УДК 517.4+519.71 doi 10.26089/NumMet.v17r319

РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ

Н. Ф. Валеев[1], **Ю. В. Мартынова**[2], **Я. Т. Султанаев**[3]

Исследуется модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля на геометрическом графе. Суть данной задачи состоит в восстановлении N параметров граничных условий по N собственным значениям. Установлено, что эта задача обладает свойством монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий. Поставленная задача сведена к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора в конечномерном пространстве. Предложен новый алгоритм численного решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: спектральная теория дифференциальных операторов, геометрический граф, оператор Штурма–Лиувилля, спектральные задачи.

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим геометрический трехлучевой граф, на каждом из ребер которого задан оператор Штурма–Лиувилля с нулевым потенциалом

$$\big(a_k(x_k){y_k}'(x_k)\big)' + \lambda b_k(x_k)y_k(x_k), \quad x_k \in (0;l_k), \quad k=\overline{1,3}, \tag{1}$$

Функции $a_k(x_k)$, ${a_k}'(x_k)$, $b(x_k)$ предполагаются непрерывными на $(0;l_k)$; кроме того, функции $a_k(x_k)$, $b(x_k)$ положительны на $(0;l_k)$ при соответствующих $k=\overline{1,3}$.

Для рассматриваемого оператора Штурма–Лиувилля в каждой граничной вершине графа задаются условия

$$y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2})y_k(l_k) = 0, \quad k=\overline{1,3}, \tag{2}$$

и условия в общем узле

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \quad \sum_{i=1}^{3} y_i'(0) = 0. \tag{3}$$

Коэффициенты граничных условий (2) должны быть вещественными: $p_{k1} > 0$, $p_{k2} < 0$, $k=\overline{1,3}$.

Обратная спектральная задача для поставленной краевой задачи (1)–(3) состоит в восстановлении коэффициентов граничных условий $\boldsymbol{p} = (p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{12}, p_{22}, p_{32})$, при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ являются собственными значениями оператора Штурма–Лиувилля.

Подобные задачи имеют многочисленные приложения, в частности в задачах диагностики и идентификации технических систем по частотам собственных колебаний, а также синтеза при построении с заданными частотно-резонансными свойствами. Рассмотрим в качестве примера электрическую цепь в виде соединения типа "звезда". На каждом из трех звеньев задается уравнение электрических колебаний в проводнике длиной l_k с распределенными емкостью C_k и индуктивностью L_k:

$$L_k C_k (U_k)_{tt} = (U_k)_{x_k x_k}(x_k;t), \quad x_k \in (0;l_k), \quad k=\overline{1,3}.$$

Граничные условия

$$(U_k)_{x_k}(l_k;t) + C_k \widetilde{L}_k (U_k)_{tt}(l_k;t) + \frac{C_k}{\widetilde{C}_k}\,(U_k)(l_k;t) = 0, \quad k=\overline{1,3},$$

описывают ситуацию, когда k-й проводник заземлен через сосредоточенную самоиндукцию $\widetilde{L}_k$ и емкость $\widetilde{C}_k$, соединенными последовательно.

[1] Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, ул. Чернышевского, 112, 450008, г. Уфа; ст. науч. сотр., e-mail: valeevnf@yandex.ru
[2] ООО "РН-УфаНИПИнефть", ул. Бехтерева, 3, 450103, г. Уфа; вед. специалист, e-mail: busa1987@mail.ru
[3] Башкирский государственный педагогический университет им. Акмуллы, физико-математический факультет, ул. Октябрьской революции, 3, 450000, г. Уфа; профессор, e-mail: sultanaevYT@gmail.com

В общем узле задаются условие непрерывности потенциала и условие баланса токов:

$$U_1(0;t) = U_2(0;t) = U_3(0;t), \quad \sum_{i=1}^{3} (U_i)_{x_i}(0;t) = 0.$$

Собственные колебания рассматриваемой динамической системы могут быть представлены в виде $U_k(x_k;t) = e^{i\omega t} y_k(x_k)$, $k = \overline{1,3}$.

С учетом обозначений $\lambda = \omega^2$, $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{L_k C_k}}$, $p_{k1} = \dfrac{C_k}{\widetilde{C}_k}$, $p_{k2} = -C_k \widetilde{L}_k$, $k = \overline{1,3}$, получим краевую задачу для оператора Штурма–Лиувилля

$$a_k^2 {y_k}''(x_k) + \lambda y_k(x_k), \quad x_k \in (0;l_k), \quad k = \overline{1,3}, \tag{4}$$

с граничными условиями (2) и условиями в общем узле (3).

2. Спектральные свойства модельной краевой задачи. Для корректной постановки обратной спектральной задачи, приведенной выше, необходимо, чтобы спектр поставленной начально-краевой задачи (1)–(3) был дискретным. Докажем соответствующую теорему.

Теорема 1. *Спектр начально-краевой задачи* (1)–(3) *дискретный, вещественный, положительный, если* $a_k(x_k) \in C^1(0;l_k)$, $b(x_k) \in C(0;l_k)$, $a_k(x_k) > 0$, $b(x_k) > 0$, $x_k \in (0;l_k)$, $p_{k1} > 0$, $p_{k2} < 0$, $k = \overline{1,3}$.

Доказательство. Пусть f_{k1}, f_{k1} — линейно-независимые решения k-го уравнения (1). Очевидно, что они являются целыми функциями относительно λ; следовательно, фундаментальная система решений k-го уравнения (1)

$$y_k(x_k,\lambda) = A_{k1}(\lambda,\boldsymbol{p}) f_{k1}(x_k,\lambda) + A_{k2}(\lambda,\vec{p}) f_{k2}(x_k,\lambda), \quad k = \overline{1,3}, \tag{5}$$

тоже является целой функцией относительно λ. Подставим (5) в граничные условия (2) и условия в общем узле (3) и получим систему из 6 уравнений: для $k = \overline{1,3}$

$$\begin{cases} A_{k1}(\lambda,\boldsymbol{p}) f'_{k1}(l_k,\lambda) + A_{k2}(\lambda,\boldsymbol{p}) f'_{k2}(l_k,\lambda) + (p_{k1}+\lambda p_{k2})\big(A_{k1}(\lambda,\boldsymbol{p}) f_{k1}(l_k,\lambda) + A_{k2}(\lambda,\boldsymbol{p}) f_{k2}(l_k,\lambda)\big) = 0, \\ A_{11}(\lambda,\boldsymbol{p}) f_{11}(0,\lambda) + A_{12}(\lambda,\boldsymbol{p}) f_{12}(0,\lambda) - A_{21}(\lambda,\boldsymbol{p}) f_{21}(0,\lambda) + A_{22}(\lambda,\boldsymbol{p}) f_{22}(0,\lambda) = 0, \\ A_{11}(\lambda,\boldsymbol{p}) f_{11}(0,\lambda) + A_{12}(\lambda,\boldsymbol{p}) f_{12}(0,\lambda) - A_{31}(\lambda,\boldsymbol{p}) f_{31}(0,\lambda) + A_{32}(\lambda,\boldsymbol{p}) f_{32}(0,\lambda) = 0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \big(A_{k1}(\lambda,\boldsymbol{p}) f'_{k1}(x_k,\lambda) + A_{k2}(\lambda,\boldsymbol{p}) f'_{k2}(x_k,\lambda)\big) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} b_{k1}(l_k,\lambda) = f'_{k1}(l_k,\lambda) + (p_{k1}+\lambda p_{k2}) f_{k1}(l_k,\lambda), \quad k = \overline{1,3}, \\ b_{k2}(l_k,\lambda) = f'_{k2}(l_k,\lambda) + (p_{k1}+\lambda p_{k2}) f_{k2}(l_k,\lambda), \quad k = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда систему (6) можно записать в векторно-матричном виде

$$B(\lambda,\boldsymbol{p}) \boldsymbol{A}(\lambda,\boldsymbol{p}) = 0, \tag{8}$$

где

$$B(\lambda,\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} b_{11}(l_1,\lambda) & b_{12}(l_1,\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21}(l_2,\lambda) & b_{22}(l_2,\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{31}(l_3,\lambda) & b_{32}(l_3,\lambda) \\ f_{11}(0,\lambda) & f_{12}(0,\lambda) & f_{21}(0,\lambda) & f_{22}(0,\lambda) & 0 & 0 \\ f_{11}(0,\lambda) & f_{12}(0,\lambda) & 0 & 0 & f_{31}(0,\lambda) & f_{32}(0,\lambda) \\ f'_{11}(0,\lambda) & f'_{12}(0,\lambda) & f'_{21}(0,\lambda) & f'_{22}(0,\lambda) & f'_{31}(0,\lambda) & f'_{32}(0,\lambda) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}(\lambda,\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} A_{1,1}(\lambda,\boldsymbol{p}) \\ A_{1,2}(\lambda,\boldsymbol{p}) \\ A_{2,1}(\lambda,\boldsymbol{p}) \\ A_{2,2}(\lambda,\boldsymbol{p}) \\ A_{3,1}(\lambda,\boldsymbol{p}) \\ A_{3,2}(\lambda,\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, спектры исходной краевой задачи для оператора Штурма–Лиувилля (1)–(3) и введенного оператора $B(\lambda,\boldsymbol{p})$ эквивалентны.

Однородная система уравнений (8) относительно вектора $\boldsymbol{A}(\lambda, \boldsymbol{p})$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю. Следовательно, нахождение собственных значений краевой задачи (1)–(3) сведено к решению уравнения

$$\det\big(B(\lambda, \boldsymbol{p})\big) = 0, \tag{9}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned}
&- b_{11}(l_1,\lambda)b_{21}(l_2,\lambda)b_{31}(l_3,\lambda)\big(f_{22}(0,\lambda)f_{32}(0,\lambda)f'_{12}(0,\lambda) - f_{12}(0,\lambda)f_{22}(0,\lambda)f'_{32}(0,\lambda) - \\
&\qquad\qquad - f_{12}(0,\lambda)f_{32}(0,\lambda)f'_{22}(0,\lambda)\big) + \\
&+ b_{11}(l_1,\lambda)b_{21}(l_2,\lambda)b_{32}(l_3,\lambda)\big(f_{22}(0,\lambda)f_{31}(0,\lambda)f'_{12}(0,\lambda) - f_{12}(0,\lambda)f_{22}(0,\lambda)f'_{31}(0,\lambda) - \\
&\qquad\qquad - f_{12}(0,\lambda)f_{31}(0,\lambda)f'_{22}(0,\lambda)\big) + \\
&+ b_{11}(l_1,\lambda)b_{22}(l_2,\lambda)b_{31}(l_3,\lambda)\big(f_{21}(0,\lambda)f_{32}(0,\lambda)f'_{12}(0,\lambda) - f_{12}(0,\lambda)f_{21}(0,\lambda)f'_{32}(0,\lambda) - \\
&\qquad\qquad - f_{12}(0,\lambda)f_{32}(0,\lambda)f'_{21}(0,\lambda)\big) - \\
&- b_{11}(l_1,\lambda)b_{22}(l_2,\lambda)b_{32}(l_3,\lambda)\big(f_{21}(0,\lambda)f_{31}(0,\lambda)f'_{12}(0,\lambda) - f_{12}(0,\lambda)f_{21}(0,\lambda)f'_{31}(0,\lambda) - \\
&\qquad\qquad - f_{12}(0,\lambda)f_{31}(0,\lambda)f'_{21}(0,\lambda)\big) + \\
&+ b_{12}(l_1,\lambda)b_{21}(l_2,\lambda)b_{31}(l_3,\lambda)\big(f_{22}(0,\lambda)f_{32}(0,\lambda)f'_{11}(0,\lambda) - f_{11}(0,\lambda)f_{22}(0,\lambda)f'_{32}(0,\lambda) - \\
&\qquad\qquad - f_{11}(0,\lambda)f_{32}(0,\lambda)f'_{22}(0,\lambda)\big) - \\
&- b_{12}(l_1,\lambda)b_{21}(l_2,\lambda)b_{32}(l_3,\lambda)\big(f_{22}(0,\lambda)f_{31}(0,\lambda)f'_{11}(0,\lambda) - f_{11}(0,\lambda)f_{22}(0,\lambda)f'_{31}(0,\lambda) - \\
&\qquad\qquad - f_{11}(0,\lambda)f_{31}(0,\lambda)f'_{22}(0,\lambda)\big) - \\
&- b_{12}(l_1,\lambda)b_{22}(l_2,\lambda)b_{31}(l_3,\lambda)\big(f_{21}(0,\lambda)f_{32}(0,\lambda)f'_{11}(0,\lambda) - f_{11}(0,\lambda)f_{21}(0,\lambda)f'_{32}(0,\lambda) - \\
&\qquad\qquad - f_{11}(0,\lambda)f_{32}(0,\lambda)f'_{21}(0,\lambda)\big) + \\
&+ b_{12}(l_1,\lambda)b_{22}(l_2,\lambda)b_{32}(l_3,\lambda)\big(f_{21}(0,\lambda)f_{31}(0,\lambda)f'_{11}(0,\lambda) - f_{11}(0,\lambda)f_{21}(0,\lambda)f'_{31}(0,\lambda) - \\
&\qquad\qquad - f_{11}(0,\lambda)f_{31}(0,\lambda)f'_{21}(0,\lambda)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку $f_{ki}(l_k,\lambda)$, $f_{ki}(0,\lambda)$, $i=\overline{1,2}$, $k=\overline{1,3}$, — целые функции относительно λ, то, согласно (7), $b_{ki}(l_k,\lambda)$, $f'_{ki}(0,\lambda)$, $i=\overline{1,2}$, $k=\overline{1,3}$ — тоже целые функции относительно λ. Следовательно, собственные значения краевой задачи (1)–(3) являются нулями целой функции $\det\big(B(\lambda,\boldsymbol{p})\big)$ относительно λ. Отсюда непосредственно следует дискретность спектра.

Для доказательства вещественности и положительности спектра краевой задачи (1)–(3) представим ее в сепарабельном гильбертовом пространстве $H = L_2(0;l_1)\times L_2(0;l_2)\times L_3(0;l_3)\times\mathbb{C}^3$ элементов вида $\widehat{y} = \big(y_1(x_1), y_2(x_2), y_3(x_3), c_1, c_2, c_3\big)$ со скалярным произведением $(\widehat{y},\widehat{z}) = \sum\limits_{i=1}^{3}\left(\int\limits_0^{l_k} y_k(x_k)\overline{z}_k(x_k)dx_k + c_i\overline{d}_i\right)$, где $\widehat{z} = \big(z_1(x_1), z_2(x_2), z_3(x_3), d_1, d_2, d_3\big)$.

Во введенном пространстве краевая задача (1)–(3) может быть записана в виде $L_1\widetilde{y} = \lambda L_2\widetilde{y}$, где

$$L_1\widetilde{y} = \begin{pmatrix} -\big(a_1(x_1){y_1}'(x_1;\lambda)\big)' \\ -\big(a_2(x_2){y_2}'(x_2;\lambda)\big)' \\ -\big(a_3(x_3){y_3}'(x_3;\lambda)\big)' \\ a_1(l_1)\big(y_1'(l_1;\lambda)+p_{11}y_1(l_1;\lambda)\big) \\ a_2(l_2)\big(y_2'(l_2;\lambda)+p_{21}y_2(l_2;\lambda)\big) \\ a_3(l_3)\big(y_3'(l_3;\lambda)+p_{31}y_3(l_3;\lambda)\big) \end{pmatrix};\quad L_2\widetilde{y} = \begin{pmatrix} a_1(x_1)y_1(x_1;\lambda) \\ a_2(x_1)y_2(x_2;\lambda) \\ a_3(x_1)y_3(x_3;\lambda) \\ -p_{12}a_1(l_1)y_1(l_1;\lambda) \\ -p_{22}a_2(l_2)y_2(l_2;\lambda) \\ -p_{32}a_3(l_3)y_3(l_3;\lambda) \end{pmatrix};\quad \widetilde{y} = \begin{pmatrix} y_1(x_1;\lambda) \\ y_2(x_2;\lambda) \\ y_3(x_3;\lambda) \\ y_1(l_1;\lambda) \\ y_2(l_2;\lambda) \\ y_3(l_3;\lambda) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что операторы $L_i : D_{L_i}\to H$, $i=\overline{1,2}$, где $D_{L_1} = C^2(0;l_1)\times C^2(0;l_2)\times C^2(0;l_3)\times\mathbb{C}^3$, $D_{L_2} = H$ являются самосопряженными и положительно определенными.

Если $y_k(x_k)$ и $\overline{z}_k(x_k)$ — различные решения краевой задачи (1)–(3), то в силу первого из условий в общем узле (3) справедливы равенства $y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=y_0$, $\overline{z_1}(0)=\overline{z_2}(0)=\overline{z_3}(0)=z_0$.

Если $t_k(x_k) = y_k(x_k)a_k(0)$ тоже является решением задачи (1)–(3), то это условие примет вид $y_1(0)a_1(0)=y_2(0)a_2(0)=y_3(0)a_3(0)$, а значит, $a_1(0)=a_2(0)=a_3(0)=a_0$.

Тогда в силу второго из условий в общем узле (3) справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{3} a_k(0) y_k(0) \overline{z}'_k(0) = a_0 y_0 \sum_{k=1}^{3} \overline{z}'_k(0) = 0,\\
&\sum_{k=1}^{3} a_k(0) y'_k(0) \overline{z}_k(0) = a_0 z_0 \sum_{k=1}^{3} y'_k(0) = 0,\\
&\sum_{k=1}^{3} a_k(0) y'_k(0) y_k(0) = a_0 y_0 \sum_{k=1}^{3} y'_k(0) = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Учтем соотношения (10) при доказательстве самосопряженности и положительности операторов L_1, L_2:

$$
\begin{aligned}
(L_1\widetilde{y}, \widetilde{z}) &= \sum_{k=1}^{3} \left[-\int_0^{l_k} \big(a_k(x_k) y'_k(x_k)\big)' \overline{z}_k(x_k) dx_k + a_k(l_k)\big(y'_k(l_k) + p_{k1} y_k(l_k)\big)\overline{z}_k(l_k) \right] =\\
&= \sum_{k=1}^{3} \left[\int_0^{l_k} a_k(x_k) y'_k(x_k) \overline{z}'_k(x_k) dx_k - a_k(x_k) y'_k(x_k) \overline{z}_k(x_k)\Big|_0^{l_k} + a_k(l_k)\big(y'_k(l_k) + p_{k1} y_k(l_k)\big)\overline{z_k}(l_k) \right] =\\
&= \sum_{k=1}^{3} \left[\int_0^{l_k} a_k(x_k) y'_k(x_k) \overline{z}'_k(x_k) dx_k + p_{k1} a_k(l_k) y_k(l_k) \overline{z}_k(l_k) + a_k(0) y'_k(0) \overline{z}_k(0) \right],\\
(\widetilde{y}, L_1\widetilde{z}) &= \sum_{k=1}^{3} \left[-\int_0^{l_k} y_k(x_k)\big(a_k(x_k) \overline{z}'_k(x_k)\big)' dx_k + y_k(l_k) a_k(l_k)\big(\overline{z}'_k(l_k) + p_{k1} \overline{z}_k(l_k)\big) \right] =\\
&= \sum_{k=1}^{3} \left[\int_0^{l_k} a_k(x_k) \overline{z}'_k(x_k) y'_k(x_k) dx_k - a_k(x_k) \overline{z}'_k(x_k) y_k(x_k) x\Big|_0^{l_k} + y_k(l_k) a_k(l_k)\big(\overline{z}'_k(l_k) + p_{k1} \overline{z}_k(l_k)\big) \right] =\\
&= \sum_{k=1}^{3} \left[\int_0^{l_k} a_k(x_k) y'_k(x_k) \overline{z}'_k(x_k) dx_k + p_{k1} a_k(l_k) y_k(l_k) \overline{z}_k(l_k) + a_k(0) y_k(0) \overline{z}'_k(0) \right],\\
(L_2\widetilde{y}, \widetilde{z}) &= \sum_{k=1}^{3} \left(\int_0^{l_k} b_k(x_k) y_k(x_k) \overline{z}_k(x_k) dx_k - p_{k2} a_k(l_k) y_k(l_k) \overline{z}_k(l_k) \right),\\
(\widetilde{y}, L_2\widetilde{z}) &= \sum_{k=1}^{3} \left(\int_0^{l_k} y_k(x_k) b_k(x_k) \overline{z}_k(x_k) dx_k - y_k(l_k) p_{k2} a_k(l_k) \overline{z}_k(l_k) \right).
\end{aligned}
$$

Следствием самосопряженности операторов L_1, L_2 является тот факт, что их спектры вещественные; следовательно, спектр краевой задачи (1)–(3) для оператора Штурма–Лиувилля тоже вещественный.

В силу наложенных ограничений, а именно $a_k(x_k) > 0$, $b(x_k) > 0$, $x_k \in (0; l_k)$, $p_{k1} > 0$, $p_{k2} < 0$, $k = \overline{1,3}$, справедливы неравенства

$$
\begin{aligned}
(L_1\widetilde{y}, \widetilde{y}) &= \sum_{k=1}^{3} \left[-\int_0^{l_k} \big(a_k(x_k) y'_k(x_k)\big)' y_k(x_k) dx_k + a_k(l_k)\big(y'_k(l_k) + p_{k1} y_k(l_k)\big) y_k(l_k) \right] =\\
&= \sum_{k=1}^{3} \left[\int_0^{l_k} a_k(x_k) \big|y'_k(x_k)\big|^2 dx_k - a_k(x_k) y'_k(x_k) y_k(x_k)\Big|_0^{l_k} + a_k(l_k) y'_k(l_k) y_k(l_k) + p_{k1} a_k(l_k) \big|y_k(l_k)\big|^2 \right] =\\
&= \sum_{k=1}^{3} \left[\int_0^{l_k} a_k(x_k) \big|y'_k(x_k)\big|^2 dx_k + a_k(0) y'_k(0) y_k(0) + p_{k1} \big|y_k(l_k)\big|^2 \right] > 0,
\end{aligned}
$$

$$(L_2\widetilde{y},\widetilde{y}) = \sum_{k=1}^{3}\left(\int_0^{l_k} b_k(x_k)\big|y_k(x_k)\big|^2dx_k - p_{k2}a_k(l_k)\big|y_k(l_k)\big|^2\right) > 0.$$

Рассмотрим произвольное собственное значение краевой задачи (1)–(3). В силу (4) оно может быть записано в виде $\lambda = \dfrac{(L_1\widetilde{y},\widetilde{y})}{(L_2\widetilde{y},\widetilde{y})}$, а значит, является положительным. Теорема доказана.

Однако собственные значения краевой задачи (1)–(3) "монотонно" зависят от параметров граничных условий p_{k1} и p_{k2}, $k=\overline{1,3}$. В работе [4] доказана соответствующая теорема и получены соотношения

$$\frac{\partial\lambda(\boldsymbol{p})}{\partial p_{k1}} = \frac{\big|y_k(l_k)\big|^2}{(L_2\widetilde{y},\widetilde{y})} > 0, \quad \frac{\partial\lambda(\boldsymbol{p})}{\partial p_{k2}} = \frac{\lambda\big|y_k(l_k)\big|^2}{(L_2\widetilde{y},\widetilde{y})} > 0, \quad k=\overline{1,3}.$$

Свойство монотонности является важным для данного класса обратных спектральных задач, поскольку именно на нем основан представленный ниже численный метод их решения.

3. Решение обратной спектральной задачи для оператора в конечномерном пространстве. Приведем методы решения модельной обратной спектральной задачи для оператора Штурма–Лиувилля вида (4) с граничными условиями (2) и условиями в общем узле (3). При доказательстве теоремы получен вид оператора $B(\lambda,\boldsymbol{p})$, спектр которого совпадает со спектром краевой задачи (1)–(3).

Решение дифференциального уравнения (4) с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y_k(x_k) = A_{k1}\sin\frac{\sqrt{\lambda}x_k}{a_k} + A_{k2}\cos\frac{\sqrt{\lambda}x_k}{a_k}, \quad k=\overline{1,3}.$$

Тогда оператор $B(\lambda,\boldsymbol{p})$, заданный в конечномерном действительном евклидовом пространстве E^6, может быть представлен следующим образом: $B(\lambda,\boldsymbol{p}) = B_0(\lambda) + \sum\limits_{k=1}^{3}\big(p_{k1}B_{k1}(\lambda) + p_{k2}B_{k2}(\lambda)\big)$, где

$$B_0(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\lambda}}{a_1}\cos\frac{\sqrt{\lambda}l_1}{a_1} & -\frac{\sqrt{\lambda}}{a_1}\sin\frac{\sqrt{\lambda}l_1}{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\lambda}}{a_2}\cos\frac{\sqrt{\lambda}l_2}{a_2} & -\frac{\sqrt{\lambda}}{a_2}\sin\frac{\sqrt{\lambda}l_2}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\lambda}}{a_3}\cos\frac{\sqrt{\lambda}l_3}{a_3} & -\frac{\sqrt{\lambda}}{a_3}\sin\frac{\sqrt{\lambda}l_3}{a_3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{\lambda}}{a_1} & 0 & \frac{\sqrt{\lambda}}{a_2} & 0 & \frac{\sqrt{\lambda}}{a_3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{11}(\lambda,\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{\lambda}l_1}{a_1} & \cos\frac{\sqrt{\lambda}l_1}{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{21}(\lambda,\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\frac{\sqrt{\lambda}l_2}{a_2} & \cos\frac{\sqrt{\lambda}l_2}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{31}(\lambda,\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\frac{\sqrt{\lambda}l_3}{a_3} & \cos\frac{\sqrt{\lambda}l_3}{a_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} B_{22}(\lambda,\boldsymbol{p}) &= \lambda B_{21}(\lambda,\boldsymbol{p}), \\ B_{12}(\lambda,\boldsymbol{p}) &= \lambda B_{11}(\lambda,\boldsymbol{p}), \\ B_{32}(\lambda,\boldsymbol{p}) &= \lambda B_{31}(\lambda,\boldsymbol{p}). \end{aligned}$$

Таким образом, обратная спектральная задача для краевой задачи (4), (2)–(3) сведена к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора в конечномерном евклидовом пространстве E^6. Она состоит в нахождении такого вектора $\boldsymbol{p} = (p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{12}, p_{22}, p_{32})$, при котором наперед заданные числа λ_1, λ_2, …, λ_6 являются собственными значениями оператора $B(\lambda, \boldsymbol{p})$.

Последняя задача эквивалента решению системы 6 алгебраических уравнений относительно 6 неизвестных координат вектора $\boldsymbol{p}$:

$$B(\lambda_j, \boldsymbol{p})\boldsymbol{A}(\lambda_j) = \left[B_0(\lambda_j) + \sum_{k=1}^{3}\big(p_{k1}B_{k1}(\lambda_j) + p_{k2}B_{k2}(\lambda_j)\big)\right]\boldsymbol{A}(\lambda_j) = 0, \quad j = \overline{1,6}, \tag{11}$$

или в развернутом виде

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\dfrac{\sqrt{\lambda_j}}{a_k}\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_j}l_k}{a_k} - (p_{k1} + \lambda_j p_{k2})\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_j}l_k}{a_k}}{a_k\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_k}\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_j}l_k}{a_k} + (p_{k1} + \lambda_j p_{k2})\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_j}l_k}{a_k}\right)} = 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Стандартные средства пакетов прикладных программ для вычислений, таких как MATLAB и Maple, с решением системы (11) не справляются.

В качестве альтернативного метода может быть представлен метод сведения многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора к системе прямых спектральных задач. В работе [1] показано, что если ненулевые векторы $\boldsymbol{A}(\lambda_j) \in E^6$, $j = \overline{1,6}$, и числа p_{ki}, $k = \overline{1,3}$, $i = \overline{1,2}$, удовлетворяют системе уравнений (4), то векторы $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}(\lambda_1)\bigotimes\boldsymbol{A}(\lambda_2)\bigotimes\ldots\bigotimes\boldsymbol{A}(\lambda_6)$ и числа p_{ki}, $k = \overline{1,3}$, $i = \overline{1,2}$, являются решением системы

$$\begin{cases} (\Delta_{11} - p_{11}\Delta_0)\boldsymbol{X} = 0, & (\Delta_{12} + p_{12}\Delta_0)\boldsymbol{X} = 0,\\ (\Delta_{21} - p_{21}\Delta_0)\boldsymbol{X} = 0, & (\Delta_{22} + p_{22}\Delta_0)\boldsymbol{X} = 0,\\ (\Delta_{31} - p_{31}\Delta_0)\boldsymbol{X} = 0, & (\Delta_{32} + p_{32}\Delta_0)\boldsymbol{X} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Операторы Δ_0, Δ_{ki}, $k = \overline{1,3}$, $i = \overline{1,2}$, действуют в пространстве $H_6 = \underbrace{E^6\bigotimes\ldots\bigotimes E^6}_{6}$, которое представляет собой тензорное произведение 6 экземпляров евклидовых пространств E^6, имеют вид тензорного определителя, например:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} B_{11}(\lambda_1) & B_{12}(\lambda_1) & B_{21}(\lambda_1) & B_{22}(\lambda_1) & B_{31}(\lambda_1) & B_{32}(\lambda_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ B_{11}(\lambda_6) & B_{12}(\lambda_6) & B_{21}(\lambda_6) & B_{22}(\lambda_6) & B_{31}(\lambda_6) & B_{32}(\lambda_6) \end{vmatrix}_{\otimes}.$$

Остальные операторы Δ_{ki}, $k = \overline{1,3}$, $i = \overline{1,2}$, получаются заменой в определителе Δ_0 столбца $\big(B_{ki}(\lambda_1), \ldots, B_{ki}(\lambda_6)\big)$ на столбец $\big(B_0(\lambda_1), \ldots, B_0(\lambda_6)\big)$.

Поскольку введенные операторы являются сильно разреженными, при таком способе восстановления параметров граничных условий (2) остается открытым вопрос об устойчивости полученной системы (12).

4. Численное решение многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора. Рассмотрим метод численного построения решений многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора $B(\lambda, \boldsymbol{p})$ в конечномерном евклидовом пространстве E^6. Этот метод основан на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий и является аналогом метода деления отрезка пополам.

Введем в рассмотрение конус векторов $K = \big\{\boldsymbol{x} \in R^6 : x_k \geqslant 0 \text{ или } x_k \leqslant 0\big\}$ и конусный отрезок $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_K = \{\boldsymbol{x} \in R^6 : a_k \leqslant x_k \leqslant b_k\}$.

Обозначим через $\mu_1(\boldsymbol{p})$, $\mu_2(\boldsymbol{p})$, …, $\mu_6(\boldsymbol{p})$ собственные значения оператора $B(\lambda, \boldsymbol{p})$ при некотором значении вектора $\boldsymbol{p} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_K$.

Функция $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{p}) = \big(\mu_1(\boldsymbol{p}), \mu_2(\boldsymbol{p}), \ldots, \mu_6(\boldsymbol{p})\big) : K \to K$ обладает свойствами непрерывной дифференцируемости $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{p}) \in C^1(K)$ и “монотонности”:

$$\frac{\partial\mu_j(\boldsymbol{p})}{\partial p_{k1}} \neq 0, \quad \frac{\partial\mu_j(\boldsymbol{p})}{\partial p_{k2}} \neq 0, \quad k = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,6}.$$

Областью несуществования решений многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6) \in R^6$ будем называть область, в которой нет вектора $\boldsymbol{p} \in R^6$, такого, что $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\lambda}$.

В силу монотонности функции $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{p})$ конусный отрезок $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_K$ является областью несуществования решений многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных, если $\boldsymbol{\lambda} \notin \big[\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{b})\big]_K$.

Определим конусный отрезок $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_K$, в котором будем искать решение многопараметрической обратной спектральной задачи при некоторых спектральных данных $\boldsymbol{\lambda}$.

Возьмем точку $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_K$, которая будет являться центром конусного отрезка. Три точки образовали два конусных отрезка $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]_K$ и $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}]_K$, которые являются подобластями конусного отрезка $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_K$. Поскольку у 6-мерного конусного отрезка $2^6 = 64$ вершины, то можно сформировать 64 подобласти $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_K^{(i)}$, $i = \overline{1, 64}$, таких, что $\bigcap\limits_{i=1}^{64} [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_K^{(i)} = \boldsymbol{c}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{64} [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_K^{(i)} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_K$.

Далее, в каждом конусном отрезке $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_K^{(i)}$, $i = \overline{1, 64}$, проверим выполнения условия $\boldsymbol{\lambda} \notin \big[\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{b})\big]_K^{(i)}$. Если условие выполняется, то рассматриваемый конусный отрезок не содержит решений; если же условие не выполняется, то по вышеописанной схеме выполняем его разбиение и переходим к следующему конусному отрезку.

Продолжив данную процедуру конечное число раз, получим локализацию областей существования решения с любой необходимой точностью. Применяя итерационный метод для каждой локализованной области существования, можно уточнить решения поставленной задачи до требуемой точности.

Предложенный численный метод реализован в пакете MATLAB. Тестирование реализованного скрипта дало удовлетворительные результаты. Кроме того, данный метод масштабируется на большее количество параметров обратной спектральной задачи. Приведем тестовый пример. Пусть

$$\begin{array}{llllll} a_1 = 1, & a_2 = 1, & a_3 = 1, & l_1 = 3, & l_2 = 2, & l_3 = 1, \\ p_{11} = 1, & p_{12} = -2, & p_{21} = 3, & p_{22} = -4, & p_{31} = 5, & p_{32} = -6. \end{array} \tag{13}$$

Тогда решение прямой спектральной задачи эквивалентно решению уравнения (9) и имеет вид

$$\lambda_1 = 0.5572, \quad \lambda_2 = 0.9367, \quad \lambda_3 = 0.9888, \quad \lambda_4 = 5.4950, \quad \lambda_5 = 20.1710, \quad \lambda_6 = 40.2343.$$

В результате выполнения скрипта, реализующего предложенный численный метод, получены решения обратной спектральной задачи при заданных выше значениях $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{array}{llllll}
p_1 = 0.9202806, & p_2 = -1.6117790, & p_3 = 5.8754782, & p_4 = -6.3753988, & p_5 = 3.4632650, & p_6 = -5.7611388, \\
p_1 = 1.0000000, & p_2 = -2.0000000, & p_3 = 3.0000000, & p_4 = -4.0000000, & p_5 = 5.0000000, & p_6 = -6.0000000, \\
p_1 = 3.5341756, & p_2 = -3.3950979, & p_3 = 0.7016622, & p_4 = -2.1853552, & p_5 = 116.5255856, & p_6 = -140.3812874, \\
p_1 = 3.5360769, & p_2 = -3.3944156, & p_3 = 0.7005594, & p_4 = -2.1840583, & p_5 = 136.3194489, & p_6 = -164.2904215, \\
p_1 = 4.5108011, & p_2 = -4.9345428, & p_3 = 0.7509959, & p_4 = -2.0055176, & p_5 = 5.1081971, & p_6 = -6.2798007, \\
p_1 = 8.2942454, & p_2 = -11.9247083, & p_3 = 0.5891226, & p_4 = -1.6078367, & p_5 = 6.1591913, & p_6 = -5.9035039, \\
p_1 = 33.1058461, & p_2 = -29.3652399, & p_3 = 1.0722497, & p_4 = -1.6223425, & p_5 = 2.2705705, & p_6 = -5.8019788.
\end{array}$$

Одно из них совпадает с заданными в (13) параметрами граничных условий.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (код проекта 15–01–01095а) и госзадания Минобрнауки РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валеев Н.Ф.* Обратная спектральная задача для конечномерных операторов // Уфимский математический журнал. 2010. **2**, № 2. 3–19.
2. *Валеев Н.Ф., Рабцевич С.А., Нугуманов Э.Р.* О задаче идентификации граничных условий оператора Штурма–Лиувилля по спектру // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 3. 9–12.
3. *Глэдвелл Г.М.Л.* Обратные задачи теории колебаний. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008.
4. *Мартынова Ю.В.* Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля на геометрическом графе // Вестник Башкирского университета. 2011. **16**, № 1. 4–10.

5. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2005.
6. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф.* Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Доклады РАН. 2009. **426**, № 4. 457–460.

Поступила в редакцию
17.05.2016

Solution of a Model Inverse Spectral Problem for the Sturm–Liouville Operator on a Graph

N. F. Valeev [1], **Yu. V. Martynova** [2], **and Ya. T. Sultanaev** [3]

[1] *Institute of Mathematics with Computer Center, Russian Academy of Sciences; ulitsa Chernyshevskogo 112, Ufa, 450008, Russia; Ph.D., Senior Scientist, Associate Professor, e-mail: valeevnf@yandex.ru*

[2] *RN-UfaNIPIneft Company; ulitsa Bekhtereva 3, Ufa, 450103, Russia; Leading Specialist, e-mail: busa1987@mail.ru*

[3] *Akmullah Bashkir State Pedagogical University, Faculty of Physics and Mathematics; ulitsa Oktyabrskoy Revolutsii 3, Ufa, 450000, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: sultanaevYT@gmail.com*

Received May 17, 2016

Abstract: A model inverse spectral problem for the Sturm–Liouville operator on a geometric graph is studied. This problem consists in finding N parameters of the boundary conditions using its N known eigenvalues. It is shown that the problem under consideration possess the property of a monotonic dependence of its eigenvalues on the parameters of the boundary conditions. This problem is reduced to a multiparameter inverse spectral problem for the operator in a finite-dimensional space. A new algorithm for the numerical solution of this problem is proposed.

Keywords: spectral theory of differential operators, geometric graph, Sturm–Liouville operator, spectral problems.

References

1. N. F. Valeev, "The Multiparameter Inverse Spectral Problems for Finite-Dimensional Operators," Ufimsk. Mat. Zh. **2** (2), 3–19 (2010).

2. N. F. Valeev, S. A. Rabtsevich, and E. R. Nugumanov, "About the Problem of Identification of the Sturm–Liouville Operator's Boundary Conditions by the Spectrum," Sistemy Upravl. Inform. Tekhnol., No. 3, 9–12 (2009).

3. G. M. L. Gladwell, *Inverse Problems in Vibration* (Kluwer, Dordrecht, 2004; Inst. Komp'yut. Issled., Izhevsk, 2008).

4. Yu. V. Martynova, "Model Inverse Spectral Problem for Sturm–Liouville Operator on Geometrical Graph," Vestn. Bashkir Univ. **16** (1), 4–10 (2011).

5. Yu. V. Pokornyi, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, and S. A. Shabrov, *Differential Equations on Geometric Graphs* (Fizmatlit, Moscow, 2005) [in Russian].

6. V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, and N. F. Valeev, "Multiparameter Inverse Spectral Problems and Their Applications," Dokl. Akad. Nauk **426** (4), 457–460 (2009) [Dokl. Math. **79** (3), 390–393 (2009)].