

УДК 523.4-52; 573.552

doi 10.26089/NumMet.v17r332

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ОБРАЗОВАНИЯ СГУСТКОВ ВЕЩЕСТВА В МАССИВНЫХ ОКОЛОЗВЕЗДНЫХ ДИСКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ

О. П. Стояновская<sup>1</sup>

Анализируются и систематизируются результаты численного моделирования развития неустойчивости и формирования самогравитирующих сгустков вещества (зародышей протопланет) в тонком газовом околозвездном диске. Численные эксперименты проводятся по модели диска, основанной на комбинации гидродинамики сглаженных частиц (SPH) и метода Хокни для решения уравнения Пуассона на равномерной декартовой сетке. Показано, что процесс образования сгущений может быть охарактеризован средней скоростью нарастания суммарной массы сгустков во всем диске, которая значительно зависит от физических параметров диска и незначительно зависит от параметров численной модели. Подтверждено, что существует диапазон параметров диска, для которого появление или отсутствие сгустков в диске зависит от используемого разрешения и деталей численного алгоритма, в то время как за пределами этого диапазона такая зависимость отсутствует. Показано, что при комбинировании метода SPH с сеточным методом для вычисления гравитационной силы необходимо, чтобы гидродинамический радиус сглаживания не превосходил длину ячейки сетки, в противном случае в решении возникают выраженные счетные эффекты: диск приобретает квадратную форму и появляется искусственное разбиение модельных частиц на группы из-за развития парной (клампинговой) неустойчивости в SPH.

**Ключевые слова:** околозвездный диск, формирование структур, гидродинамика сглаженных частиц, гравитационная газовая динамика.

**1. Введение.** Численное моделирование динамики околозвездных дисков является одним из основных методов исследования процесса образования планет. Результаты многих независимых групп исследователей, которые численно решают систему уравнений гравитационной газовой динамики в двумерной и трехмерной постановках (например, [1–7]), показывают, что в плотных околозвездных дисках (с характерным размером от сотни до несколько сотен астрономических единиц) происходит образование крупных сгустков высокой плотности (радиуса до десяти астрономических единиц), которые поддерживаются собственным гравитационным полем. Примеры сформировавшихся фрагментов приведены ниже на рис. 1. В зависимости от условий диска и характеристик образовавшегося сгустка он может стать звездой-компаньоном, зародышем газовой или твердой планеты или, напротив, развалиться под действием приливных сил, упасть на протозвезду или покинуть диск, получив большую угловую скорость в результате обмена угловым моментом с другим комком.

В настоящее время численное моделирование образования и динамики фрагментов в диске позволяет конструировать проверяемые следствия из теории, которая связывает образование планет с развитием гравитационной неустойчивости околозвездного диска. При этом до настоящего момента (например, [8, 9]) в литературе по астрофизике обсуждается “проблема сходимости” при моделировании массивных фрагментирующих дисков. Опыт показывает, что при расчетах с одними и теми же физическими параметрами задачи время появления сгустков, их масса, траектории движения и другие характеристики каждого отдельного объекта оказываются зависящими от численных параметров: деталей алгоритма и используемого численного разрешения. Суть проблемы в этом случае — в чем смысл получаемых решений, есть ли характеристики процесса развития неустойчивости, которые не зависят от деталей алгоритма и разрешения. Более того, несколько авторов [9, 10] описывают расчеты дисков, в которых сам факт появления (или не появления) фрагментов зависит от используемого метода и численного разрешения. Вследствие этого возникает вопрос — не является ли вообще воспроизводимое в расчетах образование сгущений в диске счетным артефактом, т.е. свойством численной, но не исходной математической модели. Поэтому цель

<sup>1</sup> Новосибирский государственный университет, факультет естественных наук, ул. Пирогова, д. 2, 630090, Новосибирск; науч. сотр., e-mail: stop@catalysis.ru

настоящей статьи — выяснить, для каких параметров диска получаемое решение качественно зависит от параметров численной модели (появляются или не появляются фрагменты), и предложить характеристику процесса образования сгустков в диске, которая являлась бы функцией параметров задачи и слабо зависела бы от параметров численной модели. Отметим, что наша работа главным образом систематизирует большую группу расчетов и проверяет некоторые гипотезы относительно получаемых решений, тогда как вопросы корректности поставленной задачи, возможности и механизмы возникновения стохастичности в работе не рассматриваются.

Краткое описание математической и численной модели, которая использовалась для расчета образования сгустков в околозвездном диске, приведено в разделе 2. Для достижения цели статьи мы приводим результаты вычислительных экспериментов (раздел 3), в которых варьируются численное разрешение и физические параметры модели. В разделе 4 мы описываем способ сравнения результатов моделирования фрагментации, где в качестве характеристики процесса предлагаем использовать среднюю скорость нарастания суммарной массы сгущений. В разделе 5 мы изучаем условия применимости нашей схемы и определяем случаи, когда получаемые решения значительно искажаются численными эффектами. Основные результаты работы представлены в разделе 6.

**2. Математическая и численная модель массивного газового околозвездного диска.** Модель тонкого околозвездного диска включает в себя уравнения газовой динамики для поверхностной плотности и трехмерное уравнение для самосогласованного гравитационного поля:

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho dz; \quad p^* = \int_{-\infty}^{+\infty} p dz,$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Sigma \mathbf{v}) = 0, \quad \Sigma \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Sigma(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p^* - \Sigma \nabla \Phi,$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) S^* = 0, \quad p^* = T^* \Sigma.$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость газа в плоскости диска;  $p^*$  — поверхностное давление газа;  $\gamma^*$  — эффективный показатель политропы для квазитрехмерного случая, связанный с показателем политропы  $\gamma$  соотношением  $\gamma^* = 3 - \frac{2}{\gamma}$ ;  $T^* = \frac{p^*}{\Sigma}$ ,  $S^* = \ln \frac{T^*}{\Sigma^{\gamma^*-1}}$  — производные величины, аналогичные температуре и энтропии газа;  $\mathbf{a} = -\nabla \Phi$ ,  $\mathbf{a}$  — ускорение частиц во внешнем и самосогласованном поле;  $\Phi$  — гравитационный потенциал, который представляет собой сумму потенциала неподвижного центрального тела и потенциала диска;  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ ;  $\Phi_1 = -\frac{M_c}{r}$ ;  $M_c$  — масса центрального тела;  $\Phi_2$  — потенциал самосогласованного гравитационного поля, который определяется как решение уравнения Пуассона  $\Delta \Phi_2 = 4\pi\rho$ ,  $\Phi_2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ .

Уравнения записаны в безразмерных переменных. Базовыми размерными величинами являются  $G$  — гравитационная постоянная,  $R_0 = 100 \text{ AE} = 1.5 \times 10^{13} \text{ м}$ ,  $M_{\text{Solar}} = 2 \times 10^{30} \text{ кг}$  — характерный размер и масса системы.

Разработанный численный алгоритм решения системы уравнений общего вида основан на методе дробных шагов с расщеплением по физическим процессам, подробное описание которого приведено в [11]. На каждом временном шаге решается система уравнений газовой динамики и вычисляется самосогласованный гравитационный потенциал диска  $\Phi_2$ . Уравнения газовой динамики решаются методом Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), для которого применялся “операционный” подход с распараллеливанием процедуры вычисления сумм и пересылкой рассчитанных значений массивов. Для вычисления гравитационного потенциала используется метод Хокни–Джеймса решения уравнения Пуассона на декартовой сетке. Интерполяция плотности, определенной в SPH-частицах, на регулярную сетку выполняется с использованием ядра PIC (Particle-in-Cell).

В начальный момент времени задавались внешняя и внутренняя границы диска, его масса (по которой определялась поверхностная плотность) и температура, а также масса центрального тела. Радиальная скорость газа задавалась равной нулю, а угловая скорость задавалась таким образом, чтобы обеспечить равновесную начальную конфигурацию, т.е. так, чтобы центробежная и центростремительная силы и градиент давления уравнивали друг друга:  $\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ ,  $v_r = 0$ .

Мы моделировали динамику диска протяженностью от 10 до 100 AE вокруг протозвезды с массой, равной  $0.8 M_{\text{Solar}}$ . Расчетная область имеет размер  $400 \times 400 \text{ AE}^2$ , т.е. в 2 раза больший, чем начальный диаметр диска. Мы использовали начальное распределение плотности и температуры диска, полученное в [12] в результате численного моделирования коллапса молекулярного облака. Поверхностная плотность

была обратно пропорциональна радиальной координате. Начальная температура задавалась обратно пропорциональной квадратному корню от радиальной координаты и равной 90 К на радиусе 10 AU и 30 К на радиусе 100 AU. Рассматривались диски с массой от 0.1 до 0.4  $M_{\text{Solar}}$ .

В настоящей статье использованы стандартные параметры численной модели — 160 000 SPH-частиц,  $1024 \times 1024$  ячеек сетки, параметры модели с увеличенным разрешением — 640 000 SPH-частиц,  $2048 \times 2048$  ячеек сетки, параметры модели с уменьшенным разрешением — 40 000 SPH-частиц,  $512 \times 512$  ячеек сетки. В большинстве расчетов мы используем шаг по времени равный 0.03 года.

SPH-частицы, приближающиеся к центральному телу на расстояние меньшее, чем  $R_{\text{cell}}$ , считаются упавшими на нее и передавшими ей свою массу. Во избежание использования слишком мелких шагов по времени мы устанавливаем радиус поглощающей ячейки равным  $R_{\text{cell}} = 10 \text{ AE}$ .

**3. Результаты вычислительных экспериментов. Появление фрагментов в диске.** В этом разделе мы приводим результаты расчетов группы дисков разной массы, для каждой модели варьируя численное разрешение и детали реализации алгоритма. Цель проводимых экспериментов — показать, что появление или отсутствие фрагментов в нашей модели диска согласуется с результатами линейного анализа устойчивости системы уравнений гравитационной газовой динамики.

Дисперсионное соотношение для рассматриваемой модели тонкого диска выводится в ряде работ (см., например, [13]):  $\omega^2 = c_s^2 k^2 + \kappa^2 - 2\pi G \Sigma |k|$ , где  $\kappa$  — эпициклическая частота и  $c_s$  — скорость звука. Для кеплеровского диска  $\kappa = \Omega = \sqrt{M_c r^{-3}}$ .

Если диск не вращается, то  $\kappa = 0$  и  $\omega^2 = c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma |k|$ . Из этого соотношения получается длина Джинса  $\lambda_J$ , характеризующая минимальный размер возмущения в среде плотности  $\Sigma$ , которое будет нарастать под действием собственного гравитационного поля:  $k_J = \frac{2\pi}{\lambda_J} = \frac{2\pi G \Sigma}{c_s^2}$ ,  $\lambda_J = \frac{c_s^2}{G \Sigma}$ .

Для вращающегося диска можно получить условие Тоомре глобальной устойчивости из уравнений  $\frac{d\omega^2}{dk} = 0$ ,  $\omega^2 = 0$ :  $k_T = \frac{\pi G \Sigma}{c_s^2}$ ;  $\Lambda_T = \frac{2\pi}{k_T} = 2\lambda_J$ .

Путем подстановки найденного значения  $k_T$  в  $\omega^2 = 0$  мы получаем критическое значение Тоомре параметра  $Q = \frac{\Omega c_s}{\pi G \Sigma} = 1$ . Заметим, что  $Q > 1$  — необходимое условие устойчивости тонкого диска к росту радиальных возмущений. В этой связи устойчивость диска в целом принято характеризовать в терминах числа Тоомре  $Q$  по его начальному распределению поверхностной плотности  $\Sigma$  и температуры ( $c_s^2 = \gamma T$ ). В результате расчетов многими авторами (см., например, обзор [14]) определены эмпирические граничные значения, с помощью которых предсказывают, могут ли в диске возникнуть спиральные рукава или фрагменты: если  $Q < 1$  для значительной части диска, то в диске ожидается появление спиральных рукавов повышенной плотности, в которых тоже могут возникнуть отдельные самогравитирующие сгустки. Если  $Q > 2$  для всего диска, то диск устойчив как к появлению спиральных рукавов, так и сгустков. При  $Q \approx 1.5$  для значительной части диска в нем ожидается появление спиральных рукавов, но не отдельных сгустков. Важно отметить, что начальное распределение числа Тоомре от радиуса не является критерием появления спиралей или сгустков в диске в строгом смысле этого слова, но позволяет предсказать, как будет меняться динамика системы при изменении массы диска, его температуры, а также массы центрального тела.

Минимальный линейный размер появляющегося фрагмента определяется длиной Джинса. Эта величина является локальной, т.е. характеризует возможность появления фрагмента в конкретной точке пространства. Трулав с соавторами [15] сформулировал требование к численному разрешению для динамики фрагментирующегося диска в терминах длины Джинса:  $\lambda_J > 4h_{\text{grid}}$ , если решение уравнений газовой динамики проводится на сетке. Кроме того, важно подчеркнуть, что образование сгустка, диаметр которого меньше длины Джинса в точке появления фрагмента, должно расцениваться как проявление численной неустойчивости, а не физического процесса.

Мы провели две группы расчетов дисков массы от 0.1 до 0.4 массы Солнца. Для диска массы 0.1  $M_{\text{Solar}}$  начальное значение числа Тоомре  $Q > 1.5$  для всего диска, поэтому в таком диске ожидаем появление спиральных рукавов, но не фрагментов. Для диска массы 0.25  $M_{\text{Solar}}$  выполнено неравенство  $Q < 1$  для внешней части диска  $R > 60 \text{ AE}$ . Для диска массы 0.4  $M_{\text{Solar}}$  имеем  $Q < 1$  для большей части диска  $R > 40 \text{ AE}$ , поэтому в таком диске ожидаем быстрое появление спиральных рукавов, распадающихся на отдельные фрагменты. Интегрирование проводилось в течение 6 оборотов внешней части диска (6000 лет).

В первой группе расчетов задавалось искусственное возмущение угловой скорости газа, которое приводило к быстрому формированию плотного кольца в диске. Полный список экспериментов первой группы представлен в табл. 1, где в названии модели первое число обозначает массу диска, вторая буква — способ

Таблица 1

Список вычислительных экспериментов для моделей, в которых была задана неравновесная угловая скорость, приводившая к появлению кольцевого возмущения плотности

Масса диска (в массах Солнца)	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4
640 000 SPH, адаптивный радиус сглаживания	1AI	2AI	3AI	4AI	5AI	6AI
160 000 SPH, адаптивный радиус сглаживания	1AS	2AS	3AS	4AS	5AS	6AS
фиксированный радиус сглаживания $h_{\text{SPH}} = 0.5h_{\text{grid}}$	1CS	2CS	3CS	4CS	5CS	6CS
40 000 SPH, адаптивный радиус сглаживания	1AD	2AD	3AD	4AD	5AD	5AD

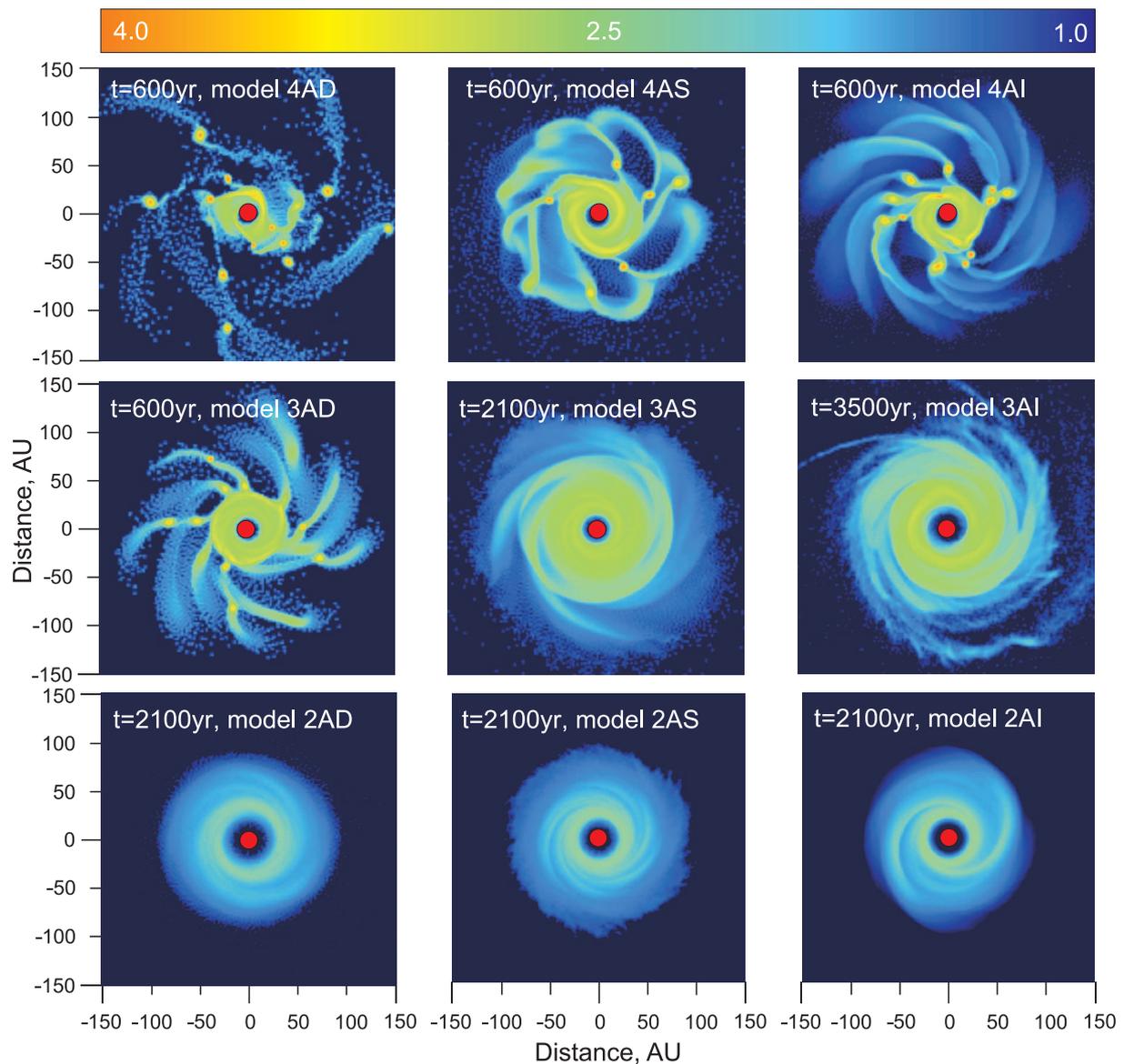


Рис. 1. Логарифм поверхностной плотности газа для моделей с разной массой диска и с разным количеством SPH-частиц. Верхний ряд — масса диска  $0.25 M_{\text{Solar}}$ , средний —  $0.2 M_{\text{Solar}}$  и нижний —  $0.15 M_{\text{Solar}}$ . Первый столбец — 40 000, второй — 160 000, третий — 640 000 SPH-частиц

определения радиуса сглаживания (A-адаптивный, C-постоянный), третья — количество используемых модельных частиц (40 000 — буква D, уменьшенное разрешение, 160 000 — буква S, стандартное разрешение, 640 000 — буква I, увеличенное разрешение). Название модели выделяется полужирным шрифтом, если в расчете получались фрагменты. Во всех расчетах первой группы использовалась декартова сетка

с  $512 \times 512$  ячеек на всю расчетную область. При использовании фиксированного радиуса сглаживания (строка 3 табл. 1) мы полагали  $h_{\text{SPH}} = 0.5h_{\text{grid}}$ . Адаптивный радиус сглаживания (строки 1, 2 и 4 табл. 1) определялся по формуле  $h_i = 1.2 \sqrt{\frac{m_i}{10^{-3} + \Sigma_i}}$ , где  $\Sigma_i$  — значение поверхностной плотности частицы  $i$ , взятое с предыдущего временного шага. Масса центрального тела составляет 0.8 массы Солнца.

На рис. 1 представлен логарифм поверхностной плотности газа для моделей с массой диска  $0.25 M_{\text{Solar}}$  (верхний ряд),  $0.2 M_{\text{Solar}}$  (средний ряд) и  $0.15 M_{\text{Solar}}$  (нижний ряд). В первом столбце приведены расчеты для 40 000, во втором для 160 000, в третьем для 640 000 SPH-частиц. Видно, что в диске массы  $0.25 M_{\text{Solar}}$  появляются фрагменты при использовании любого численного разрешения, а в диске массы  $0.15 M_{\text{Solar}}$  фрагменты отсутствуют независимо от того, какое количество модельных частиц используется. Это согласуется с результатами линейного анализа устойчивости: в дисках, масса которых больше пороговой (при фиксированном значении температуры, которую мы используем во всех расчетах), должно иметь место появление фрагментов. Эта закономерность видна из табл. 1: диски массы большей, чем  $0.25 M_{\text{Solar}}$ , фрагментируют независимо от численного разрешения, а диски, масса которых меньше  $0.15 M_{\text{Solar}}$ , — не фрагментируют. Из табл. 1 также следует, что только для модели с массой диска  $0.2 M_{\text{Solar}}$ , которая лежит на границе между “фрагментирующими” и “нефрагментирующими” дисками, исход моделирования зависит от используемых численных параметров. Из рис. 1 видно, что линейный размер образовавшихся сгущений в модели 3AD составляет 6–10 АЕ. Отметим, что минимальная длина Джинса до начала фрагментации в этой модели составляла 6 АЕ и, следовательно, на нее приходилось не менее 7 ячеек декартовой сетки. Это означает, что полученные результаты нельзя объяснить недостаточным численным разрешением, используемым в этом расчете.

Полученная “расходимость” в результатах моделирования согласуется с ситуацией, описанной, например, в [9] (см. рис. 15) и в [10], где тоже показано, что в переходной области между фрагментирующими и “нефрагментирующими” дисками динамический исход может зависеть от используемых численных параметров. Важно отметить, что как в наших расчетах, так и в работах других авторов эта зависимость от численных параметров проявляется себя только в определенной области параметров диска (так называемой “переходной”), а за ее пределами отсутствует.

Таблица 2

Список вычислительных экспериментов для моделей с равновесной угловой скоростью

Масса диска (в массах Солнца)	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4
640 000 SPH, постоянный радиус сглаживания, сетка $2048 \times 2048$	1CI2048	2CI2048	3CI2048	<b>4CI2048</b>	<b>5CI2048</b>	
160 000 SPH, постоянный радиус сглаживания, сетка $1024 \times 1024$	1CS1024	2CS1024	3CS1024	<b>4CS1024</b>	<b>5CS1024</b>	<b>6CS1024</b>
40 000 SPH, постоянный радиус сглаживания, сетка $512 \times 512$	1CD512	2CD512	3CD512	<b>4CD512</b>	<b>5CD512</b>	<b>6CD512</b>
160 000 SPH, адаптивный радиус сглаживания, сетка $1024 \times 1024$			3AS1024	4AS1024	<b>5AS1024</b>	<b>6AS1024</b>
640 000 SPH, адаптивный радиус сглаживания, сетка $2048 \times 2048$			3AI2048	4AI2048		

Во второй группе расчетов задавалась равновесная угловая скорость, поэтому структуры формировались следующим образом: сначала в диске появлялись спиральные рукава, которые затем (в случае более массивных дисков) разваливались на отдельные фрагменты. Этот сценарий формирования фрагментов совпадает с работами других авторов, например [9]. Результаты расчетов систематизированы в табл. 2. Названия моделей формировались по тому же принципу, что и в первой группе расчетов, но дополнялись числом — количеством используемых ячеек декартовой сетки по каждому из направлений. При использовании фиксированного радиуса сглаживания во второй группе расчетов мы полагали  $h_{\text{SPH}} = h_{\text{grid}}$ . Адаптивный радиус сглаживания определялся по той же формуле, что и для расчетов первой группы. Видно, что для моделей второй группы справедлива та же закономерность, которая проявила себя в первой группе: для дисков, масса которых меньше либо равна  $0.2 M_{\text{Solar}}$ , фрагментация отсутствует; для дисков, масса которых больше либо равна  $0.3 M_{\text{Solar}}$ , фрагменты формируются независимо от того, какие

численные параметры используются в расчетах; диск массы  $0.25 M_{\text{Solar}}$  представляет собой переходный режим, в котором исход моделирования зависит от параметров численной модели. Полуужирным шрифтом выделены названия моделей, для которых в диске появлялись фрагменты. Масса центрального тела составляет 0.8 массы Солнца.

Сравнивая результаты, представленные в табл. 1 и 2, мы видим, что порог гарантированного появления фрагментов в диске сдвигается в сторону уменьшения массы диска (от  $0.3 M_{\text{Solar}}$  в расчетах второй группы до  $0.25 M_{\text{Solar}}$  в расчетах первой группы), если в диске задается дополнительное возмущение. Это совпадает с результатами работы [16], в которой показано существование “индуцированной фрагментации”: невозмущенные диски не фрагментировались, но диски с теми же характеристиками, в которых задавалось дополнительное возмущение плотности (в виде гравитационного потенциала пролетающего мимо массивного тела), разваливались на отдельные фрагменты.

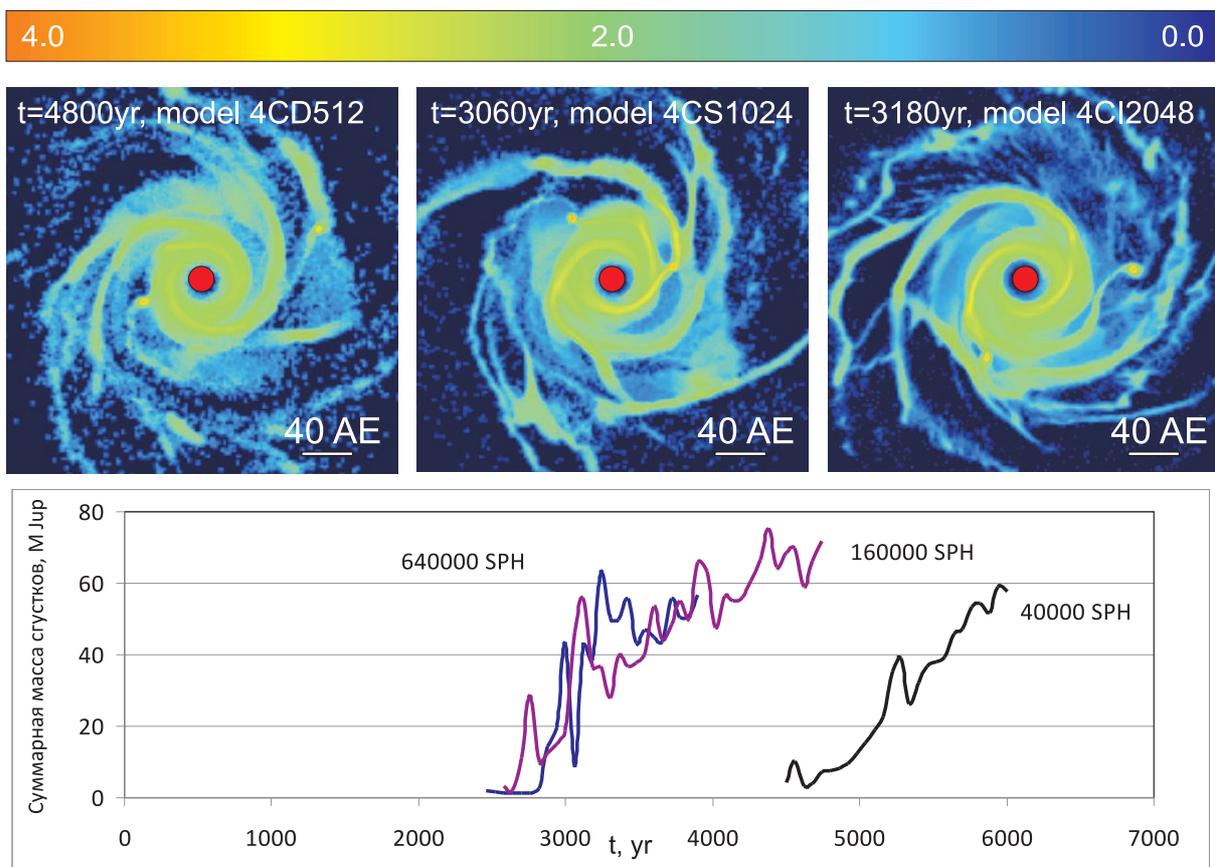


Рис. 2. Вверху: логарифм поверхностной плотности газа для моделей с разным количеством SPH-частиц. Первый столбец — 40 000, второй — 160 000, третий — 640 000 SPH-частиц; внизу: суммарная масса сгустков в диске как функция времени. Масса диска составляет  $0.25 M_{\text{Solar}}$

**4. Результаты вычислительных экспериментов. Характеристика процесса фрагментации, не зависящая от параметров численной модели.** На верхних панелях рис. 2 приведено распределение поверхностной плотности газа для диска массы  $0.25 M_{\text{Solar}}$ , полученное в расчетах с использованием разного количества SPH-частиц и ячеек сетки для моделей второй группы. Видно, что во всех случаях имеет место формирование сгущений в спиральных рукавах, однако в моделях 4CS1024 и 4CI2048 формирование сгустков произошло практически одновременно, а в модели 4CD512 — на 2000 лет позднее.

На нижней панели рис. 2 приведена суммарная масса сгущений в диске как функция времени. Для получения этой величины использовался автоматический поиск сгустков в наборе SPH-частиц, основанный на алгоритме HOP [17] разбиения “облака точек” на группы. Масса каждого сгустка вычислялась как сумма масс SPH-частиц, принадлежащих сгустку, при этом частица считалась принадлежащей сгустку, если ее плотность была больше, чем половина максимума плотности в сгустке. Из рис. 2 видно, что во всех расчетах суммарная масса фрагментов в диске возрастает. Это происходит за счет аккреции газа из диска на сгусток, а также за счет появления в диске новых сгустков. При этом кривые масс не являются

строго монотонными, поскольку кроме механизмов образования и роста сгущений в диске существуют механизмы их разрушения: сгусток может потерять массу или вообще быть разрушенным за счет действия приливных сил, сгусток может упасть на поглощающую ячейку или быть выброшенным во внешнюю область за пределами диска, если в результате обмена угловым моментом с другим сгустком или спиральным рукавом его угловая скорость станет существенно отличаться от кеплеровской скорости. При этом видно, что для всех расчетов средний темп нарастания массы сгустков воспроизводится близким образом, т.е. может считаться характеристикой процесса фрагментации диска, независимой от счетных параметров.

Таблица 3

Список вычислительных экспериментов для фрагментирующихся моделей диска с равновесным значением начальной угловой скорости

Масса диска (в массах Солнца)	Название модели	Средняя скорость нарастания суммарной массы фрагментов (в массах Юпитера в год)
0.25	4CD512	$3.3 \times 10^{-2}$
	4CS1024	$3.0 \times 10^{-2}$
	4CI2048	$4.0 \times 10^{-2}$
0.3	5CD512	0.11
	5CS1024	0.16
	5CI2048	0.19
	5AS1024	0.14
0.4	6CD512	0.3
	6CS1024	0.45
	6AS1024	0.38

Чтобы убедиться в том, что средняя скорость нарастания суммарной массы фрагментов в диске значительно зависит от физических параметров модели и практически не зависит от счетных параметров, мы вычислили эту величину для всех моделей табл. 2, в которых имело место формирование фрагментов. Результаты представлены в табл. 3 и на рис. 3, где приведено изменение суммарной массы сгустков для трех моделей диска 4CS1024, 5CS1024 и 6CS1024, которые были рассчитаны с использованием одних и тех же численных параметров.

На рис. 3 видно, что чем больше масса диска, тем быстрее в нем образуется первый фрагмент и тем выше скорость нарастания массы фрагментов. Для дисков 0.3 и 0.4  $M_{\text{Solar}}$  суммарная масса сгущений достигает максимума, после которого происходит ее спад (диск 0.4  $M_{\text{Solar}}$ ) из-за быстрой аккреции сгустков на звезду или колебание (диск 0.3  $M_{\text{Solar}}$ ) на одном уровне, когда скорость образования и набора массы сгустков примерно равна скорости их падения на звезду. Для этих моделей мы вычисляем среднюю скорость набора массы фрагментов на этапе роста, например для диска 0.4  $M_{\text{Solar}}$  — в период с 600 до 1000 лет, а для диска 0.3  $M_{\text{Solar}}$  — в период с 1400 до 1700 лет. Сопоставляя данные из табл. 3 для дисков разной массы, мы видим, что увеличение массы диска на 20–30% приводит к изменению средней скорости нарастания массы сгустков в 2–3 раза, тогда как изменение счетных параметров для диска одной и той же массы меняет эту величину на проценты, а не в разы. Таким образом, мы показали, что средняя скорость набора массы сгустками является величиной, которая слабо зависит от численного разрешения и деталей алгоритма.

**5. Результаты вычислительных экспериментов. Соотношение между размером ячейки декартовой сетки и радиусом сглаживания в методе SPH.** Классическим вариантом реализации метода SPH для гравитационной газовой динамики является его комбинация с подходом задачи  $N$  тел для вычисления гравитационного потенциала, в котором предполагается, что частицы взаимодействуют как точечные тела определенной массы.

Для точечной массы гравитационный потенциал имеет вид  $\Phi = -\frac{m}{r}$  и особенность при  $r = 0$ , поэтому для численного определения гравитационной силы между близкорасположенными частицами используется редуцированный потенциал, например в форме  $\Phi = -\frac{m}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2}}$ , где  $\epsilon$  — длина гравитационного размывания, внутри которого гравитационное взаимодействие искусственно подавляется. Для сокращения вычислительных затрат подход задачи  $N$  тел реализуется через построение древовидного кода, который позволяет разбивать частицы на группы несколько уровней. Это разбиение используется для нахождения

ния гравитационной силы, действующей на каждую частицу: (1) удаленная группа частиц заменяется одной точечной массой, (2) близкорасположенные частицы считаются с использованием редуцированного потенциала.

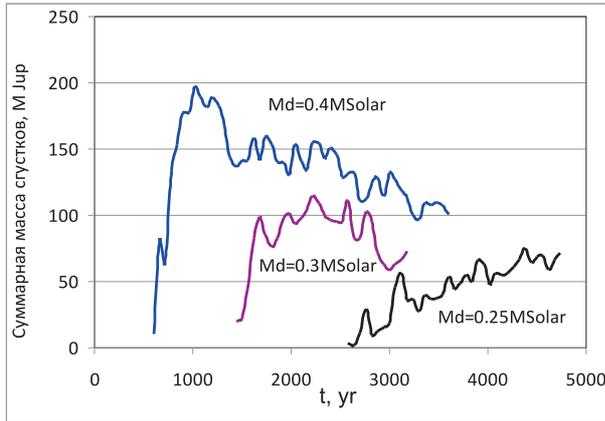


Рис. 3. Суммарная масса сгустков в диске как функция времени для дисков разной массы: красная кривая — модель 5CS1024, черная кривая — модель 4CS1024, синяя кривая — модель 6CS1024

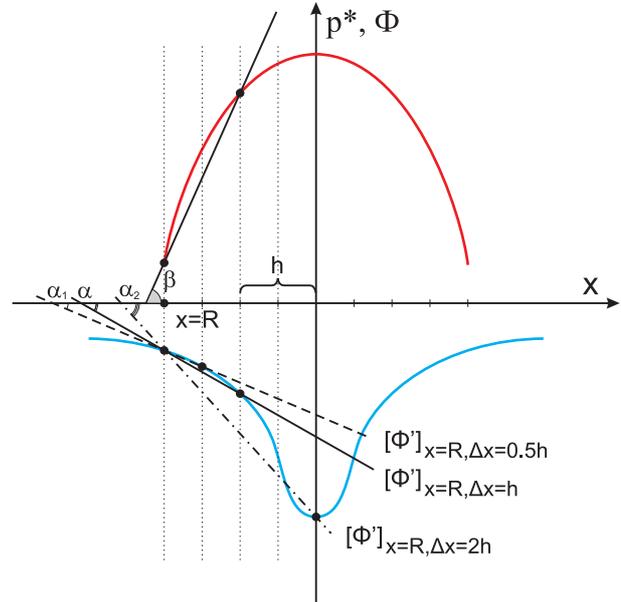


Рис. 4. Схема возникновения счетного дисбаланса между силами гравитации и давления при использовании разных шагов дискретизации для вычисления производных давления и потенциала

Трулав с соавторами [15] сформулировал требование к численному разрешению для динамики фрагментирующегося диска в терминах длины Джинса:  $\lambda_J > 4h_{\text{grid}}$ , если решение уравнений газовой динамики проводится на сетке. Бэйт и Буркерт [18] сформулировали аналогичное необходимое условие для метода SPH: локальная масса Джинса должна быть представлена 10–12 модельными частицами  $m_J = \frac{1}{4} \pi \lambda_J^2 \Sigma > 10 m_{\text{SPH}}$  (оценка массы приведена для 2D-случая, здесь  $m_{\text{SPH}}$  — масса отдельной частицы).

Кроме того, Бэйт и Буркерт [18] показали, что в случае, когда масса возникшего сгустка близка к массе Джинса, в численном расчете мы воспроизведем сжатие либо развал сгустка в зависимости от того, как соотносятся между собой  $h_{\text{SPH}}$  и  $\epsilon$ .

Причина возникновения этого эффекта приведена на рис. 4. Кривые показывают схематичную зависимость давления  $p^*$  и потенциала  $\Phi$  от радиуса сгустка (отметим, что полуширины пика давления и пика потенциала показаны без соблюдения масштаба и соответствуют частному случаю, когда в расчете размер ячейки сетки для потенциала меньше, чем соответствующий шаг дискретизации для уравнений газовой динамики). Вычислим сеточное значение производной от  $p^*$  и  $\Phi$  в точке  $x = R$ , используя для простоты схему “разность вперед”. Сплошной линией показаны секущие, тангенс угла наклона которых является сеточной производной функций  $p^*$  и  $\Phi$ , вычисленные с использованием одного и того же шага по пространству:  $\text{tg } \alpha = [\nabla \Phi]_{x=R, \Delta x=h}$ ,  $\text{tg } \beta = [\nabla p^*]_{x=R, \Delta x=h}$ . Сеточные производные потенциала, вычисленные с использованием  $\Delta x = 2h$  и  $\Delta x = 0.5h$ , обозначим  $\text{tg } \alpha_1 = [\nabla \Phi]_{x=R, \Delta x=0.5h}$ ,  $\text{tg } \alpha_2 = [\nabla \Phi]_{x=R, \Delta x=2h}$ . Видно, что для представленной выпуклой вверх функции потенциала  $\Phi$  справедливо  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ , т.е.

$$[\nabla \Phi]_{x=R, \Delta x=0.5h} < [\nabla \Phi]_{x=R, \Delta x=h} < [\nabla \Phi]_{x=R, \Delta x=2h}.$$

Теперь выясним, в каком случае количественные отличия в вычисленных производных приведут к качественному отличию численного решения. Из уравнения движения следует, что частица, расположенная в точке  $x = R$ , будет покоиться тогда и только тогда, когда  $\nabla p^* + \sigma \nabla \Phi = 0$  (по определению длины Джинса это достигается при  $R = \lambda_J$ ), двигаться вправо, если  $\nabla p^* + \sigma \nabla \Phi < 0$  (это соответствует сжатию сгустка), и двигаться влево, если  $\nabla p^* + \sigma \nabla \Phi > 0$  (это соответствует разлету сгустка).

Пусть для  $\Delta x = h$  имеет место  $[\nabla p^*] = -[\sigma \nabla \Phi]$ . Тогда ясно, что если мы заменим сеточную производную потенциала на  $[\nabla \Phi]_{x=R, \Delta x=0.5h}$ , то получим  $[\nabla p^*] - [\sigma \nabla \Phi]_{x=R, \Delta x=0.5h} < 0$  — сжатие сгустка, а если

заменяем на  $[\nabla\Phi]_{x=R, \Delta x=2h}$ , то получим  $[\nabla p^*] - [\sigma\nabla\Phi]_{x=R, \Delta x=2h} > 0$  — разлет сгустка.

Бэйт и Буркерт [18] показали, что этот же эффект, который мы для наглядности продемонстрировали на сетке, имеет место, если производные от давления и потенциала вычисляются с помощью SPH-аппроксимации. Они разместили две SPH-частицы в сгусток массы  $m_J$  и радиуса  $\lambda_J$ , положили  $h_{\text{SPH}} = \lambda_J$  и вычислили гравитационную силу и силу давления, действующие на эти частицы, используя три разных значения отношения  $\frac{\epsilon}{h_{\text{SPH}}} = 0.5; 1; 2$  (см. рис. 1 в [18]). Они получили, что для случая  $h_{\text{SPH}} = \epsilon$  вычисленная гравитационная сила близка по порядку вычисленной силе давления. Это хорошо согласуется с определением величин  $m_J$  и радиуса  $\lambda_J$  как граничных между сжимающимся и разваливающимся сгустком: в расчете сгусток массы  $m_J$  будет находиться в равновесии из-за взаимной компенсации сил давления и гравитации. Для  $\epsilon = 0.5h_{\text{SPH}}$  рассчитанная гравитационная сила на порядок больше рассчитанной силы давления, что приведет к сжатию сгустка, а для  $\epsilon = 2h_{\text{SPH}}$  гравитационная сила на порядок меньше силы давления, что приведет к его разлету.

Нельсон [19] предложил дополнительное необходимое условие корректного моделирования фрагментации в методе SPH в сочетании с древовидным кодом: для каждой частицы радиус сглаживания, используемый для решения уравнений газовой динамики, должен быть равен длине гравитационного размазывания, так как в противном случае формирование фрагментов в диске может быть инициировано или подавлено счетными эффектами (причем оба процесса могут реализовываться в ходе одного и того же расчета в разных частях диска). Остановимся подробнее на результатах вычислительных экспериментов, которые были положены в основу такого вывода. Нельсон [19] привел группу из 4 расчетов с фиксированной длиной гравитационного размазывания  $\epsilon$  и фиксированным количеством SPH-частиц (см. табл. 1 и рис. 13 в [19]). Среднее расстояние между частицами в его расчетах составляло 0.5 АЕ. В качестве  $\epsilon$  использованы величины 0.055 АЕ, 0.4 АЕ, 0.65 АЕ, 1.1 АЕ. Он получил, что расчеты с  $\epsilon = 0.055$  АЕ и  $\epsilon = 0.04$  АЕ дают искусственную фрагментацию диска, а расчеты с большим значением  $\epsilon$  не дают. Затем он увеличил количество SPH-частиц, уменьшив при этом среднее расстояние между частицами до 0.17 АЕ, и рассчитал динамику того же диска с  $\epsilon = 0.025$  АЕ и  $\epsilon = 0.14$  АЕ, получив в результате фрагменты в диске. Таким образом, для всех приводимых им расчетов с искусственной фрагментацией диска имело место соотношение  $h_{\text{SPH}} > \epsilon$ . Важно отметить при этом, что Нельсон [19] проводил расчеты диска с одними и теми же физическими параметрами.

Рассмотрим теперь отдельно результаты, представленные в столбце 4 табл. 2 нашей статьи. Видно, что взятые сами по себе они могут быть интерпретированы следующим образом: расчеты с постоянным радиусом сглаживания, равным размеру декартовой сетки, воспроизводят фрагментацию независимо от используемого численного разрешения, а расчеты с адаптивным радиусом сглаживания ошибочно дают отсутствие фрагментации. При этом рассмотрение результатов, представленных в других столбцах табл. 2, а также в табл. 1, позволяют иначе интерпретировать расходимость в результатах: диск массы 0.2 в табл. 1 и диск массы 0.25 в табл. 2 являются переходными режимами между фрагментирующимися и нефрагментирующимися дисками, поэтому для них имеет место качественная зависимость результатов моделирования от параметров численной модели. Эта расходимость является атрибутом параметров задачи, а не свойством численной схемы. Для дисков меньшей и большей массы появление или отсутствие фрагментации не зависит от используемых численных параметров модели, в том числе и от соотношения  $\frac{h_{\text{SPH}}}{h_{\text{grid}}}$ . В первую очередь это означает, что для того чтобы изучать влияние деталей численных алгоритмов на воспроизводимый процесс фрагментации, вычислительные эксперименты целесообразно проводить на дисках вне “переходной” области.

Проверим, будут ли качественно меняться результаты моделирования диска существенно большей массы (вне “переходной” области) при изменении  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon}$ . Возьмем диск массы  $0.4 M_{\text{Solar}}$  и рассчитаем его динамику по нашей численной модели. Мы используем комбинацию SPH с сеточным методом для расчета гравитационных сил; это означает, что длина “размазывания” потенциала у нас фиксирована во всех точках пространства и  $\epsilon = h_{\text{grid}}$ . В качестве эталонного расчета будем рассматривать модель 6CS1024, в которой  $h_{\text{SPH}} = \epsilon$  и 160 000 SPH-частиц. Чтобы получить соотношение  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon} = 3$ , увеличим радиус сглаживания каждой частицы по сравнению с моделью 6CS1024, сохранив неизменными все остальные параметры расчета; полученную модель обозначим 6CS1024\_3. Чтобы получить соотношение  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon} = \frac{1}{3}$ , увеличим размер ячейки декартовой сетки по сравнению с моделью 6CS1024, сохранив неизменными все остальные параметры расчета; полученную модель обозначим 6CS340\_0.33. Результаты моделирования приведены на рис. 5. Суммарная масса сгустков вычислялась по алгоритму, описанному в предыдущем

разделе. Из нижней панели рис. 5 видно, что время появления фрагментов в диске различается на 100–400 лет. Оцененная из рис. 5 средняя скорость нарастания суммарной массы фрагментов составляет 0.45 массы Юпитера в год для модели 6CS1024 (0.43 для этапа монотонного роста массы), 0.5 массы Юпитера в год для модели 6CS1024\_3 (0.7 для этапа монотонного роста массы), 0.5 массы Юпитера в год для модели 6CS340\_0.33. Видно, что модель 6CS1024\_3 дает завышенный темп роста массы на этапе с 850 до 1150 лет, но при сопоставлении полученных скоростей с данными табл. 2 (где приведена эта же величина для дисков разной массы) заключаем, что средняя скорость нарастания массы фрагментов воспроизводится близким образом по всем моделям.

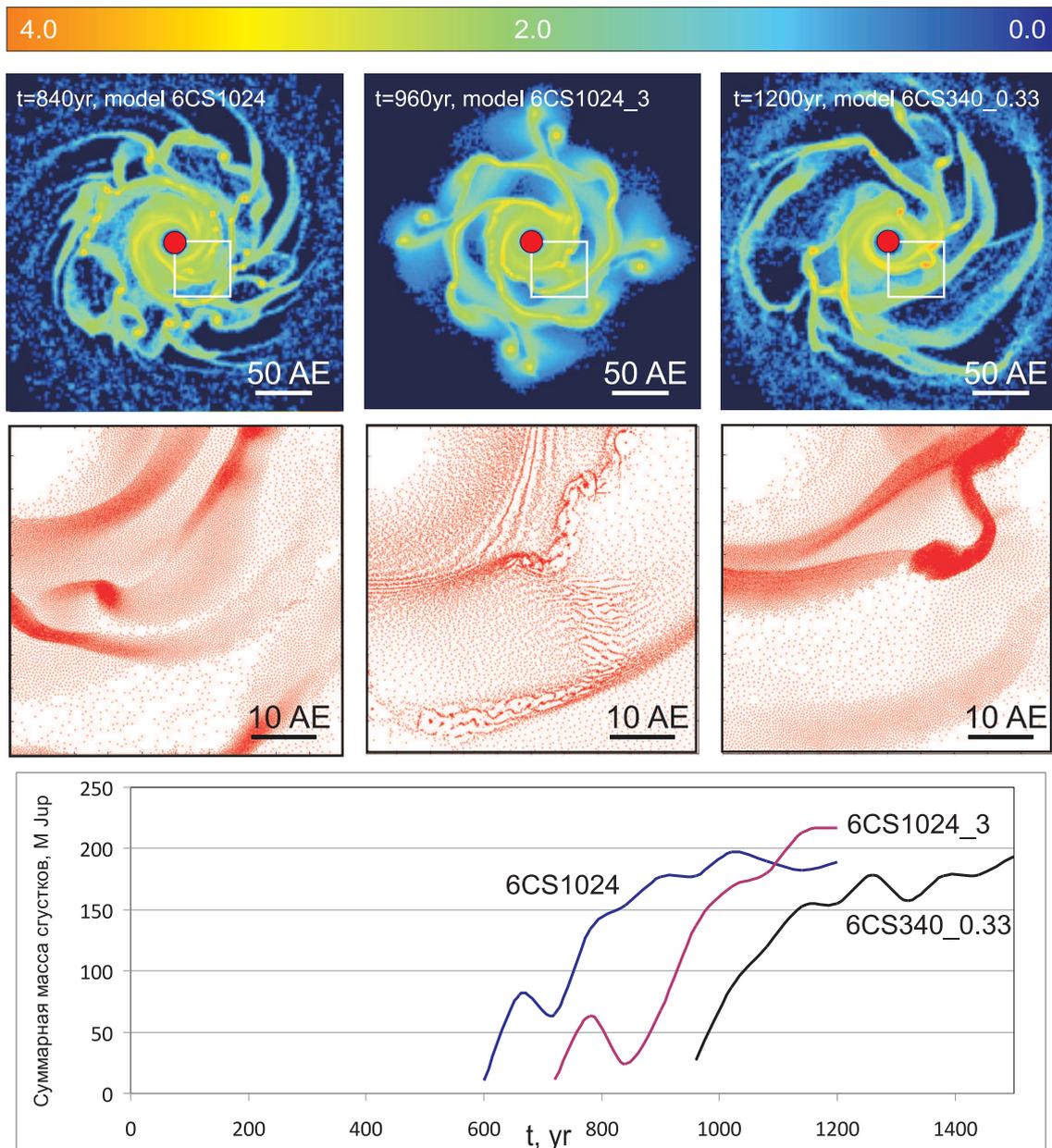


Рис. 5. Первый ряд: логарифм поверхностной плотности газа для моделей с  $\frac{h_{\text{SPH}}}{h_{\text{grid}}} = 1; 3; 0.33$  (слева направо); второй ряд: положение модельных частиц в выделенном квадрате; третий ряд: суммарная масса сгустков в диске для приведенных моделей как функция времени

Моменты времени, представленные на верхних панелях рис. 5, выбраны таким образом, чтобы обеспечить близкую суммарную массу сгустков (150–170 масс Юпитера). Видно, что диск, представленный на центральной панели рис. 5, имеет выраженную квадратную форму и четыре спиральных рукава, тогда как на левой и правой панели эффект “выделенных направлений”, связанный с использованием прямо-

угольной сетки, отсутствует. Проблема “выделенных направлений” в численных решениях или “неинвариантности ошибки округления” в основном обсуждается в литературе для эйлерова подхода к решению уравнений газовой динамики (например, [20]). Авторы [20] обобщают, что увеличение численного разрешения (используемых узлов сетки) эффективно подавляет численные артефакты, связанные с “выделенными направлениями”. Мы сочетаем инвариантный относительно поворота способ расчета сил давления (обеспечивается лагранжевой природой метода SPH) с неинвариантным относительно поворота способом расчета гравитационной силы. Интересно отметить, что в этом случае выраженность “выделенных направлений” сильно зависит от соотношения  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon}$ , а не определяется величиной  $\max(h_{\text{SPH}}, \epsilon)$ , одинаковой для моделей 6CS1024\_3 и 6CS340\_0.33.

Кроме появления квадратной формы у диска, из рис. 5 (второй ряд, центральная панель) видно, что в расчете по модели 6CS1024\_3 получаем специфическое неравномерное расположение SPH-частиц. Так, в моделях 6CS1024 и 6CS340\_0.33 (на левой и правой панели второго ряда рис. 5) область сгущения целиком занята частицами, тогда как в модели 6CS1024\_3 происходит кластеризация — координаты модельных частиц, образующих сгусток, практически сливаются в одну точку, которая значительно удалена от другой точки-кластера. Это происходит вследствие развития численной неустойчивости — парной (клампинговой) неустойчивости, впервые описанной в [21]. При таком неравномерном расположении модельных частиц затруднено определение диаметра сгустка, однако ясно, что расстояние между частицами внутри кластера как минимум в 10 раз меньше, чем средний радиус сгустков, представленных на левой и правой панелях.

Таким образом, мы получили, что выполнение неравенства  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon} > 1$  приводит к появлению в решении счетных артефактов — “выделенных направлений” и парной (клампинговой) неустойчивости, которая отсутствует в моделях с  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon} \leq 1$ . При этом наши результаты совпадают с фактическими результатами Нельсона [19], так как он получил фрагментацию, инициированную расчетными параметрами при  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon} \approx 3$ . На основании этих результатов Нельсон заключил, что необходимым условием корректного моделирования фрагментации является выполнение соотношения  $h_{\text{SPH}} = \epsilon$ , тогда как наше заключение состоит в том, что необходимым условием является выполнение соотношения  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon} \leq 1$ .

Близость численных результатов, полученных в моделях 6CS1024 и 6CS340\_0.33, подтверждает возможность корректного моделирования развития фрагментов при  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon} < 1$ , несмотря на обсуждаемый ранее эффект возникновения дисбаланса между силами гравитации и давления. Бэйт и Буркерт [18] пришли к выводу, что сильная качественная зависимость численного решения от расчетных параметров имеет место только для сгустков, масса которых близка к массе Джинса  $m_J$ . Расчетная динамика сгустка, масса которого меньше или превосходит  $m_J$ , будет гораздо менее чувствительна к отклонению  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon}$  от 1. Условие  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon} \leq 1$  позволяет, в частности, сочетать SPH с сеточным методом решения уравнения Пуассона не только на декартовой, но и на цилиндрической сетке, где в принципе невозможно обеспечить  $h_{\text{SPH}} = \epsilon$  из-за нерегулярной формы ячейки. Кроме того, более слабое условие позволяет использовать адаптивный радиус сглаживания для SPH в сочетании с регулярной сеткой, что дает преимущества для решения некоторых задач.

**6. Заключение.** В результате вычислительных экспериментов по моделированию образования самогравитирующих сгустков в околозвездном диске мы показали следующее.

1) Существует “переходная” область параметров диска (в нашем случае — массы диска), которая ограничивает фрагментирующие и нефрагментирующие диски. Внутри этой области динамический исход моделирования — появление фрагментации или ее отсутствие — может зависеть от деталей алгоритма и численного разрешения, даже если несколько ячеек (радиусов сглаживания в SPH) приходится на длину Джинса. За пределами этой области расчеты с изменением разрешения и деталей алгоритма дают один и тот же результат (фрагментация или отсутствие фрагментации).

2) Изучение влияния алгоритмов на воспроизводимый процесс фрагментации целесообразно проводить на моделях с параметрами вне “переходной” области, поскольку в “переходной” области трудно определить, насколько велика роль конкретного фактора.

3) Необходимым условием корректного моделирования формирования и динамики сгустков является выполнение условия  $\frac{h_{\text{SPH}}}{\epsilon} \leq 1$ , а не более сильное условие  $h_{\text{SPH}} = \epsilon$ , ранее предложенное Нельсоном [19];

Мы предлагаем способ сравнения результатов моделирования фрагментации: в качестве характеристики процесса использовать среднюю скорость нарастания суммарной массы сгущений. В вычислительных экспериментах мы показали следующее.

1) Скорость нарастания суммарной массы сгущений определяется массой диска и может считаться независимой от численных параметров, тогда как момент появления первого фрагмента в диске может сильно зависеть от счетных параметров.

2) Чем больше масса диска, тем выше скорость нарастания суммарной массы фрагментов.

3) Воспроизведение средней скорости нарастания массы сгустков не гарантирует, что полученное решение свободно от таких выраженных счетных эффектов, как наличие “выделенных направлений” или развитие парной (клампинговой) неустойчивости.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-07-00916 и грантом Президента РФ МК-5915.2016.1. Работа частично поддержана Министерством образования и науки РФ. Расчеты проведены с использованием ресурсов ЦКП Сибирского суперкомпьютерного центра ИВМиМГ СО РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boley A.C., Hayfield T., Mayer L., Durisen R.H.* Clumps in the outer disk by disk instability: why they are initially gas giants and the legacy of disruption // *Icarus*. 2010. **207**, N 2. 509–516.
2. *Boss A.P.* Possible rapid gas giant planet formation in the solar nebula and other protoplanetary disks // *The Astrophysical Journal*. 2000. **536**, N 2. L101–L104.
3. *Nayakshin S., Cha S.-H., Bridges J.C.* The tidal downsizing hypothesis for planet formation and the composition of Solar system comets // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2011. **416**, N 1. L50–L54.
4. *Machida M.N., Inutsuka S.-I., Matsumoto T.* Recurrent planet formation and intermittent protostellar outflows induced by episodic mass accretion // *The Astrophysical Journal*. 2011. **729**, N 1. 1–17. doi: 10.1088/0004-637X/729/1/42.
5. *Meru F.* Triggered fragmentation in self-gravitating discs: forming fragments at small radii // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. **454**, N 3. 2529–2538.
6. *Vorobyov E.I., Basu S.* The burst mode of protostellar accretion // *The Astrophysical Journal*. 2006. **650**, N 2. 956–969.
7. *Zhu Z., Hartmann L., Nelson R.P., Gammie C.F.* Challenges in forming planets by gravitational instability: disk irradiation and clump migration, accretion, and tidal destruction // *The Astrophysical Journal*. 2012. **746**, N 1. 1–26. doi: 10.1088/0004-637X/746/1/110
8. *Young M.D., Clarke C.J.* Dependence of fragmentation in self-gravitating accretion discs on small-scale structure // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. **451**, N 4. 3987–3994.
9. *Takahashi S.Z., Tsukamoto Y., Inutsuka S.* A revised condition for self-gravitational fragmentation of protoplanetary discs // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016. **458**, N 4. 3597–3612.
10. *Meru F., Bate M.R.* Non-convergence of the critical cooling time-scale for fragmentation of self-gravitating discs // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2011. **411**, N 1. L1–L5.
11. *Стояновская О.П., Снытников Н.В., Снытников В.Н.* Алгоритм для решения нестационарных задач гравитационной газовой динамики: комбинация метода SPH и сеточного метода вычисления гравитационного потенциала // *Вычислительные методы и программирование*. 2015. **16**. 52–60.
12. *Vorobyov E.I.* Embedded protostellar disks around (sub-)solar protostars. I. Disk structure and evolution // *The Astrophysical Journal*. 2010. **723**, N 2. 1294–1307.
13. *Поляченко В.Л., Фридман А.М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976.
14. *Durisen R.H., Boss A.P., Mayer L., Nelson A.F., Quinn T., Rice W.K.M.* Gravitational instabilities in gaseous protoplanetary disks and implications for giant planet formation // *Protostars and Planets*. Tucson: Univ. of Arizona Press, 2007. 607–622.
15. *Truelove J.K., Klein R.I., McKee C.F., Holliman J.H., Howell L.H., Greenough J.A.* The Jeans condition: a new constraint on spatial resolution in simulations of isothermal self-gravitational hydrodynamics // *The Astrophysical Journal*. 1997. **489**, N 2. L179–L183.
16. *Thies I., Kroupa P., Goodwin S.P., Stamatellos D., Whitworth A.P.* Tidally induced brown dwarf and planet formation in circumstellar disks // *The Astrophysical Journal*. 2010. **717**, N 1. 577–585.
17. *Eisenstein D.J., Hut P.* HOP: a new group-finding algorithm for *N*-body simulations // *The Astrophysical Journal*. 1998. **498**, N 1. 137–142.
18. *Bate M.R., Burkert A.* Resolution requirements for smoothed particle hydrodynamics calculations with self-gravity // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1997. **288**, N 4. 1060–1072.
19. *Nelson A.F.* Numerical requirements for simulations of self-gravitating and non-self-gravitating discs // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2006. **373**, N 3. 1039–1073.
20. *Robertson B.E., Kravtsov A.V., Gnedin N.Y., Abel T., Rudd D.H.* Computational Eulerian hydrodynamics and Galilean invariance // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2010. **401**, N 4. 2463–2476.

21. *Schuessler I., Schmitt D.* Comments on smoothed particle hydrodynamics // *Astronomy and Astrophysics*. 1981. **97**, N 2. 373–379.

Поступила в редакцию  
25.07.2016

---

**Numerical Simulation of Gravitational Instability Development and Clump Formation  
in Massive Circumstellar Disks Using Integral Characteristics  
for the Interpretation of Results**

**O. P. Stoyanovskaya**<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Novosibirsk State University, Faculty of Natural Sciences; ulitsa Pirogova 2, Novosibirsk, 630090, Russia;  
Ph.D., Scientist, e-mail: stop@catalysis.ru*

Received July 10, 2016

**Abstract:** Results of numerical simulation of instability development and formation of self-gravitating clumps (embryos of protoplanets) in a thin circumstellar gaseous disk are analyzed and systematized. Numerical experiments are performed using a disk model based on a combination of Smoothed Particle Hydrodynamic (SPH) and Hockney methods to solve Poisson's equation on a uniform Cartesian grid. It is shown that the process of clump formation can be characterized by an average growth rate of the total mass of fragments in the disk; this rate is strongly dependent on the physical parameters of the disk and is slightly dependent on the parameters of the numerical model. It is confirmed that there exists a range of the disk parameters such that the appearance or absence of clumps in the disk depends on the resolution in use and on the details of the numerical algorithm, whereas beyond this range such a dependence is not observed. It is shown that, for a combination of the SPH method with a grid-based method to calculate the gravitational force, it is necessary that the hydrodynamic smoothing length does not exceed the grid cell length, otherwise we obtain the following numerical effects in the solutions: the disk shape becomes a square and an artificial grouping of model particles takes place due to the evolution of pairing (clumping) instability in SPH.

**Keywords:** circumstellar disk, structure formation, Smoothed-Particle Hydrodynamics (SPH), gravitational gas dynamics.

**References**

1. A. C. Boley, T. Hayfield, L. Mayer, and R. H. Durisend, "Clumps in the Outer Disk by Disk Instability: Why They are Initially Gas Giants and the Legacy of Disruption," *Icarus* **207** (2), 509–516 (2010).
2. A. P. Boss, "Possible Rapid Gas Giant Planet Formation in the Solar Nebula and Other Protoplanetary Disks," *Astrophys. J.* **536** (2), L101–L104 (2000).
3. S. Nayakshin, S.-H. Cha, and J. C. Bridges, "The Tidal Downsizing Hypothesis for Planet Formation and the Composition of Solar System Comets," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **416** (1), L50–L54 (2011).
4. M. N. Machida, S.-I. Inutsuka, and T. Matsumoto, "Recurrent Planet Formation and Intermittent Protostellar Outflows Induced by Episodic Mass Accretion," *Astrophys. J.* **729** (1), 1–17 (2011). doi: 10.1088/0004-637X/729/1/42
5. F. Meru, "Triggered Fragmentation in Self-Gravitating Discs: Forming Fragments at Small Radii," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **454** (3), 2529–2538 (2015).
6. E. I. Vorobyov and S. Basu, "The Burst Mode of Protostellar Accretion," *Astrophys. J.* **650** (2), 956–969 (2006).
7. Z. Zhu, L. Hartmann, R. P. Nelson, and C. F. Gammie, "Challenges in Forming Planets by Gravitational Instability: Disk Irradiation and Clump Migration, Accretion, and Tidal Destruction," *Astrophys. J.* **746** (1), 1–26 (2012). doi: 10.1088/0004-637X/746/1/110
8. M. D. Young and C. J. Clarke, "Dependence of Fragmentation in Self-Gravitating Accretion Discs on Small-Scale Structure," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **451** (4), 3987–3994 (2015).
9. S. Z. Takahashi, Y. Tsukamoto, and S. Inutsuka, "A Revised Condition for Self-Gravitational Fragmentation of Protoplanetary Discs," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **458** (4), 3597–3612 (2016).

10. F. Meru and M. R. Bate, “Non-Convergence of the Critical Cooling Time-Scale for Fragmentation of Self-Gravitating Discs,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **411** (1), L1–L5 (2011).
11. O. P. Stoyanovskaya, N. V. Snytnikov, and V. N. Snytnikov, “An Algorithm for Solving Transient Problems of Gravitational Gas Dynamics: A Combination of the SPH Method with a Grid Method of Gravitational Potential Computation,” *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 52–60 (2015).
12. E. I. Vorobyov, “Embedded Protostellar Disks around (Sub-)Solar Protostars. I. Disk Structure and Evolution,” *Astrophys. J.* 2010. **723** (2), 1294–1307 (2010).
13. V. L. Polyachenko and A. M. Fridman, *Equilibrium and Stability of Gravitating Systems* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
14. R. H. Durisen, A. P. Boss, L. Mayer, et al., “Gravitational Instabilities in Gaseous Protoplanetary Disks and Implications for Giant Planet Formation,” in *Protostars and Planets* (Univ. Arizona Press, Tucson, 2007), pp.607–622.
15. J. K. Truelove, R. I. Klein, C. F. McKee, et al., “The Jeans Condition: A New Constraint on Spatial Resolution in Simulations of Isothermal Self-Gravitational Hydrodynamics,” *Astrophys. J.* **489** (2), L179–L183 (1997).
16. I. Thies, P. Kroupa, S. P. Goodwin, et al., “Tidally Induced Brown Dwarf and Planet Formation in Circumstellar Disks,” *Astrophys. J.* 2010. **717** (1), 577–585 (2010).
17. D. J. Eisenstein and P. Hut, “HOP: A New Group-Finding Algorithm for  $N$ -Body Simulations,” *Astrophys. J.* **498** (1), 137–142 (1998).
18. M. R. Bate and A. Burkert, “Resolution Requirements for Smoothed Particle Hydrodynamics Calculations with Self-Gravity,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **288** (4), 1060–1072 (1997).
19. A. F. Nelson, “Numerical Requirements for Simulations of Self-Gravitating and Non-Self-Gravitating Discs,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **373** (3), 1039–1073 (2006).
20. B. E. Robertson, A. V. Kravtsov, N. Y. Gnedin, et al., “Computational Eulerian Hydrodynamics and Galilean Invariance,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **401** (4), 2463–2476 (2010).
21. I. Schuessler and D. Schmitt, “Comments on Smoothed Particle Hydrodynamics,” *Astron. Astrophys.* **97** (2), 373–379 (1981).