial G_4} = 0.$$

Задание начальных данных $\varphi(x, y, t_0) = \psi(x, y)$ завершает постановку задачи.

Помимо консервативной формы уравнения (1) в методе “кабаре” используются две другие недивергентные его формы:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (3)$$

представляющие собой неоднородные уравнения переноса по каждому из пространственных направлений.

3. Схема “кабаре”. Численное решение поставленной задачи будем искать по схеме “кабаре”. Область G покроем равномерной расчетной сеткой с шагами $h_x = h_y = h$. Горизонтальные скорости переноса будем относить к вертикальным граням расчетных ячеек и обозначать как $u_{i,j+1/2}$, вертикальные — к горизонтальным граням и обозначать как $v_{i+1/2,j}$.

В схеме КАБАРЕ используются два типа переменных — “потокосые” и “консервативные”. Потокосые переменные относятся к серединам граней расчетных ячеек и обозначаются как $\varphi_{i,j+1/2}$, $\varphi_{i+1/2,j}$. Консервативные — локализуются в центрах ячеек и обозначаются как $\varphi_{i+1/2,j+1/2}$. В начальный момент времени значения консервативных и потокосых переменных задаются в соответствии с начальными данными.

Расчетный цикл в схеме “кабаре” можно условно разбить на три этапа (фазы). На первом этапе по известным величинам потокосых и консервативных переменных находятся консервативные переменные на промежуточном временном слое:

$$\frac{\varphi_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{(u\varphi)_{i+1,j+1/2}^n - (u\varphi)_{i,j+1/2}^n}{h} + \frac{(v\varphi)_{i+1/2,j+1}^n - (v\varphi)_{i+1/2,j}^n}{h} = 0, \quad (4)$$

где τ — шаг интегрирования по времени.

На втором этапе методом линейной экстраполяции вычисляются значения потокосых переменных на новом временном слое:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} 2\varphi_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i-1,j+1/2}^n, & u_{i,j+1/2} \geq 0, \\ 2\varphi_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i+1,j+1/2}^n, & u_{i,j+1/2} < 0, \end{cases} \\ \varphi_{i+1/2,j}^{n+1} &= \begin{cases} 2\varphi_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i+1/2,j-1}^n, & v_{i+1/2,j} \geq 0, \\ 2\varphi_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i+1/2,j+1}^n, & v_{i+1/2,j} < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

На третьем, завершающем этапе, находятся новые значения консервативных переменных:

$$\frac{\varphi_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - \varphi_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(u\varphi)_{i+1,j+1/2}^{n+1} - (u\varphi)_{i,j+1/2}^{n+1}}{h} + \frac{(v\varphi)_{i+1/2,j+1}^{n+1} - (v\varphi)_{i+1/2,j}^{n+1}}{h} = 0. \quad (6)$$

Разностные схемы первого и третьего этапов аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение (1) со вторым порядком по пространству и с первым порядком по времени. Однако их сумма

$$\frac{\varphi_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - \varphi_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{(u\bar{\varphi})_{i+1,j+1/2} - (u\bar{\varphi})_{i,j+1/2}}{h} + \frac{(v\bar{\varphi})_{i+1/2,j+1} - (v\bar{\varphi})_{i+1/2,j}}{h} = 0,$$

где чертой сверху обозначена полусумма величин с текущего и нового временного слоя, имеет второй порядок аппроксимации. Формулы линейной экстраполяции (5) для достаточно гладких функций тоже выполняются со вторым порядком точности. Таким образом, в целом вычислительный алгоритм (4)–(6) обладает вторым порядком аппроксимации.

Для выполнения условий устойчивости величину шага по времени следует выбирать из условия

$$\tau \leq \text{CFL} \cdot \min\left(\frac{h}{u}, \frac{h}{v}\right), \quad \text{CFL} \in [0; 0.5],$$

где CFL — число Куранта–Фридрихса–Леви.

4. Временная обратимость. Нетрудно видеть, что алгоритм (4)–(6) обратим по времени. Если вычислить потоковые и консервативные переменные на новом временном слое t_{n+1} и затем поменять скорости переноса на противоположные, то следующим шагом с тем же значением τ мы вернемся к консервативным и потоковым переменным на слое t_n .

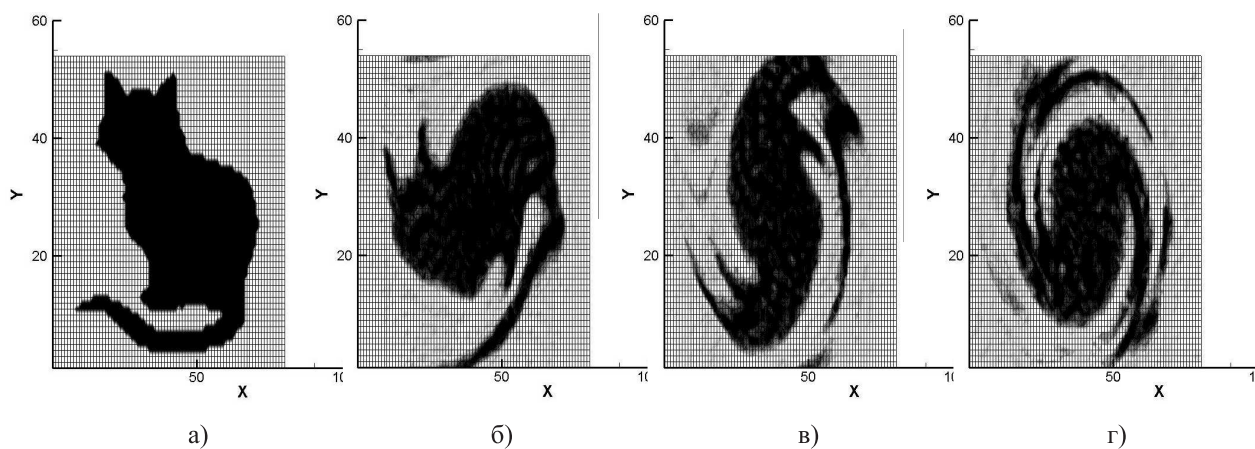


Рис. 1

Покроем область решения задачи G квадратной сеткой 100×100 ячеек и в каждой ячейке в качестве начальных данных зададим ноль или единицу в зависимости от того, попадает ли данная ячейка в область контура, изображающего кошку (рис. 1а). Численно проинтегрируем уравнение переноса (1) на поле скоростей (2) по схеме (4)–(6) с постоянным шагом по времени до момента, соответствующего нескольким оборотам вокруг оси. Последовательные стадии деформирования контура кошки представлены на рис. 1б–1г. Если затем мы примем полученные значения за начальные данные, заменим скорости переноса на противоположные и продолжим интегрирование с тем же шагом по времени, то все изображенные профили в точности повторятся в обратном порядке и мы вернемся к начальному профилю.

5. Нелинейная коррекция потоков и принцип максимума. Поскольку схема (4)–(6) имеет второй порядок аппроксимации, то по теореме Годунова [2] она является немонотонной и может, в частности, приводить к появлению отрицательных значений концентраций, что во многих случаях недопустимо. Для придания численному решению монотонности необходимо использовать какой-либо вариант метода нелинейной коррекции потоков [5]. Для схемы “кабаре” эффективным способом коррекции потоковых переменных является использование естественных ограничений, налагаемых на решение принципом максимума.

Из принципа максимума для представлений (3) следует, что

$$\begin{cases} \varphi_{i,j+1/2}^{n+1} \leq \max \varphi_{i-1/2,j+1/2}^* = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \varphi(x, y_{j+1/2}, t_n) + \tau \cdot (\max Q_x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}, & \text{если } u_{i,j+1/2} > 0, \\ \varphi_{i,j+1/2}^{n+1} \leq \max \varphi_{i+1/2,j+1/2}^* = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \varphi(x, y_{j+1/2}, t_n) + \tau \cdot (\max Q_x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}, & \text{если } u_{i,j+1/2} \leq 0, \\ \varphi_{i,j+1/2}^{n+1} \geq \min \varphi_{i-1/2,j+1/2}^* = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \varphi(x, y_{j+1/2}, t_n) + \tau \cdot (\min Q_x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}, & \text{если } u_{i,j+1/2} > 0, \\ \varphi_{i,j+1/2}^{n+1} \geq \min \varphi_{i+1/2,j+1/2}^* = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \varphi(x, y_{j+1/2}, t_n) + \tau \cdot (\min Q_x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}, & \text{если } u_{i,j+1/2} \leq 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} (\max Q_x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i], t \in [t_n, t_{n+1}]} \left\{ -v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\}, \\ (\max Q_x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}], t \in [t_n, t_{n+1}]} \left\{ -v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\}, \\ (\min Q_x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i], t \in [t_n, t_{n+1}]} \left\{ -v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\}, \\ (\min Q_x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}], t \in [t_n, t_{n+1}]} \left\{ -v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \end{cases} \quad (7)$$

и

$$\begin{cases} \varphi_{i+1/2,j}^{n+1} \leq \max \varphi_{i+1/2,j-1/2}^* = \max_{y \in [y_{i-1}, y_i]} \varphi(x_{i+1/2}, y, t_n) + \tau \cdot (\max Q_y)_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}, & \text{если } v_{i+1/2,j} > 0, \\ \varphi_{i+1/2,j}^{n+1} \leq \max \varphi_{i+1/2,j+1/2}^* = \max_{y \in [y_i, y_{i+1}]} \varphi(x_{i+1/2}, y, t_n) + \tau \cdot (\max Q_y)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}, & \text{если } v_{i+1/2,j} \leq 0, \\ \varphi_{i+1/2,j}^{n+1} \geq \min \varphi_{i+1/2,j-1/2}^* = \min_{y \in [y_{i-1}, y_i]} \varphi(x_{i+1/2}, y, t_n) + \tau \cdot (\min Q_y)_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}, & \text{если } v_{i+1/2,j} > 0, \\ \varphi_{i+1/2,j}^{n+1} \geq \min \varphi_{i+1/2,j+1/2}^* = \min_{y \in [y_i, y_{i+1}]} \varphi(x_{i+1/2}, y, t_n) + \tau \cdot (\min Q_y)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}, & \text{если } v_{i+1/2,j} \leq 0. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{cases} (\max Q_y)_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2} = \max_{y \in [y_{i-1}, y_i], t \in [t_n, t_{n+1}]} \left\{ -u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\}, \\ (\max Q_y)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = \max_{y \in [y_i, y_{i+1}], t \in [t_n, t_{n+1}]} \left\{ -u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\}, \\ (\min Q_y)_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2} = \min_{y \in [y_{i-1}, y_i], t \in [t_n, t_{n+1}]} \left\{ -u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\}, \\ (\min Q_y)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = \min_{y \in [y_i, y_{i+1}], t \in [t_n, t_{n+1}]} \left\{ -u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\}. \end{cases} \quad (8)$$

Если оценки величин $\min \varphi^*$ и $\max \varphi^*$ получены, то нелинейная коррекция заключается в замене вычисленных по формулам линейной экстраполяции потоковых переменных на их минимальные или максимальные значения, когда они выходят за пределы допустимого диапазона $[\min \varphi^*, \max \varphi^*]$:

$$\varphi^{n+1} = \begin{cases} \varphi^{n+1}, & \text{если } \min \varphi^* \leq \varphi^{n+1} \leq \max \varphi^*, \\ \min \varphi^*, & \text{если } \min \varphi^* > \varphi^{n+1}, \\ \max \varphi^*, & \text{если } \max \varphi^* < \varphi^{n+1}. \end{cases} \quad (9)$$

После проведения коррекции (9) вычисляются новые значения консервативных переменных в соответствии с (6). Коррекция потоковых переменных не приводит к потере свойства консервативности разностной схемы, однако лишает ее свойства временной обратимости. Следует также отметить, что выполнение

условий принципа максимума для потоковых переменных еще не гарантирует монотонности схемы, поскольку консервативные переменные не корректируются. Можно сказать, что условие (9) приводит к “почти монотонной схеме”. Для монотонности схемы по консервативным переменным нужны дополнительные условия, наподобие тех, что предложены в работе [7].

6. Оценка верхних и нижних пределов изменения потоковых переменных. При оценке максимумов и минимумов переносимой функции на отрезках, проходящих через середину расчетной ячейки $(i - 1/2, j + 1/2)$ и параллельных осям координат, естественно использовать следующие приближения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \varphi(x, y_{j+1/2}) \approx \max(\varphi_{i-1, j+1/2}^n, \varphi_{i-1/2, j+1/2}^n, \varphi_{i, j+1/2}^n), \\ \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \varphi(x, y_{j+1/2}) \approx \min(\varphi_{i-1, j+1/2}^n, \varphi_{i-1/2, j+1/2}^n, \varphi_{i, j+1/2}^n), \\ \max_{y \in [y_i, y_{i+1}]} \varphi(x_{i-1/2}, y) \approx \max(\varphi_{i-1/2, j}^n, \varphi_{i-1/2, j+1/2}^n, \varphi_{i-1/2, j+1}^n), \\ \min_{y \in [y_i, y_{i+1}]} \varphi(x_{i-1/2}, y) \approx \min(\varphi_{i-1/2, j}^n, \varphi_{i-1/2, j+1/2}^n, \varphi_{i-1/2, j+1}^n). \end{array} \right.$$

Что касается оценки членов (7) и (8), то возможны варианты, а от того, как они будут аппроксимированы, может зависеть качество численного решения.

Один из подходов к вычислению величин Q состоит в аппроксимации правых частей уравнений (3). Рассмотрим четыре наиболее “естественных” варианта:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \left\{ \begin{array}{l} (\max Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = (\min Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = \left\langle -\varphi \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial(v\varphi)}{\partial y} \right\rangle = \\ = -\varphi_{i+1/2, j+1/2}^n \frac{u_{i+1, j+1/2}^n - u_{i, j+1/2}^n}{h} - \frac{(v\varphi)_{i+1/2, j+1}^n - (v\varphi)_{i+1/2, j}^n}{h}, \\ (\max Q_y)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = (\min Q_y)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = \left\langle -\varphi \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial(u\varphi)}{\partial x} \right\rangle = \\ = -\varphi_{i+1/2, j+1/2}^n \frac{v_{i+1/2, j+1}^n - v_{i+1/2, j}^n}{h} - \frac{(u\varphi)_{i+1, j+1/2}^n - (u\varphi)_{i, j+1/2}^n}{h}; \end{array} \right. \\ 2) \left\{ \begin{array}{l} (\max Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = (\min Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = \\ = -\left(\frac{\varphi_{i+1, j+1/2}^n + \varphi_{i, j+1/2}^n}{2} \right) \frac{u_{i+1, j+1/2}^n - u_{i, j+1/2}^n}{h} - \frac{(v\varphi)_{i+1/2, j+1}^n - (v\varphi)_{i+1/2, j}^n}{h}, \\ (\max Q_y)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = (\min Q_y)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = \\ = -\left(\frac{\varphi_{i+1/2, j+1}^n + \varphi_{i+1/2, j}^n}{2} \right) \frac{v_{i+1/2, j+1}^n - v_{i+1/2, j}^n}{h} - \frac{(u\varphi)_{i+1, j+1/2}^n - (u\varphi)_{i, j+1/2}^n}{h}; \end{array} \right. \\ 3) \left\{ \begin{array}{l} (\max Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = (\min Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = \\ = -\varphi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} \frac{u_{i+1, j+1/2}^{n+1/2} - u_{i, j+1/2}^{n+1/2}}{h} - \frac{(v\varphi)_{i+1/2, j+1}^{n+1/2} - (v\varphi)_{i+1/2, j}^{n+1/2}}{h}, \\ (\max Q_y)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = (\min Q_y)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = \\ = -\varphi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} \frac{v_{i+1/2, j+1}^{n+1/2} - v_{i+1/2, j}^{n+1/2}}{h} - \frac{(u\varphi)_{i+1, j+1/2}^{n+1/2} - (u\varphi)_{i, j+1/2}^{n+1/2}}{h}; \end{array} \right. \\ 4) \left\{ \begin{array}{l} (\max Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = (\min Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = \\ = -\left(\frac{\varphi_{i+1, j+1/2}^{n+1/2} + \varphi_{i, j+1/2}^{n+1/2}}{2} \right) \frac{u_{i+1, j+1/2}^{n+1/2} - u_{i, j+1/2}^{n+1/2}}{h} - \frac{(v\varphi)_{i+1/2, j+1}^{n+1/2} - (v\varphi)_{i+1/2, j}^{n+1/2}}{h}, \\ (\max Q_y)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = (\min Q_y)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = \\ = -\left(\frac{\varphi_{i+1/2, j+1}^{n+1/2} + \varphi_{i+1/2, j}^{n+1/2}}{2} \right) \frac{v_{i+1/2, j+1}^{n+1/2} - v_{i+1/2, j}^{n+1/2}}{h} - \frac{(u\varphi)_{i+1, j+1/2}^{n+1/2} - (u\varphi)_{i, j+1/2}^{n+1/2}}{h}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

В работе [3] предложено аппроксимировать правые части уравнений (3) приближенными значениями их левых частей, вычисленных по уже известным величинам на нижнем и промежуточном слоях:

$$5) \left\{ \begin{aligned} (\max Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} &= (\min Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = \\ &= \frac{\varphi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau/2} + \left(\frac{u_{i, j+1/2} + u_{i+1, j+1/2}}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1, j+1/2}^n - \varphi_{i, j+1/2}^n}{h}, \\ (\max Q_y)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} &= (\min Q_y)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = \\ &= \frac{\varphi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau/2} + \left(\frac{v_{i+1/2, j} + v_{i+1/2, j+1}}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1/2, j+1}^n - \varphi_{i+1/2, j}^n}{h}. \end{aligned} \right.$$

Такой подход легко обобщается на произвольные гиперболические системы уравнений и косоугольные расчетные сетки и хорошо себя зарекомендовал при решении ряда двумерных и трехмерных модельных и прикладных задач [3]. Его недостатком является то, что в случае одномерных уравнений газовой динамики он ухудшает результаты расчетов, полученные в предположении, что

$$(\max Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = (\min Q_x)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = 0.$$

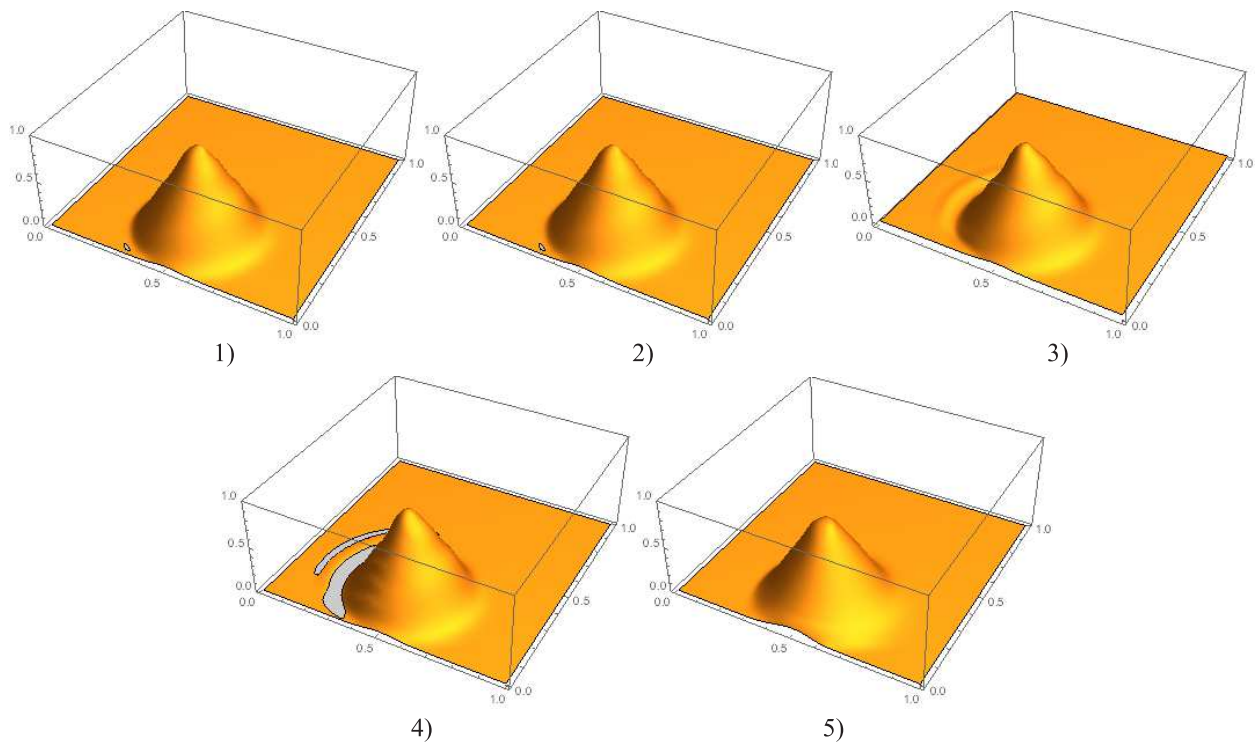


Рис. 2. Результаты теста Кроули после одного круга на сетке 80 на 80

Условия варианта 5 аппроксимируют правые части уравнения (1) с первым порядком по времени.

Для оценки относительного качества численного решения в зависимости от выбора аппроксимации величин используем тест Кроули [6].

7. Тест Кроули. В качестве начальных данных (переносимого профиля) рассмотрим функцию, отличную от нуля в круге с радиусом $r_0 = 0.25$ и с центром, удаленном от начала координат на расстояние r_0 . Пусть эта функция линейно возрастает от периферии к центру указанного круга от нуля до единицы (конус единичной высоты). Эволюция начального конуса в процессе его вращения вокруг начала координат на 360 градусов на расчетных сетках

Проседание вершины конуса

Сетка	80 × 80	128 × 128	576 × 576
1	7.94401%	5.73111%	1.82238%
2	7.94401%	5.73111%	1.82238%
3	7.64384%	5.92181%	1.97296%
4	7.85718%	5.92705%	2.01508%
5	18.1712%	13.7636%	5.91804%

различной густоты и составляет содержание теста Кроули. Качество решения оценивается по величине невязки в равномерной норме. В тестах используются сгущающиеся ортогональные расчетные сетки: 80×80 , 128×128 , 576×576 . Результаты тестов представлены в таблице.

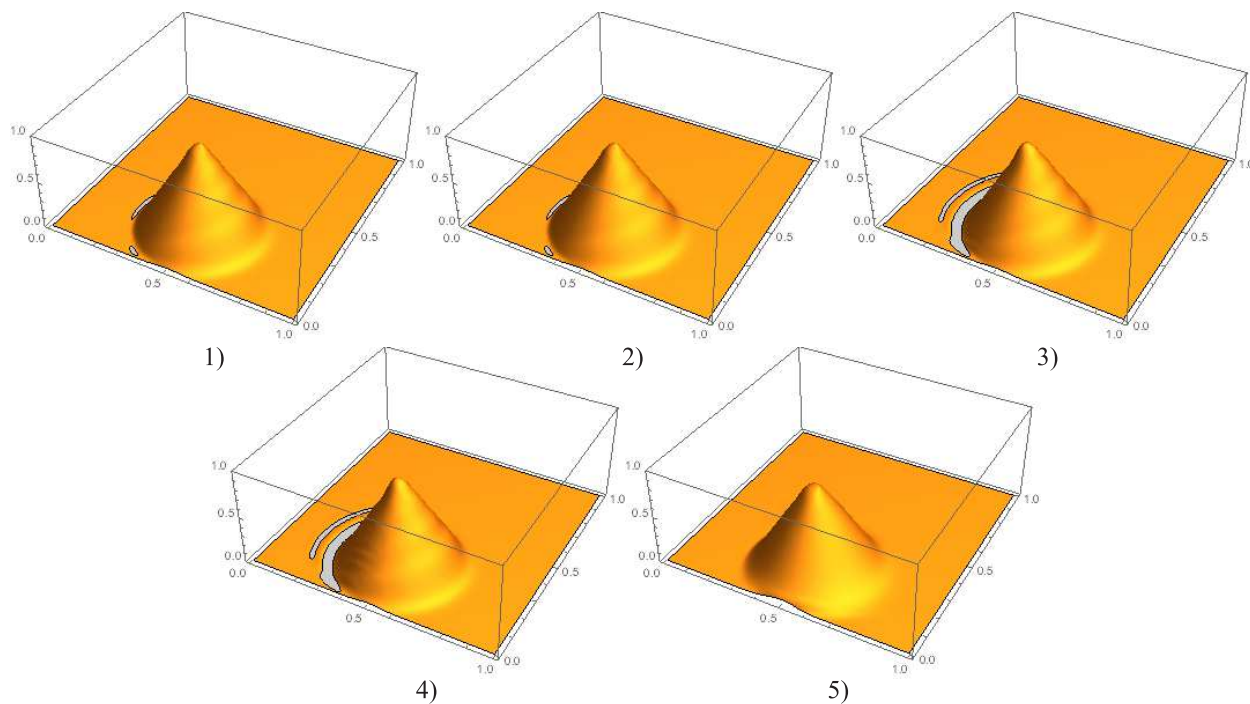


Рис. 3. Результаты теста Кроули после одного круга на сетке 128 на 128

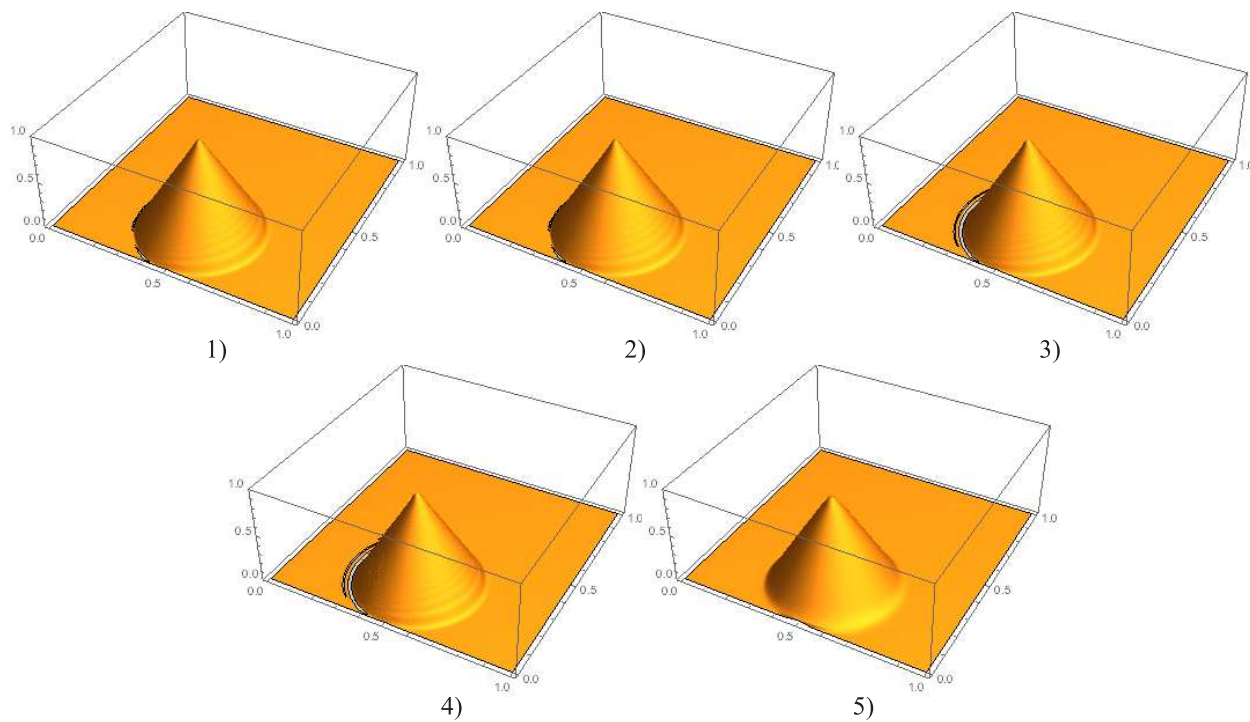


Рис. 4. Результаты теста Кроули после одного круга на сетке 576 на 576

На рис. 2–4 представлены профили конусов после полного оборота вокруг начала координат для рассматриваемых вариантов коррекций потоков.

8. Заключение Результаты приведенных расчетов показывают, что качество численного решения линейного уравнения переноса по схеме “кабаре” существенно зависит от способа аппроксимации источни-

ковых членов при оценке допустимых пределов вариации решения. Поскольку схема “кабаре” применима для любых систем законов сохранения гиперболического типа и процессов с доминирующим сеточным переносом, то этот вывод можно распространить, в частности, и на алгоритмы “кабаре” для уравнений газовой динамики. Метод “косвенной аппроксимации источниковых членов” при имплементации принципа максимума в нелинейную коррекцию потоков, используемый в настоящее время во всех программах, реализующих схему “кабаре”, демонстрирует наихудшие результаты, поэтому везде, где это возможно, его рекомендуется заменить на метод явной аппроксимации с текущего временного слоя. Следует отметить, что и наихудший из рассмотренных вариантов занимает достойное место среди других современных методов численного решения уравнения конвекции–диффузии с доминирующим сеточным переносом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2012.
3. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Московского университета, 2013.
4. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. **47**, № 3. 271–306.
5. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
6. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. **49**, N 3. 357–393.
7. Головизнин В.М., Карабасов С.А. Нелинейная коррекция схемы “кабаре” // Матем. моделирование. 1998. **10**, № 12. 107–123.
8. Goloviznin V.M., Semenov V.N., Korotkin I.A., Karabasov S.A. A novel computational method for modelling stochastic advection in heterogeneous media // Transport in Porous Media. 2007. **66**, N 3. 439–456.
9. Crowley W.P. Numerical advection experiments // Monthly Weather Rev. 1968. **96**, N 1. 1–11.

Поступила в редакцию
22.08.2016

Time Reversibility and Stream Correction in the CABARET Scheme for the Two-Dimensional Equation of Convective Transport

V. M. Goloviznin¹, D. Yu. Gorbachev², A. M. Kolokolnikov³, P. A. Maiorov⁴, P. A. Maiorov⁵,
and B. A. Tlepsuk⁶

¹ Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Department, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

² Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: gorbachev-daniil@inbox.ru

³ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: k.alex-info@mail.ru

⁴ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: pavel.a.mayorov@gmail.com

⁵ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: maiorov.peter@gmail.com

⁶ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: btlepsuk@gmail.com

Received August 22, 2016

Abstract: The CABARET (Compact Accurately Boundary Adjusting-REsolution Technique) difference scheme with five different modifications of nonlinear flow correction based on the maximum principle is considered for the two-dimensional linear convection equation. The computational efficiency of these different modifications is analyzed by the results of solving the Crowley’s problem on the cone rotation around the axis not coincident

with the axis of the cone using condensing orthogonal grids. A number of recommendations are formulated to improve the computational efficiency of the entire class of CABARET schemes for the hyperbolic-type conservation laws and for the processes with dominant grid transfer.

Keywords: CABARET scheme, shallow water equations, conservative schemes, time reversible schemes, numerical simulation.

References

1. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Yanenko, *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1978; Amer. Math. Soc., Providence, 1982).
2. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2012; CRC Press, Boca Raton, 2001).
3. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *New CFD Algorithms for Multiprocessor Computer Systems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
4. S. K. Godunov, "A Difference Method for Numerical Calculation of Discontinuous Solutions of the Equations of Hydrodynamics," *Mat. Sb.* **47** (3), 271–306 (1959).
5. A. A. Samarskii and Yu. P. Popov, *Difference Schemes for Solving Gas Dynamics Problems* (Nauka, Moscow, 1992) [in Russian].
6. A. Harten, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *J. Comput. Phys.* **49** (3), 357–393 (1983).
7. V. M. Goloviznin and S. A. Karabasov, "Nonlinear Correction of Cabaret Scheme," *Mat. Model.* **10** (12), 107–123 (1998).
8. V. M. Goloviznin, V. N. Semenov, I. A. Korotkin, and S. A. Karabasov, "A Novel Computational Method for Modelling Stochastic Advection in Heterogeneous Media," *Transp. Porous Med.* **66** (3), 439–456 (2007).
9. W. P. Crowley, "Numerical Advection Experiments," *Mon. Wea. Rev.* **96** (1), 1–11 (1968).