

УДК 519.63

doi 10.26089/NumMet.v17r433

## МЕТОД ДЕКАРТОВЫХ СЕТОК ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Д. А. Сидоренко<sup>1</sup>, П. С. Уткин<sup>2</sup>

Статья посвящена разработке, программной реализации и количественной оценке свойств вычислительного алгоритма метода декартовых сеток для математического моделирования распространения ударных волн в областях сложной формы с криволинейными границами. Представлено подробное описание вычислительного алгоритма, основанного на методе “h-ячеек”. Работоспособность алгоритма продемонстрирована на задачах о регулярном и простом маховском отражении ударной волны от клина, а также о взаимодействии ударной волны с цилиндром.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, газовая динамика, ударная волна, метод Годунова, метод декартовых сеток.

**1. Введение.** Ряд задач теории ударных и детонационных волн связан с необходимостью численного интегрирования уравнений газовой динамики в областях сложной формы с криволинейными границами. К числу таких задач можно отнести, например, проблемы взрывобезопасности в системах трубопроводов или моделирование процессов в камере сгорания перспективных двигательных установок. В [1] методами численного моделирования была решена задача о профилировке стенок трубы с целью сокращения времени перехода ударной волны (УВ) в детонационную. Традиционные подходы математического моделирования подобных задач (это справедливо и для [1]) связаны с использованием криволинейных расчетных сеток, согласованных с границами расчетной области, с четырехугольными (здесь и далее речь идет о двумерном случае) ячейками [2]. Вместе с тем, несмотря на наличие значительно проработанного аппарата построения подобных сеток, в общем случае построение “качественной” сетки часто требует ручного труда исследователя.

При этом существует принципиально иной подход, свободный от проблемы построения криволинейных сеток, связанный с использованием “методов погруженной границы” (см. обзор [3] и ссылки в [4]), когда все ячейки имеют квадратную или прямоугольную форму и требуется тем или иным способом решить проблему расчета параметров в ячейках, пересекаемых криволинейными границами расчетной области. Отметим также подход, связанный с использованием системы сеток — сетки в ядре течения, которая не согласована с границами тел, и сеток в окрестности криволинейных границ, согласованных с ними [5]. Согласование решений на перекрывающихся участках сеток достигается за счет процедур интерполяции.

Сами методы погруженной границы можно условно разделить на два класса. В методах первого класса в определяющую систему уравнений вводятся фиктивные члены, которые моделируют действие стенки. Расчет при этом ведется единообразно сквозным образом во всей расширенной расчетной области, включающей в себя ячейки, пересекаемые криволинейными границами непроницаемых объектов или целиком накрываемые этими объектами. Новый метод из этого класса для расчета течений сжимаемых сред был предложен в недавней работе [6]. В [6] особое внимание уделяется виду “компенсационного” потока, который фигурирует в правых частях уравнений и который обеспечивает эквивалентность модифицированной постановки со сквозным счетом в расширенной области исходной краевой задаче. Таким образом, среди основных достоинств обсуждаемого класса методов погруженной границы — их алгоритмическая однородность. К недостаткам можно отнести отсутствие однозначного физического смысла параметров непосредственно в ячейках, пересекаемых границами объектов, особенно в задачах физико-химической гидродинамики, а также необходимость контроля консервативности вычислительного алгоритма в условиях наличия в схеме источниковых членов.

Второй класс объединяет в себя методы декартовых сеток, когда наряду с внутренними регулярными ячейками дискретизация исходной системы уравнений производится особым образом в граничных

<sup>1</sup> Институт автоматизации проектирования РАН, ул. 2-ая Брестская, 19/18, 123056, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: sidr1234@mail.ru

<sup>2</sup> Институт автоматизации проектирования РАН, ул. 2-ая Брестская, 19/18, 123056, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: pavel\_utk@mail.ru

ячейках, пересекаемых границами расчетной области. Детальное рассмотрение и учет того, каким образом криволинейная граница расчетной области пересекает прямоугольную ячейку декартовой сетки, приводит к другой проблеме, известной в литературе как “проблема малой ячейки”.

Целью настоящей работы является разработка, программная реализация и количественная оценка свойств вычислительного алгоритма метода декартовых сеток для математического моделирования распространения ударных волн в областях сложной формы с криволинейными границами, основные идеи которого были сформулированы и изложены в [7–9].

**2. Постановка задачи и математическая модель.** Математическая модель основывается на двумерной системе уравнений Эйлера, записанной в декартовой системе координат  $(x, y)$  в векторной дивергентной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{bmatrix}, \quad e = \frac{\rho w^2}{2} + \rho \epsilon, \quad \epsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}.$$

Здесь  $t$  — время,  $\rho$  — плотность газа,  $w$  — вектор скорости газа с компонентами  $u$  и  $v$ ,  $p$  — давление,  $\epsilon$  — внутренняя удельная энергия газа;  $e$  — полная энергия газа на единицу объема. Газ подчиняется уравнению состояния идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma$ .

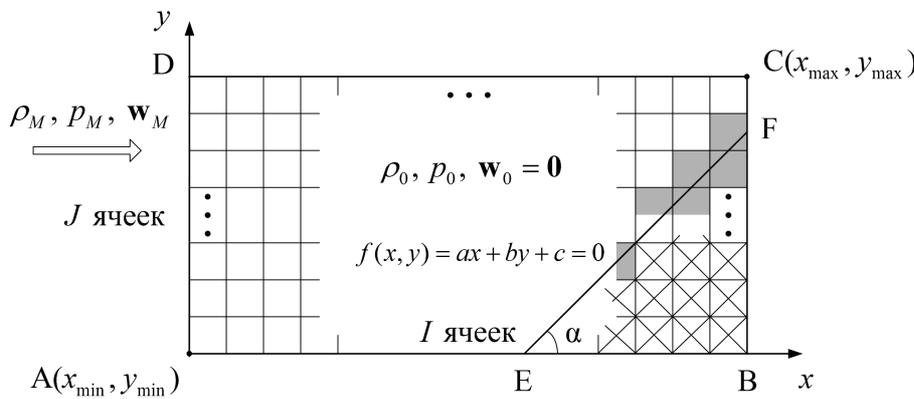


Рис. 1. Схематичная постановка задачи о дифракции УВ на клине в рамках метода декартовых сеток

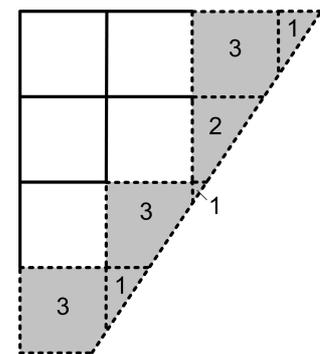


Рис. 2. Типы усеченных ячеек основной расчетной области

Поясним постановку на примере задачи об отражении УВ от клина (рис. 1), которая рассматривается далее в разделе 4.1. В начальный момент времени в расчетной области AEFCD (далее она также будет называться основной расчетной областью) находится покоящийся газ ( $u_0 = v_0 = 0$ ) с плотностью  $\rho_0$  и давлением  $p_0$ . На левой границе AD выставляется условие втекания газа с постоянными параметрами  $\rho_M, p_M$  и  $w_M$ , соответствующими параметрам за УВ с заданным числом Маха  $M$ . На остальных границах AE, EF, FC и CD выставляется граничное условие непротекания, т.е. условие равенства нулю нормальной компоненты скорости газа. Вычислительный эксперимент продолжается до момента прихода возмущений на правую границу FC расчетной области. Главной особенностью рассматриваемой методики является тот факт, что основная расчетная область получается из расширенной области (т.е. прямоугольника ABCD, задаваемого координатами левой нижней A и правой верхней C вершин и покрытого равномерной сеткой с числом ячеек  $I$  по оси абсцисс и  $J$  по оси ординат) отсечением области под прямой  $f(x) = ax + by + c = 0$ . Таким образом, отрезок EF не согласован с границами квадратных расчетных ячеек, а пересекает их произвольным образом.

**3. Вычислительный алгоритм метода декартовых сеток.** Перейдем теперь к детальному описанию вычислительного алгоритма метода декартовых сеток.

**3.1. Построение сетки и определение типов ячеек и ребер.** Прямоугольник ABCD, представляющий расширенную расчетную область, покрывается равномерной декартовой сеткой с узлами

$$(x_i, y_j) : x_i = x_{\min} + ih, \quad y_j = y_{\min} + jh, \quad i = 0, \dots, I, \quad j = 0, \dots, J, \quad h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{I} = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{J}.$$

Множество ячеек расширенной расчетной области обозначим через  $C$ . Множество  $C$  является объединением трех перечисляемых ниже непересекающихся классов ячеек.

- Регулярные, или внутренние ячейки  $C_1$ , целиком лежащие в основной расчетной области и не пересекаемые ее границами. Применительно к рис. 1, регулярные ячейки (белого цвета) определяются как ячейки, для всех узлов  $(x_i, y_j)$  которых справедливо  $f(x_i, y_j) > 0$ . Регулярные ячейки граничат друг с другом по регулярным ребрам.
- Пересекаемые ячейки  $C_2$ , обозначенные серым цветом на рис. 1. Ячейка относится к типу пересекаемых, если по крайней мере для двух ее вершин  $(x_{i_1}, y_{j_1})$  и  $(x_{i_2}, y_{j_2})$  справедливо следующее неравенство:  $f(x_{i_1}, y_{j_1})f(x_{i_2}, y_{j_2}) < 0$ . Одно из ограничений рассматриваемой методики декартовых сеток связано с тем, что элемент криволинейной границы внутри расчетной ячейки аппроксимируется отрезком прямой, что, впрочем, типично для подавляющего большинства методов, включая и те, в которых сетка согласована с границами расчетной области, и обусловлено понятной степенью дискретизации при разностном представлении криволинейной границы. Таким образом, часть пересекаемой ячейки, которая относится к основной расчетной области и называется усеченной ячейкой, может иметь одну из трех форм — треугольника, четырехугольника или пятиугольника (обозначены цифрами 1, 2 и 3 соответственно на рис. 2). Ребра усеченной ячейки, включая те, по которым она граничит с регулярной ячейкой, будем называть усеченными. На рис. 2 регулярные ребра выделены жирными сплошными линиями, усеченные — пунктирными.
- Внешние ячейки  $C_3$ , перечеркнуты на рис. 1. Для всех узлов внешних ячеек выполняется  $f(x_i, y_j) < 0$ . Ячейки этого типа не принимают участие в расчете совсем, в отличие, например, от методики [6].

**3.2. Конечно-объемная схема.** Разностная схема, в отличие от [7–9], записывается в конечно-объемном виде

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\tau^n} + \frac{1}{S_{ij}} \sum_{\sigma} (F_{\sigma} l_{\sigma}) = 0, \quad (i, j) \in C_1 \cup C_2. \tag{1}$$

Здесь индекс  $i$  соответствует номеру ячейки вдоль координатного направления  $x$ , индекс  $j$  — вдоль направления  $y$  (таким образом, индексация ячейки  $(i, j)$  совпадает с индексацией ее левого нижнего угла  $(x_i, y_j)$ ),  $S_{ij}$  — площадь ячейки, суммирование ведется по всем ребрам  $\sigma$  ячейки  $(i, j)$ ,  $l_{\sigma}$  — длина ребра с индексом  $\sigma$ ,  $F_{\sigma}$  — вектор численного потока через ребро  $\sigma$  в направлении внешней к ребру нормали  $\mathbf{n}_{\sigma} = (n_{\sigma_x}, n_{\sigma_y})$ . Шаг интегрирования по времени выбирается из условия устойчивости

$$\tau^n = \text{CFL} \min_{(i,j) \in C_1} \left( \frac{h}{|u_{ij}^n| + c_{ij}^n}, \frac{h}{|v_{ij}^n| + c_{ij}^n} \right), \tag{2}$$

где CFL — коэффициент запаса, лежащий в пределах от 0 до 1,  $c_{ij}^n$  — скорость звука в текущей ячейке, а минимум берется по всем регулярным ячейкам из множества  $C_1$ . Следовательно, одним из основных требований методики является ее робастность при расчете с шагом интегрирования, определяемым только по регулярной части ячеек.

В контексте различных существующих подходов к пространственной дискретизации определяющей системы уравнений в методах погруженной границы и декартовых сеток, важным является тот факт, что конечно-объемная запись схемы (1) автоматически влечет за собой консервативность метода [10]. Кроме того, известно [11], что при использовании численного потока  $F_{\sigma}$ , основанного на точном или приближенном решении задачи Римана, схема (1) характеризуется теоретическим первым порядком аппроксимации по времени и по пространственным переменным на гладких решениях.

Следует отметить, что разностная схема имеет единый вид (1) как для регулярных ячеек, так и для усеченных, что тоже является удобным следствием конечно-объемной формулировки схемы. Для усеченных ячеек индексы  $(i, j)$  определяются естественным образом как индексы ячейки расширенной прямоугольной расчетной области, отсечением от которой была получена усеченная ячейка. Основная задача теперь — описать методику расчета потока  $F_{\sigma}$  через регулярные и усеченные ребра.

**3.3. Расчет численного потока через регулярные ребра.** Для расчета потока

$$F_{\sigma} = F_{\sigma}(U_{ij}^n, U_{i_{\sigma}, j_{\sigma}}^n) \equiv F(U^L, U^R)$$

через регулярное ребро  $\sigma$  ячейки  $(i, j)$  перейдем из исходной, глобальной системы координат  $(x, y)$  в локальную, связанную с внешней нормалью  $\mathbf{n}_{\sigma}$  к ребру  $\sigma$  и касательным вектором  $\boldsymbol{\tau}_{\sigma} = (-n_{\sigma_y}, n_{\sigma_x})$ . Через  $U_{i_{\sigma}, j_{\sigma}}^n$  обозначен вектор консервативных переменных в ячейке, соседствующей с ячейкой  $(i, j)$  по ребру  $\sigma$ . При этом вектора консервативных переменных слева и справа от ребра  $\sigma$  преобразуются по

формуле  $U_{n_\sigma} = T_{n_\sigma} U$ , где матрица перехода  $T_{n_\sigma}$  имеет следующий вид (выпишем также матрицу  $T_{n_\sigma}^{-1}$ , требующуюся для дальнейшего изложения):

$$T_{n_\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{\sigma_x} & n_{\sigma_y} & 0 \\ 0 & -n_{\sigma_y} & n_{\sigma_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{n_\sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{\sigma_x} & -n_{\sigma_y} & 0 \\ 0 & n_{\sigma_y} & n_{\sigma_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В рамках настоящей статьи поток в локальной системе координат рассчитывается методом С.К. Годунова [2] в реализации [11], основанным на точном решении задачи о распаде произвольного разрыва  $U_G(U_{n_\sigma}^L, U_{n_\sigma}^R)$ :  $F_{n_\sigma} = F[U_G(U_{n_\sigma}^L, U_{n_\sigma}^R)]$ . Наконец, для нахождения потока в исходной глобальной системе координат выполним обратное преобразование

$$F_\sigma = T_{n_\sigma}^{-1} F_{n_\sigma}. \quad (4)$$

То, что выражение (4) в конечном итоге действительно определяет численный поток в исходной глобальной системе координат, следует из известного свойства инвариантности уравнений Эйлера относительно преобразования поворота (см., например, [11]).

**3.4. Расчет численного потока через усеченные ребра.** Расчет потоков через усеченные ребра требует введения в рассмотрение вспомогательных геометрических объектов — “h-ячеек” (“h-box” в оригинальных работах [7–9]). Потоки через усеченные ребра находятся с помощью решения задач Римана с начальными данными в виде параметров газа в h-ячейках. Таким образом, требуется описать

- процедуру построения h-ячеек;
- процедуру определения параметров газа в h-ячейках;
- процедуру расчета потоков через ребра усеченной ячейки.

Напомним, что h-ячейки — это параллелограммы, имеющие своими основаниями ребра усеченной ячейки и построенные в каждом из четырех направлений, определяемых ориентацией граничного ребра ячейки (два перпендикулярных направления и два продольных). В качестве примера для усеченной ячейки треугольной формы соответствующие h-ячейки изображены на рис. 3.

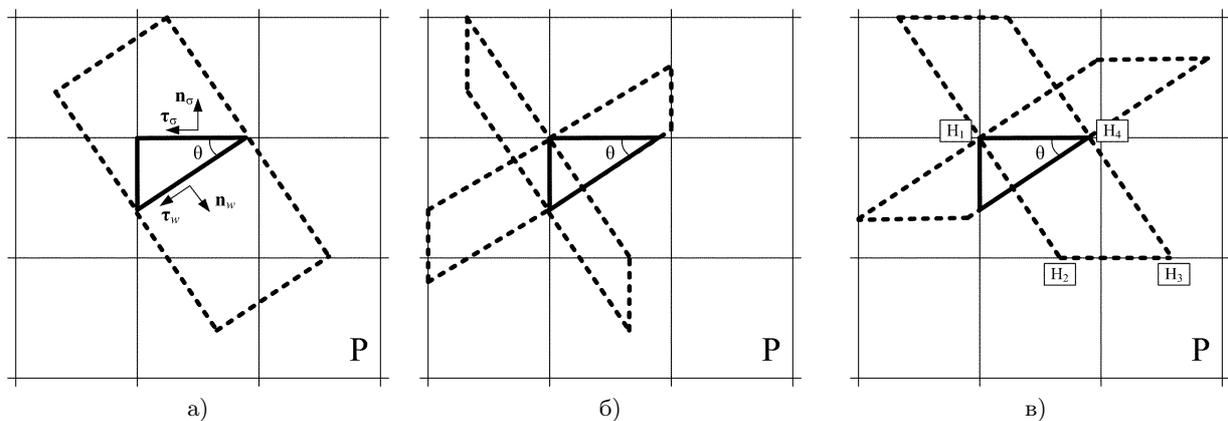


Рис. 3. Множество h-ячеек (пунктирные линии) для усеченной ячейки (жирные линии) треугольной формы. Приведены h-ячейки для а) граничного ребра, б) вертикального ребра, в) горизонтального ребра

Длина h-ячейки определяется по формуле

$$l_h = \frac{h}{\max(|\sin \theta|, |\cos \theta|)}, \quad (5)$$

где  $h$  — длина ребра регулярной ячейки, а  $\theta$  — угол между усеченным граничным ребром и осью  $x$  глобальной декартовой системы координат. Рассмотрим произвольное ребро пересекаемой ячейки, а также пару параллельных прямых, проходящих через концы этого ребра и ориентированных вдоль одного из направлений h-ячейки — перпендикулярно или параллельно граничному ребру пересекаемой ячейки. Точки пересечения этих прямых с границей области  $P$  из 8 ячеек, окружающих пересекаемую ячейку, отстоят от соответствующих концов ребра пересекаемой ячейки на расстояние не меньше, чем  $\frac{h}{|\sin \theta|}$  для прямых,

перпендикулярных граничному ребру пересекаемой ячейки, и  $\frac{h}{|\cos \theta|}$  для параллельных. Таким образом, если строить боковые стороны h-ячеек, откладывая на параллельных прямых отрезки длиной  $l_h$ , определяемой формулой (5), то боковые стороны h-ячеек будут лежать в пределах области P, как это показано на рис. 3. Из принадлежности боковых сторон h-ячеек области P следует принадлежность этой области всей h-ячейки.

Для расчета потоков через ребра ячеек методом Годунова требуется знать значения газодинамических переменных в h-ячейках. Вектор консервативных переменных в них определяется как среднее арифметическое взвешенное по всем векторам в ячейках сетки, которые h-ячейка пересекает:

$$U_{h\text{-box}} = \frac{\sum_k U_k S_k + \sum_m \tilde{U}_m \tilde{S}_m}{\sum_k S_k + \sum_m \tilde{S}_m}. \tag{6}$$

Здесь индекс  $k$  обозначает суммирование по всем ячейкам основной расчетной области  $C_1 \cup C_2$ , пересекаемым рассматриваемой h-ячейкой;  $U_k$  — вектор консервативных переменных в данной пересекаемой ячейке;  $S_k$  — площадь данного пересечения. При этом некоторые h-ячейки могут лежать частично или полностью за пределами основной расчетной области. Для фрагментов таких h-ячеек, выходящих за пределы основной расчетной области, строятся соответствующие им зеркально отраженные относительно границы “зеркальные” h-ячейки. Пересечениям зеркальных h-ячеек с ячейками основной области соответствует индекс  $m$  в формуле (6) и верхняя тильда. При учете пересечений зеркальных h-ячеек с ячейками основной расчетной области вектора консервативных переменных в последних (обозначаются как  $\tilde{U}_m$ ) входят в (6) с отраженной нормальной компонентой вектора скорости с целью реализации граничного условия непротекания. Связь компонент вектора  $\tilde{U}$  с компонентами исходного вектора консервативных переменных  $U$  осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{U} = \begin{bmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho} u \\ \tilde{\rho} v \\ \tilde{e} \end{bmatrix} &= T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho} u_n \\ \tilde{\rho} u_\tau \\ \tilde{e} \end{bmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \rho \\ -\rho u_n \\ \rho u_\tau \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n_x & -n_y & 0 \\ 0 & -n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_n \\ \rho u_\tau \\ e \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n_x & -n_y & 0 \\ 0 & -n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot T \cdot \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 - n_x^2 & -2n_x n_y & 0 \\ 0 & -2n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot U. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь индексами  $n$  и  $\tau$  обозначены нормальная и тангенциальная компоненты скорости в системе координат, связанной с внешней нормалью  $(n_x, n_y)$  к границе, а матрицы  $T$  и  $T^{-1}$  определяются формулами (3).

Поясним описанный выше алгоритм определения параметров в h-ячейках на примере изображенной на рис. 3в h-ячейки  $H_1H_2H_3H_4$ . Эта ячейка характеризуется тем, что ее фрагмент  $H_2H_3H_4V$  попадает за пределы основной расчетной области (см. рис. 4). В соответствии с описанным алгоритмом для этого фрагмента строится зеркальная h-ячейка  $BH_4CE$ , и общая формула (6) принимает вид

$$U_{H_1H_2H_3H_4} = \frac{U_{k_3} S_{H_1H_4V} + \tilde{U}_{k_1} S_{H_1DE} + \tilde{U}_{k_2} S_{H_1H_4CD} + \tilde{U}_{k_3} S_{H_1H_4B}}{S_{H_1H_4V} + S_{H_1DE} + S_{H_1H_4CD} + S_{H_1H_4B}}.$$

Здесь  $k_1, k_2$  и  $k_3$  — индексы ячеек основной расчетной области, а  $\tilde{U}_{k_1}, \tilde{U}_{k_2}$  и  $\tilde{U}_{k_3}$  находятся по формуле (7), где  $(n_x, n_y)$  — вектор внешней нормали к граничному ребру  $AH_4$  рассматриваемой усеченной ячейки  $AH_1H_4$ .

Возможны ситуации, когда h-ячейка выходит за границу основной расчетной области не в текущей рассчитываемой усеченной ячейке, а в соседней. В этом случае тоже предлагается следовать описанному выше алгоритму и отражать нормальную компоненту скорости газа относительно граничного ребра в рассчитываемой ячейке. Отметим, что вопросы построения зеркальных h-ячеек практически не затронуты в [7–9] и допускают значительную вариативность подходов.

Площади пересечения h-ячейки с ячейками основной расчетной области, фигурирующие в (6), находятся по алгоритму поиска пересечения произвольного многоугольника без самопересечений с произвольным выпуклым многоугольником [12].

После того как найдены параметры газа в h-ячейках, можно приступить к нахождению потоков  $F_\sigma$  через усеченные ребра. Конечно-объемная формулировка вычислительного алгоритма (1) позволяет использовать для этого идеологию метода повернутых сеток [13, 14]. Основная идея метода заключается в том, что если специфика задачи подразумевает наличие некоторых выделенных направлений распространения возмущений, то вектор численного потока целесообразно рассчитывать путем разложения на составляющие вдоль данных выделенных направлений. В нашем случае речь идет об ортонормированном базисе  $(\tau_w, n_w)$ , определяемом ориентацией граничного ребра усеченной ячейки (см. рис. За в качестве примера).

Разложим вектор внешней нормали  $n_\sigma$  для текущего ребра  $\sigma$  в формуле (1) по векторам  $\tau_w$  и  $n_w$ :

$$n_\sigma = (n_\sigma, \tau_w) \cdot \tau_w + (n_\sigma, n_w) \cdot n_w.$$

Используя, как и в предыдущем разделе, свойство инвариантности уравнений Эйлера относительно преобразования поворота, для потока  $F_\sigma$  через усеченное ребро получим

$$F_\sigma = (n_\sigma, \tau_w) \cdot T_{\tau_w}^{-1} \cdot F \left[ U_G(T_{\tau_w} U_{h\text{-box}, \tau_w}^L, T_{\tau_w} U_{h\text{-box}, \tau_w}^R) \right] + (n_\sigma, n_w) \cdot T_{n_w}^{-1} \cdot F \left[ U_G(T_{n_w} U_{h\text{-box}, n_w}^L, T_{n_w} U_{h\text{-box}, n_w}^R) \right],$$

где матрицы  $T_{\tau_w}, T_{n_w}, T_{\tau_w}^{-1}$  и  $T_{n_w}^{-1}$  определяются по аналогии с формулой (3), а пары состояний  $U_{h\text{-box}, \tau_w}^L$  и  $U_{h\text{-box}, \tau_w}^R, U_{h\text{-box}, n_w}^L$  и  $U_{h\text{-box}, n_w}^R$  — векторы консервативных переменных в глобальной системе координат в парах h-ячеек, ориентированных по векторам  $\tau_w$  и  $n_w$ , причем “правое состояние” соответствует h-ячейке, в направлении которой ориентирован вектор  $\tau_w$  или  $n_w$ .

В [7–9] для случая модельных одно- и двумерного уравнений переноса теоретически обосновано, что использование метода повернутых сеток применительно к h-ячейкам обеспечивает устойчивость метода при условии выбора шага по времени в соответствии с (2), т.е. основываясь только на регулярной части ячеек.

**4. Результаты вычислительных экспериментов.** Перейдем к описанию результатов вычислительных экспериментов, демонстрирующих свойства изложенного выше вычислительного алгоритма метода h-ячеек.

**4.1. Отражение ударной волны от клина.** Задачи отражения УВ от клина представляются привлекательными для верификации численных методов, особенно семейства декартовых сеток, из-за наличия значительного объема детального экспериментального материала. Постановка задачи описана в разделе 2 (см. рис. 1).

Были рассмотрены случаи регулярного и простого маховского отражения из [15] (см. терминологию в [16]). Начнем с регулярного отражения. Число Маха падающей волны  $M = 2.05$ , угол наклона клина  $\alpha = 60^\circ$ . В начальный момент времени расчетная область заполнена покоящимся аргоном с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$  при начальных условиях  $\rho_0 = 0.323 \text{ кг/м}^3, p_0 = 20 \times 10^3 \text{ Па}, w_0 = 0$ .

Параметры за падающей УВ с числом Маха  $M$  восстанавливались с использованием соотношений Ренкина–Гюгонно на скачке:

$$\rho_M = \rho_0 \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}, \quad p_M = p_0 \left( \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right), \quad u_M = \frac{2c_0}{\gamma + 1} \frac{M^2 - 1}{M}. \quad (8)$$

Здесь  $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$  — скорость звука перед УВ. Для числа Маха 2.05 параметры за падающей УВ составляют  $\rho_M = 0.754 \text{ кг/м}^3, p_M = 100063 \text{ Па}, u_M = 376.0 \text{ м/с}$ .

Расчет проводился в единичном квадрате на расширенной сетке с числом ячеек  $1000 \times 1000$ .

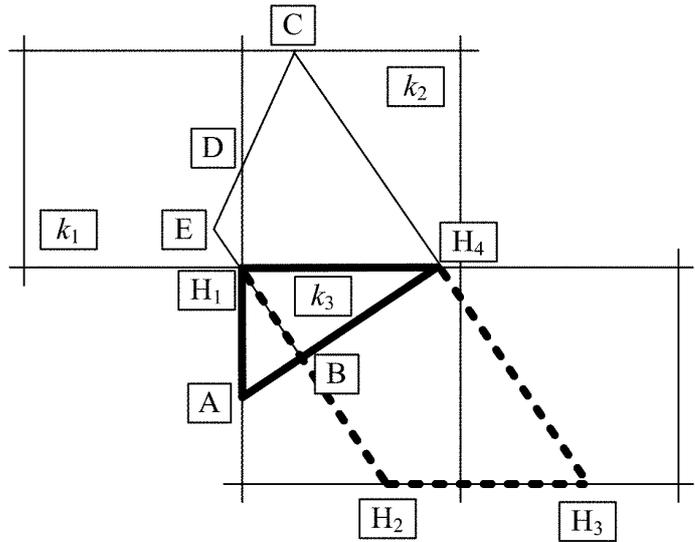


Рис. 4. К алгоритму определения параметров в h-ячейках

Рис. 5 показывает качественное соответствие рассчитанного распределения плотности за фронтом УВ экспериментальной картине. Здесь и далее на рис. 7 численные и экспериментальные распределения отражены относительно оси ординат и повернуты на угол  $\alpha$  против часовой стрелки по сравнению с исходной геометрией задачи, изображенной на рис. 1. На рис. 5б падающая волна обозначена буквой I, отраженная — буквой R. Можно отметить отсутствие каких-либо заметных особенностей, связанных с тем, что расчетная сетка не согласована с границей клина. Установлением данного факта тестирование методов из семейства “методов погруженной границы” часто завершается [6–9]. Вместе с тем, большой интерес представляет количественная оценка погрешности, которая вносится методом при сравнении с экспериментальными данными. В [15] представлены экспериментальные данные, которые хорошо подходят для проверки именно метода декартовых сеток — распределение плотности газа вдоль клина, т.е. там, где прежде всего сказываются любые неточности обработки границ расчетной области. Введем в рассмотрение координату  $\xi$  — расстояние вдоль стенки, начиная от текущего положения волны, а также параметр  $L$  — расстояние от текущего положения волны до основания клина (см. рис. 5б). Известно, что относительно координаты  $\xi/L$  профили газодинамических величин вдоль клина являются автомодельными, и, таким образом, появляется удобная возможность провести сравнение расчетных и экспериментальных данных вне зависимости от конкретного момента времени, в который берется численное решение.

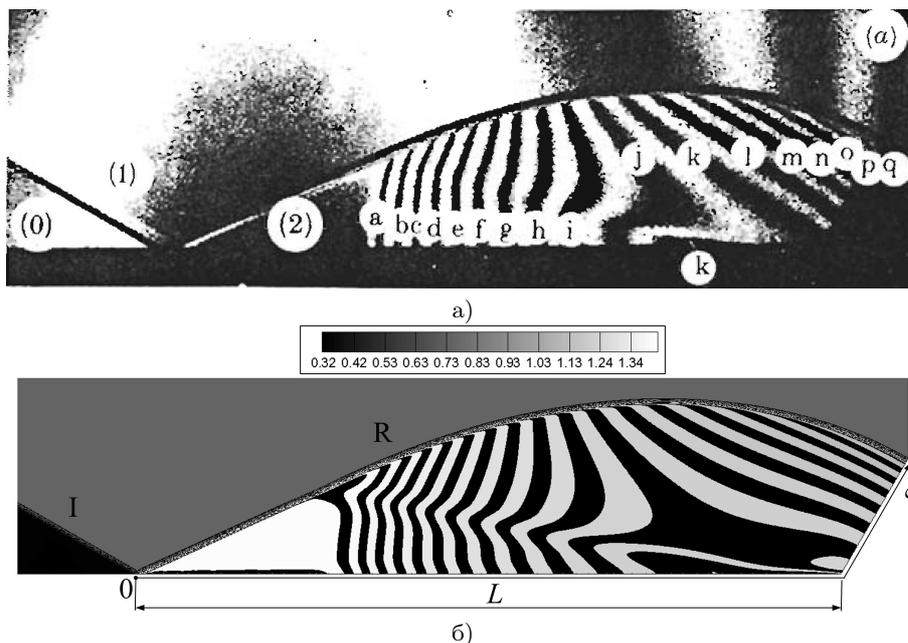


Рис. 5. Картина регулярного отражения: а) экспериментальный снимок из [15], полученный методом интерферометрии; б) пространственное распределение плотности газа в расчете авторов методом декартовых сеток (области между соседними изолиниями плотности закрашены черным цветом, шкала в  $\text{кг}/\text{м}^3$ )

Рис. 6. Распределение плотности газа вдоль поверхности клина в случае (а) регулярного отражения и (б) простого маховского отражения

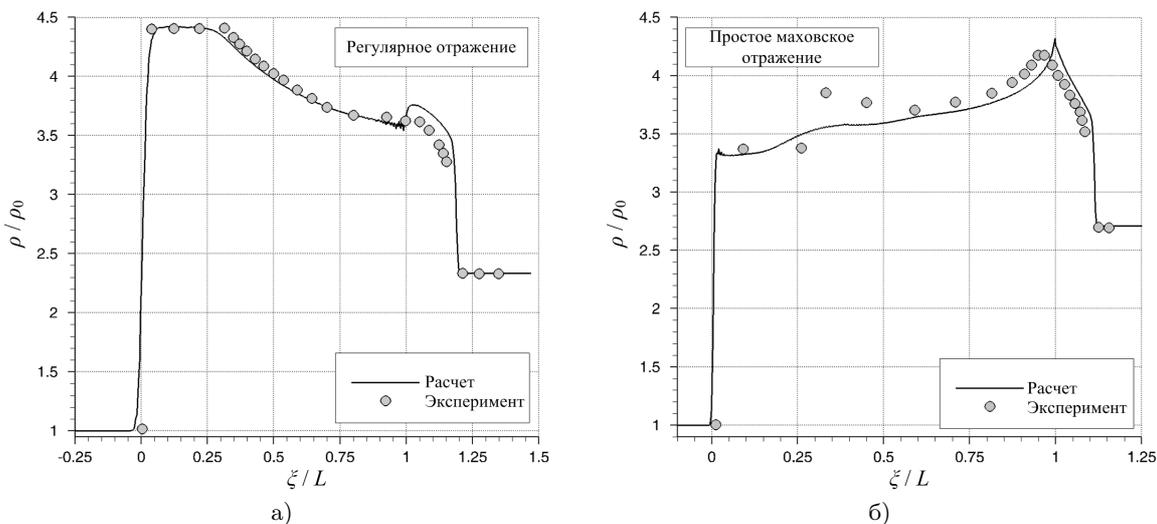


Рис. 6. Распределение плотности газа вдоль поверхности клина в случае (а) регулярного отражения и (б) простого маховского отражения

На рис. 6а приведено соответствующее сравнение для случая регулярного отражения. Наиболее за-

метные особенности численного решения наблюдаются в окрестности основания клина (пульсации с максимальной амплитудой около 1% от экспериментальных значений), а также при  $1 < \xi/L < 1.2$ . Отметим, что последний эффект, когда расчетная кривая при  $1 < \xi/L < 1.2$  лежит выше экспериментальных точек, наблюдается и в оригинальной статье [15], содержащей помимо экспериментальных данных расчетные результаты, причем в [15] использовался традиционный подход, когда расчетная сетка согласована с границами расчетной области, и другой численный метод второго порядка аппроксимации. Это дает основание полагать, что наблюдаемое расхождение (около 8%) связано с неточностью экспериментальных данных.

Перейдем к случаю простого маховского отражения. Число Маха падающей волны  $M = 2.03$ , угол наклона клина  $\alpha = 27^\circ$ .

В начальный момент времени расчетная область заполнена покоящимся воздухом с показателем адиабаты  $\gamma = 7/5$  при начальных условиях  $\rho_0 = 0.387 \text{ кг/м}^3$ ,  $p_0 = 33.3 \times 10^3 \text{ Па}$ ,  $w_0 = 0$ .

Используя формулы (8), получаем следующие значения параметров за падающей УВ:  $\rho_M = 1.049 \text{ кг/м}^3$ ,  $p_M = 153155 \text{ Па}$ , а также  $u_M = 442.7 \text{ м/с}$ .

Расчет проводился на расширенной сетке с числом ячеек  $1600 \times 960$  в прямоугольнике  $1.0 \text{ м} \times 0.6 \text{ м}$ .

Для простого маховского отражения ударно-волновая конфигурация характеризуется наличием тройной точки Т, в которой сходятся падающая волна I, отраженная волна R и ножка Маха М (см. рис. 7б). От тройной точки отходит контактный разрыв S, который отделяет газ, сжатый ножкой Маха, от газа, сжатого последовательно падающей и отраженной ударными волнами. Как можно видеть из сравнения рис. 7а и рис. 7б, как и для случая регулярного отражения, в расчете качественно верно воспроизводятся все основные элементы ударно-волновой структуры течения.

Рис. 6б иллюстрирует количественное сравнение распределения плотности газа вдоль клина в эксперименте и расчете простого маховского отражения. Сравнивая полученный результат также с расчетными данными из [15], можно сказать, что причина погрешности при  $0.3 < \xi/L < 0.55$ , вероятнее всего, связана с тем, что используемая в настоящей работе методика характеризуется первым порядком аппроксимации. При этом максимальное отклонение рассчитанных значений плотности вдоль клина от экспериментальных составляет около 8%.

**4.2. Взаимодействие ударной волны с цилиндром.** Перейдем к рассмотрению случая взаимодействия УВ с цилиндром. В [17] с помощью детальных расчетов в рамках как уравнений Эйлера, так и Навье–Стокса, проанализирована динамика процесса как на начальной стадии, так и после прохождения цилиндра лидирующей волной. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными [18].

Постановка задачи аналогична описанной в разделе 2. На цилиндр радиуса  $R = 0.1$  набегают УВ с числом Маха  $M = 1.3$ . В начальный момент времени в расчетной области находится покоящийся воздух при нормальных условиях.

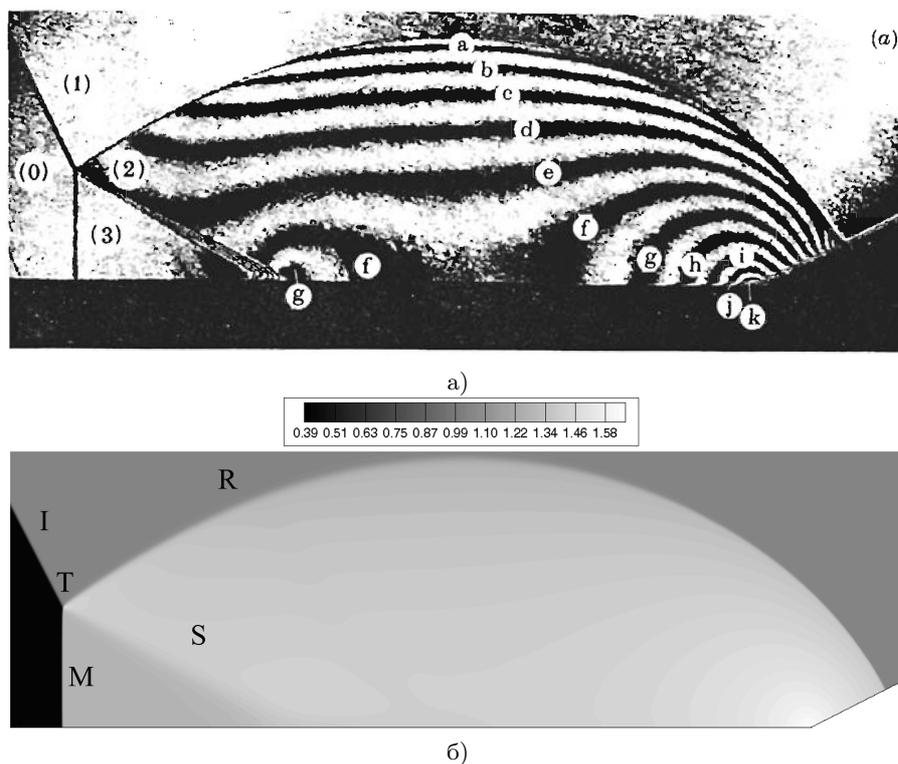


Рис. 7. Картина простого маховского отражения: а) экспериментальный снимок из [15], полученный методом интерферометрии; б) пространственное распределение плотности газа в расчете авторов методом декартовых сеток (шкала в  $\text{кг/м}^3$ )

Геометрические характеристики расчетной области представлены на рис. 8. Рассмотрение проводится в безразмерных величинах, в качестве безразмерного времени выступает  $t_r = \frac{tD}{R}$ , где  $D$  — скорость УВ. Расчет проводился на сетке  $1400 \times 1000$ .

На рис. 9 представлены расчетные результаты в момент времени  $t_r = 2.4$ . Ударно-волновая структура включает в себя лидирующую волну I, отраженную R и волну M, которая изначально являлась волной Маха и бежала по поверхности цилиндра (см. рис. 9а).

Количественное сравнение распределения давления вдоль поверхности цилиндра (см. рис. 9б) с результатами расчета из [17] демонстрирует совпадение в пределах погрешности в 1%, хотя расчеты в [17] выполнялись в рамках уравнений Навье–Стокса с разрешением пограничного слоя и динамической сеточной адаптацией. Полученный результат коррелирует с известным фактом, что при высоких числах Рейнольдса коэффициент сопротивления тела близок к постоянной величине, параметры потока соответствуют инерционному интервалу, когда силы вязкого трения пренебрежимо малы, и сила сопротивления в основном определяется распределением давления по поверхности тела [19]. Вместе с тем, и расчеты, выполненные в рамках данной работы, и расчеты [17] демонстрируют заметное (до 10% при  $125^\circ < \varphi < 150^\circ$ ) расхождение с опытными данными [18]. Получение идентичных расчетных результатов с использованием двух кардинально различающихся математических моделей и численных методов, вероятно, говорит о неточности экспериментальных данных в указанном диапазоне значений угла  $\varphi$ .

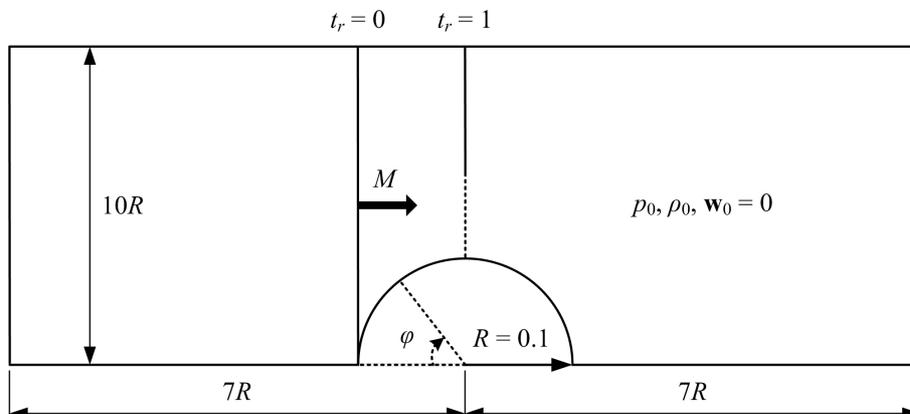


Рис. 8. Схематичная постановка задачи о взаимодействии УВ с цилиндром методом декартовых сеток

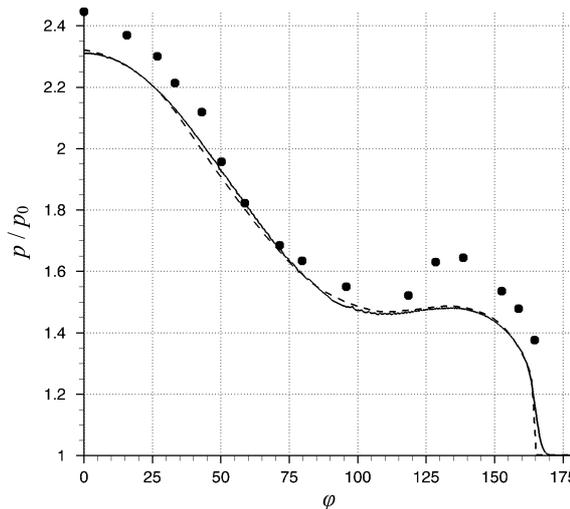
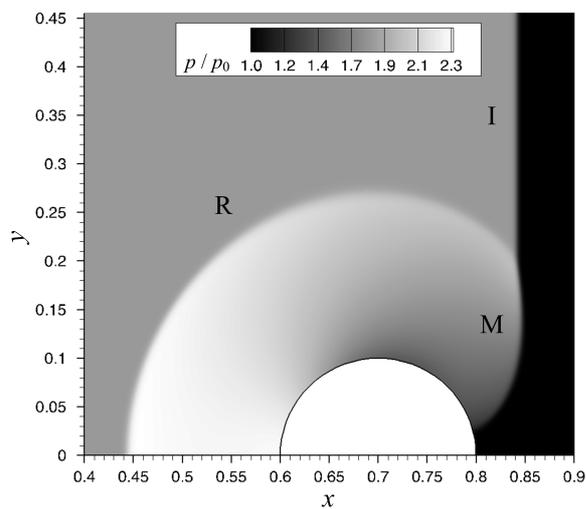


Рис. 9. Рассчитанное распределение давления при взаимодействии УВ с цилиндром (а); б) распределение давления на поверхности цилиндра (точки — эксперимент [18], число Рейнольдса  $7 \times 10^6$ ; сплошная линия — расчет авторов методом декартовых сеток; пунктирная линия — расчет [17], решение уравнений Навье–Стокса с использованием динамически адаптирующихся сеток).  
Момент времени  $t_r = 2.4$

**5. Заключение.** Разработан вычислительный алгоритм метода декартовых сеток для интегрирования двумерных уравнений газовой динамики в областях с криволинейными границами, основанный на идее использования h-ячеек [7–9]. Вычислительный алгоритм включает в себя следующие стадии.

1. Построение расчетной сетки в расширенной расчетной области и разделение всех ячеек на внутренние, пересекаемые и внешние, а ребер — на регулярные и усеченные.
2. Использование единой явной конечно-объемной формулы численного интегрирования определяющей системы уравнений в усеченных и регулярных ячейках.
3. Расчет потоков через регулярные ребра методом Годунова.
4. Расчет потоков через усеченные ребра с использованием дополнительного построения специальных h-ячеек и метода повернутых сеток.

Все стадии алгоритма детально описаны.

Вычислительный алгоритм и его программная реализация протестированы на ряде задач теории ударных волн. Для задачи об отражении ударной волны от клина в обоих случаях — регулярного и простого маховского отражения — получены качественно верные ударно-волновые картины течения. Различия расчетных и экспериментальных значений плотности газа вдоль клина в обоих случаях не превышает 8%. В задаче о взаимодействии ударной волны с цилиндром получено совпадение в распределении давления по поверхности цилиндра в пределах 1% по сравнению с детальными расчетами в рамках уравнений Навье–Стокса.

Как отмечается в разделе 3.2, описанный вычислительный алгоритм характеризуется теоретическим первым порядком аппроксимации по времени и пространственным переменным на гладких решениях. Использование монотонного, физически корректного численного потока невысокого порядка аппроксимации, каким является поток Годунова, является продуктивным при исследовании ряда задач инициирования и погасания детонационных процессов в каналах сложной формы [20]. Вместе с тем, безусловно, при исследовании длительного распространения ударных и детонационных волн требуется использовать высокоточные методики, в том числе минимизирующие эффекты сеточного “размазывания” лидирующего скачка [21]. В [7–9] содержатся подходы к повышению порядка аппроксимации методики. Для повышения порядка аппроксимации по времени предлагается использовать методы Рунге–Кутты, по пространственным переменным — реконструкцию сеточных функций типа MUSCL. Отметим, что как и в случае построения алгоритма первого порядка аппроксимации, повышение порядка в регулярной части ячеек является сегодня хорошо отработанной процедурой, см., например, [11], и трудности связаны только со специальным рассмотрением усеченных ячеек. Устранение недостатков вычислительного алгоритма в связи с его низким порядком аппроксимации является предметом дальнейшей работы.

Используемая конечно-объемная идеология построения вычислительного алгоритма позволяет расширить его для возможности описания течений с химическими реакциями с использованием метода расщепления по физическим процессам по аналогии с [1].

Исследование выполнено частично при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы в рамках научного проекта № 15–31–70004 “мол\_а\_мос”, а также частично в рамках гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (договор № 14.W01.16.6756-МК).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенов И.В., Уткин П.С., Марков В.В. Численное моделирование двумерных детонационных течений на многопроцессорной вычислительной технике // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**. 119–128.
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
3. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods // Annual Review of Fluid Mechanics. 2005. **37**. 239–261.
4. Gorsse Y., Iollo A., Telib H., Weynans L. A simple second order Cartesian scheme for compressible Euler flows // Journal of Computational Physics. 2012. **231**, N 23. 7780–7794.
5. Максимов Ф.А. Сверхзвуковое обтекание системы тел // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. **5**, № 6. 969–980.
6. Меньшов И.С., Корнев М.А. Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // Математическое моделирование. 2014. **26**, № 5. 99–112.
7. Berger M.J., Helzel C., LeVeque R.J. H-box methods for the approximation of hyperbolic conservation laws on irregular grids // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2003. **41**, N 3. 893–918.
8. Helzel C., Berger M.J., LeVeque R.J. A high-resolution rotated grid method for conservation laws with embedded geometries // SIAM Journal on Scientific Computing. 2005. **25**, N 3. 785–809.
9. Berger M., Helzel C. A simplified h-box method for embedded boundary grids // SIAM Journal on Scientific Computing. 2012. **34**, N 2. 861–888.

10. *Barth T., Ohlberger M.* Finite volume methods: foundation and analysis // Encyclopedia of Computational Mechanics. Vol. 1. Hoboken: Wiley, 2004. 439–470.
11. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Heidelberg: Springer, 2009.
12. *Sutherland I.E., Hodgman G.W.* Reentrant polygon clipping // Communications of the ACM. 1974. **17**, N 1. 32–42.
13. *Levy D.W., Powell K.G., van Leer B.* Use of a rotated Riemann solver for the two-dimensional Euler equations // Journal of Computational Physics. 1993. **106**, N 1. 201–214.
14. *Ren Y.-X.* A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solvers // Computers & Fluids. 2003. **32**, N 10. 1379–1403.
15. *Glaz H.M., Colella P., Glass I.I., Deschambault R.L.* A numerical study of oblique shock-wave reflections with experimental comparisons // Proceedings of the Royal Society of London A. 1985. **398**. 117–140.
16. *Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г.* Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977.
17. *Drikakis D., Ofengeim D., Timofeev E., Voionovich P.* Computation of non-stationary shock-wave/cylinder interaction using adaptive-grid methods // Journal of Fluid and Structures. 1997. **11**, N 6. 665–692.
18. *Takayama K., Itoh K.* Unsteady drag over cylinders and aerofoils in transonic shock tube flows // Proceedings of the 15th International Symposium on Shock Waves and Shock Tubes. Stanford: Stanford Univ. Press, 1985. 439–485.
19. *Multiphase flow handbook* / Ed. by C.T. Crowe. Boca Raton: CRC Press, 2005.
20. *Левин В.А., Марков В.В., Журавская Т.А., Осинкин С.Ф.* Нелинейные волновые процессы при инициировании и распространении газовой детонации // Труды МИАН. 2005. **251**. 192–205.
21. *Лопато А.И., Уткин П.С.* Детальное математическое моделирование пульсирующей детонационной волны в системе координат, связанной с лидирующим скачком // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. **56**, № 5. 856–868.

Поступила в редакцию  
04.08.2016

---

### A Cartesian Grid Method for the Numerical Modeling of Shock Wave Propagation in Domains of Complex Shape

D. A. Sidorenko<sup>1</sup> and P. S. Utkin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institute for Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences; ulitsa 2nd Brestskaya 19/18, Moscow, 123056, Russia; Junior Scientist, e-mail: sidr1234@mail.ru*

<sup>2</sup> *Institute for Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences; ulitsa 2nd Brestskaya 19/18, Moscow, 123056, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: pavel\_utk@mail.ru*

Received August 8, 2016

**Abstract:** This paper is devoted to the development, software implementation, and quantitative estimation of a numerical algorithm based on the Cartesian grid method for the mathematical modeling of shock wave propagation in domains of complex shape with curvilinear boundaries. A detailed description of an algorithm based on the method of “h-boxes” is given. The efficiency of the algorithm is analyzed on the problems of regular and single Mach reflection of a shock wave from a wedge as well as on the problem of shock wave/cylinder interaction.

**Keywords:** mathematical modeling, gas dynamics, shock wave, Godunov method, Cartesian grid method.

#### References

1. I. V. Semenov, P. S. Utkin, and V. V. Markov, “Numerical Modeling of Two-Dimensional Flows with Detonation Waves Using High Performance Computing,” *Vychisl. Metody Programm.* **9**, 119–128 (2008).
2. S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, M. Ya. Ivanov, et al., *Numerical Solution of Multidimensional Gas Dynamics Problems* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
3. R. Mittal and G. Iaccarino, “Immersed Boundary Methods,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2005. **37**, 239–261 (2005).
4. Y. Gorsse, A. Iollo, H. Telib, and L. Weynans, “A Simple Second Order Cartesian Scheme for Compressible Euler Flows,” *J. Comput. Phys.* **231** (23), 7780–7794 (2012).
5. F. A. Maksimov, “Supersonic Flow of System of Bodies,” *Komp’yut. Issled. Model.* **5** (6), 969–980 (2013).

6. I. S. Menshov and M. A. Kornev, “Free-Boundary Method for the Numerical Solution of Gas-Dynamic Equations in Domains with Varying Geometry,” *Mat. Model.* **26** (5), 99–112 (2014) [*Math. Models Comput. Simul.* **6** (6), 612–621 (2014)].
7. M. J. Berger, C. Helzel, R. J. LeVeque, “*h*-box Methods for the Approximation of Hyperbolic Conservation Laws on Irregular Grids,” *SIAM J. Numer. Anal.* **41** (3), 893–918 (2003).
8. C. Helzel, M. J. Berger, and R. J. LeVeque, “A High-Resolution Rotated Grid Method for Conservation Laws with Embedded Geometries,” *SIAM J. Sci. Comput.* **25** (3), 785–809 (2005).
9. M. Berger and C. Helzel, “A Simplified *h*-box Method for Embedded Boundary Grids,” *SIAM J. Sci. Comput.* **34** (2), 861–888.
10. T. Barth and M. Ohlberger, “Finite Volume Methods: Foundation and Analysis,” in *Encyclopedia of Computational Mechanics* (Wiley, Hoboken, 2004), Vol. 1, pp. 439–470.
11. E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction* (Springer, Heidelberg, 2009).
12. I. E. Sutherland and G. W. Hodgman, “Reentrant Polygon Clipping,” *Commun. ACM* **17** (1), 32–42 (1974).
13. D. W. Levy, K. G. Powell, and B. van Leer, “Use of a Rotated Riemann Solver for the Two-Dimensional Euler Equations,” *J. Comput. Phys.* **106** (2), 201–214 (1993).
14. Y.-X. Ren, “A Robust Shock-Capturing Scheme Based on Rotated Riemann Solvers,” *Comput. Fluids* **32** (10), 1379–1403 (2003).
15. H. M. Glaz, P. Colella, I. I. Glass, and R. L. Deschambault, “A Numerical Study of Oblique Shock-Wave Reflections with Experimental Comparisons,” *Proc. R. Soc. Lond. A* **398** (1814), 117–140 (1985).
16. T. V. Bazhenova and L. G. Gvozdeva, *Unsteady Interaction of Shock Waves* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].
17. D. Drikakis, D. Ofengeim, E. Timofeev, and P. Voionovich, “Computation of Non-Stationary Shock-Wave/Cylinder Interaction Using Adaptive-Grid Methods,” *J. Fluid Struct.* **11** (6), 665–692 (1997).
18. K. Takayama and K. Itoh, “Unsteady Drag over Cylinders and Aerofoils in Transonic Shock Tube Flows,” in *Proc. 15th Int. Symp. on Shock Waves and Shock Tubes, Berkeley, USA, July 28–August 2, 1985* (Stanford Univ. Press, Stanford, California, 1985), 439–485.
19. C. T. Crowe (Ed.), *Multiphase Flow Handbook* (CRC Press, Boca Raton, 2005).
20. V. A. Levin, V. V. Markov, T. A. Zhuravskaya, and S. F. Osinkin, “Nonlinear Wave Processes That Occur during the Initiation and Propagation of Gaseous Detonation,” *Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova, Ross. Akad. Nauk* **251**, 200–214 (2005) [*Proc. Steklov Inst. Math.* **251**, 192–205 (2005)].
21. A. I. Lopato and P. S. Utkin, “Detailed Simulation of the Pulsating Detonation Wave in the Shock-Attached Frame,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **56** (5), 856–868 (2016) [*Comput. Math. Math. Phys.* **56** (5), 841–853 (2016)].