УДК 519.62 doi 10.26089/NumMet.v17r212

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РЯДОВ ЧЕБЫШЁВА

О. Б. Арушанян[1], **С. Ф. Залеткин**[2]

Рассмотрен численно-аналитический метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных от искомых функций. Метод основан на приближенном представлении решения и его производной в виде частичных сумм смещенных рядов Чебышёва. Коэффициенты рядов определяются с помощью итераций с применением квадратурной формулы Маркова. Метод может быть использован для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с более высокой точностью и с более крупным шагом дискретизации по сравнению с традиционными численными методами типа Рунге–Кутта и Адамса.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, приближенные аналитические методы, численные методы, ортогональные разложения, смещенные ряды Чебышёва, квадратурные формулы Маркова.

1. Введение. Рассматривается задача Коши для нелинейной системы M обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от искомых функций:

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X. \tag{1}$$

Предполагается, что функция $f(x,y)$ непрерывна в области определения системы вместе с частными производными до некоторого порядка. Предполагается также, что на отрезке $[x_0,\, x_0+X]$ задача Коши (1) имеет единственное решение.

В настоящей статье описывается приближенный метод решения сформулированной задачи, основанный на ортогональных разложениях решения и его производной в ряды по смещенным многочленам Чебышёва первого рода. В качестве приближения к решению и его производной используются частичные суммы этих рядов. Частичные суммы рядов Чебышёва для рассматриваемых функций не только являются многочленами наилучшего среднеквадратичного приближения этих функций, но и дают для них достаточно точные равномерные приближения. Тем самым в предлагаемом методе интегрирование дифференциальных уравнений выполняется с помощью многочленов, близких к многочленам наилучшего равномерного приближения. В этом заключается существенное отличие нашего метода от традиционных численных методов интегрирования дифференциальных уравнений, которые строятся на основе степенных разложений, применяемых при малых значениях шага интегрирования.

2. Разложение решения задачи Коши и его производной в ряд Чебышёва. Выберем $h \leqslant X$ и рассмотрим на частичном сегменте $[x_0,\, x_0+h]$ задачу Коши (1). Пусть

$$\Phi(\alpha) = F(x_0+\alpha h) = f\bigl(x_0+\alpha h,\, y(x_0+\alpha h)\bigr), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Из допущения о гладкости правой части в (1) следует равномерная на $[x_0,\, x_0+h]$ сходимость рядов Чебышёва для решения

$$y(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha), \qquad a_i^*[y] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{y(x_0+\alpha h)T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\,d\alpha \tag{2}$$

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: arush@srcc.msu.ru

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: iraz@srcc.msu.ru

и его производной

$$\Phi(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha), \qquad a_i^*[\Phi] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\Phi(\alpha) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha \tag{3}$$

(штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем $1/2$). Для равномерной сходимости достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ имела непрерывные частные производные по x и y первого порядка. Коэффициенты Чебышёва решения $y(x_0 + \alpha h)$ связаны с коэффициентами Чебышёва правой части $\Phi(\alpha)$ следующими соотношениями:

$$a_i^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{4i}\left(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\right), \qquad i > 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\, a_0^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = y_0 + \frac{h}{4}\left(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}\, a_1^*[\Phi]\right) - \frac{h}{2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2 - 1}\, a_j^*[\Phi]. \tag{5}$$

Если коэффициенты разложения (3) известны, то коэффициенты разложения решения могут быть легко получены по формулам (4), (5). Перейдем к выводу уравнений, которым удовлетворяют приближенные значения коэффициентов Чебышёва правой части системы (1).

3. Вывод уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части. Рассмотрим k-ю частичную сумму ряда Чебышёва для функции $\Phi(\alpha)$:

$$S_k(\alpha, \Phi) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha).$$

Вместо точных коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ используем их приближенные значения. Для этого вычислим входящие в частичную сумму (3) коэффициенты $a_i^*[\Phi]$ по квадратурной формуле Маркова [1–4] с одним наперед заданным узлом $\alpha_0^{(1)} = 0$, с k нефиксированными узлами $\alpha_j^{(1)} = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big)$, $j = 1, \ldots, k$, и с весовой функцией $1/\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$:

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \Phi(\alpha_j^{(1)}) T_i^*(\alpha_j^{(1)}). \tag{6}$$

Будем рассматривать полученную таким образом частичную сумму как многочлен $J_k(\alpha)$:

$$J_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[J_k] T_i^*(\alpha). \tag{7}$$

Этот многочлен является интерполяционным многочленом для $\Phi(\alpha)$ с узлами интерполирования, совпадающими с абсциссами $\alpha_j^{(1)}$, $j = 0, 1, \ldots, k$, использованной квадратурной формулы Маркова [4, 6].

Если для вычисления коэффициентов $a_i^*[\Phi]$ в (3) использовать квадратурную формулу Маркова с двумя наперед заданными узлами $\alpha_0^{(2)} = 0$ и $\alpha_{k+1}^{(2)} = 1$, с k нефиксированными узлами $\alpha_j^{(2)} = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos\frac{j\pi}{k+1}\Big)$, $j = 1, \ldots, k$, и с весовой функцией $1/\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$:

$$a_i^*[L_k] = \frac{2}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}'' \Phi(\alpha_j^{(2)}) T_i(\alpha_j^{(2)}), \tag{8}$$

то полученная таким же способом частичная сумма

$$L_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[L_k] T_i^*(\alpha) \tag{9}$$

является многочленом степени k наилучшего равномерного приближения для $\Phi(\alpha)$ на множестве узлов $\alpha_j^{(2)}$, $j = 0, 1, \ldots, k+1$, этой квадратурной формулы [5, 6] (два штриха у знака суммы в (8) означают, что слагаемые с индексами 0 и $k+1$ берутся с дополнительным множителем $1/2$).

Аппроксимируем функцию $\Phi(\alpha)$ многочленом $P_k(\alpha)$, где $P_k(\alpha) = J_k(\alpha)$ или $P_k(\alpha) = L_k(\alpha)$. Погрешность аппроксимации состоит из остаточного члена $r_k(\alpha, \Phi)$ ряда Чебышёва и ошибок R_i в приближенных значениях коэффициентов Чебышёва:

$$\Phi(\alpha) - P_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi). \tag{10}$$

При этом если $P_k(\alpha) = J_k(\alpha)$, то погрешность приближенных значений коэффициентов имеет вид

$$R_i = R(\Phi T_i^*) = \frac{1}{2^{4k}(2k+1)!} \sum_{l=0}^{i} C_{2k+1}^l \Phi^{(2k+1-l)}(\eta) T_i^{*(l)}(\eta), \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Если $P_k(\alpha) = L_k(\alpha)$, то погрешность приближенных значений коэффициентов имеет вид

$$R_i = R(\Phi T_i) = -\frac{1}{2^{4k+2}(2k+2)!} \sum_{l=0}^{i} C_{2k+2}^l \Phi^{(2k+2-l)}(\eta) T_i^{*(l)}(\eta), \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Применяя оценки для остатков ряда Чебышёва и квадратурной формулы Маркова [5–8], можно показать, что суммарная погрешность (10) имеет порядок $O(h^{k+1})$ при $h \to 0$. Таким образом, справедливо равенство

$$y'(x) = y'(x_0 + \alpha h) = P_k(\alpha) + O(h^{k+1}), \qquad h \to 0,$$

интегрируя которое на $[x_0, x]$, $x \leqslant x_0 + h$, имеем

$$y(x) = y(x_0) + h \int_0^{\alpha} P_k(\xi)\, d\xi + O(h^{k+2}). \tag{11}$$

Отбросим остаточный член, а оставшуюся правую часть

$$U(x_0 + \alpha h) = y(x_0) + h \int_0^{\alpha} P_k(\xi)\, d\xi$$

разложим по системе смещенных многочленов Чебышёва. Тогда

$$y(x) \approx U(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[U] T_i^*(\alpha). \tag{12}$$

Коэффициенты $a_i^*[U]$ в (12) вычисляются с помощью соотношений (4) при $i = 1, \ldots, k+1$ и (5) при $i = 0$, в левых частях которых надо y заменить на U, а в правых частях необходимо $a_l^*[\Phi]$ поменять на коэффициенты Чебышёва $a_l^*[P_k]$ многочлена $P_k(\alpha)$.

Подставим $U(x_0 + \alpha h)$ в правую часть дифференциального уравнения (1) вместо $y(x_0 + \alpha h)$. Тогда

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h,\, y(x_0 + \alpha h)\big) \approx f\big(x_0 + \alpha h,\, U(x_0 + \alpha h)\big) = \tilde{\Phi}(\alpha)$$

и

$$\Phi(\alpha) - \tilde{\Phi}(\alpha) = O(h^{k+2}).$$

Определим числа $a_i^*[\tilde{P}_k]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, и многочлен $\tilde{P}_k(\alpha)$ следующим способом. Если используется формула Маркова с одним фиксированным узлом, то

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \tilde{\Phi}(\alpha_j^{(1)}) T_i^*(\alpha_j^{(1)}). \tag{13}$$

Если используется формула Маркова с двумя фиксированными узлами, то

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' \tilde{\Phi}(\alpha_j^{(2)}) T_i^*(\alpha_j^{(2)}). \tag{14}$$

Пусть

$$\tilde{P}_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[\tilde{P}_k] T_i^*(\alpha).$$

Значения правой части $\tilde{\Phi}(\alpha_j^{(1)})$, $\tilde{\Phi}(\alpha_j^{(2)})$ в (13), (14) зависят от функции $U(x_0+\alpha h)$, которая, в свою очередь, зависит от коэффициентов Чебышёва $a_l^*[P_k]$. Поскольку точное решение $y(x_0+\alpha h)$ системы (1), а следовательно, и функция $\Phi(\alpha)$ нам не известны, то коэффициенты $a_i^*[P_k]$, совпадающие с $a_i^*[J_k]$ в (6), (7) или с $a_i^*[L_k]$ в (8), (9), являются неизвестными величинами. Будем определять коэффициенты Чебышёва функции $U(x_0+\alpha h) = \sum\limits_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[U] T_i^*(\alpha)$ с помощью соотношений (4), (5), в которых надо y заменить на U, а $a_l^*[\Phi]$ — на $a_l^*[\tilde{P}_k]$ из (13) или (14). Поэтому соотношения (13) и (14) представляют собой системы уравнений относительно коэффициентов $a_i^*[\tilde{P}_k]$.

Рассматривая $U(x_0+\alpha h)$ как функцию не только аргумента $x_0+\alpha h$, но и аргументов $a_0^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k]$, т.е. считая ее функцией нескольких переменных вида

$$U\big(x_0+\alpha h;\, a_0^*[\tilde{P}_k], a_1^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k]\big),$$

систему уравнений (13) можно представить таким способом:

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' f\big(x_j^{(1)}, U(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], a_1^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k])\big) T_i^*(\alpha_j^{(1)}), \tag{15}$$

где $x_j^{(1)} = x_0 + \alpha_j^{(1)} h$. Аналогично представляется система уравнений (14):

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' f\big(x_j^{(2)}, U(x_j^{(2)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], a_1^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k])\big) T_i^*(\alpha_j^{(2)}), \tag{16}$$

где $x_j^{(2)} = x_0 + \alpha_j^{(2)} h$. Обе системы (15) и (16) могут быть записаны в виде

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \varphi_i\big(a_0^*[\tilde{P}_k], a_1^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k]\big), \qquad i = 0, 1, \dots, k, \tag{17}$$

где φ_i — правая часть (15) или (16) соответственно. Система (17) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

4. Разрешимость системы уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части. Для поиска решения этой системы применúм уточненный принцип сжатых отображений.

Обозначим l-ю компоненту вектор-функции φ_i через φ_{li}, а n-ю компоненту вектора $a_m^*[\tilde{P}_k]$ через a_{nm}. Найдем частную производную $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$, где $i, m = 0, 1, \dots, k$ и $l, n = 1, 2, \dots, M$ (напомним, что M — число уравнений в системе (1)). Учитывая, что каждая компонента вектора U зависит от одноименной компоненты вектора $a_m^*[\tilde{P}_k]$, получаем для частной производной следующее выражение в случае квадратурной формулы Маркова (15) с одним фиксированным узлом:

$$\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f_l\big(x_j^{(1)}, U(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k])\big)}{\partial y_n} \, \frac{\partial U_n\big(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k]\big)}{\partial a_{nm}} \, T_i^*(\alpha_j^{(1)})\,.$$

Для квадратурной формулы Маркова с двумя фиксированными узлами имеем

$$\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' \frac{\partial f_l\big(x_j^{(2)}, U(x_j^{(2)};\, a_0^*[\tilde P_k],\, \dots,\, a_k^*[\tilde P_k])\big)}{\partial y_n} \, \frac{\partial U_n\big(x_j^{(2)};\, a_0^*[\tilde P_k],\, \dots,\, a_k^*[\tilde P_k]\big)}{\partial a_{nm}}\, T_i^*(\alpha_j^{(2)})\,.$$

Из (4), (5) заключаем, что $\dfrac{\partial U_n}{\partial a_{nm}} = O(h)$ при $h \to 0$; следовательно,

$$\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = O(h) \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{18}$$

Подставляя в (17) вместо $a_r^*[\tilde P_k]$ точные значения коэффициентов Чебышёва $a_r^*[\Phi]$ правой части $\Phi(\alpha)$ уравнения (1), получим

$$a_i^*[\Phi] = \varphi_i\big(a_0^*[\Phi], a_1^*[\Phi],\, \dots,\, a_k^*[\Phi]\big) + \rho_i. \tag{19}$$

Левую часть этого равенства можно представить в виде $a_i^*[P_k] + R_i$, величина φ_i в правой части равна $a_i^*[P_k] + O(h^{k+2})$. Так как остаточный член R_i квадратурной формулы Маркова для коэффициента $a_i^*[P_k]$ имеет порядок $O(h^{2k+s-i})$, где $s = 1$ для формулы Маркова с одним фиксированным узлом и $s = 2$ для формулы Маркова с двумя фиксированными узлами, то невязка, которая при этом получается, будет иметь порядок

$$\rho_i = R_i + O(h^{k+2}) = O(h^{2k+s-i}) + O(h^{k+2}) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

а именно $\rho_k = O(h^{k+1})$, $\rho_i = O(h^{k+2})$, $i = 0, 1,\, \dots,\, k-1$, при $s = 1$ и $\rho_i = O(h^{k+2})$, $i = 0, 1,\, \dots,\, k$, при $s = 2$. Если в уравнении (1) функция $f(x, y)$ не зависит от y, т.е. система (1) имеет форму $y' = f(x)$, то $\rho_i = O(h^{2k+s-i})$, $i = 0, 1,\, \dots,\, k$. Таким образом, имеем

$$\max_i \big| a_i^*[\Phi] - \varphi_i\big(a_0^*[\Phi], a_1^*[\Phi],\, \dots,\, a_k^*[\Phi]\big)\big| = O(h^{k+s}). \tag{20}$$

Из (18) и (20) следует, что если величину h выбрать достаточно малой, то, во-первых, невязку в (19) можно сделать сколь угодно малой и, во-вторых, можно добиться, чтобы какая-нибудь норма матрицы, составленной из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей частных производных $\max\Big|\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\Big|$, стала меньше единицы. Следовательно, система функций φ_i из (17) удовлетворяет условию Липшица с константой, меньшей единицы. Таким образом, при значениях h, для которых невязка в (19) мала и норма указанной выше матрицы меньше единицы, по уточненному принципу сжатых отображений система (17) имеет единственное решение и выполняется достаточное условие сходимости метода простых итераций [9, 10]. Последовательные приближения $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde P_k]$, $\nu = 0, 1,\, \dots$, определяемые по формулам

$$a_i^{*(\nu)}[U] = \frac{h}{4i}\,\big(a_{i-1}^{*(\nu)}[\tilde P_k] - a_{i+1}^{*(\nu)}[\tilde P_k]\big), \quad i = 1, 2,\, \dots,\, k+1, \quad a_{k+1}^{*(\nu)}[\tilde P_k] = a_{k+2}^{*(\nu)}[\tilde P_k] = 0,$$

$$\frac{1}{2}\, a_0^{*(\nu)}[U] = y_0 + \frac{h}{4}\,\Big(a_0^{*(\nu)}[\tilde P_k] - \frac{1}{2}\, a_1^{*(\nu)}[\tilde P_k]\Big) - \frac{h}{2} \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j}{j^2-1}\, a_j^{*(\nu)}[\tilde P_k],$$

$$U^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(2)} h) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^{*(\nu)}[U] T_i^*(\alpha_j^{(2)}), \quad j = 1, 2,\, \dots,\, k+1,$$

$$a_i^{*(\nu+1)}[\tilde P_k] = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' f\big(x_0 + \alpha_j^{(2)} h,\, U^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(2)} h)\big) T_i^*(\alpha_j^{(2)}), \quad i = 0, 1,\, \dots,\, k,$$

при $\nu \to \infty$ сходятся к решению системы (17), если начальное приближение $a_i^{*(0)}[\tilde P_k]$ выбрано достаточно близким к решению системы (17). Последние две формулы для $U^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(2)} h)$ и $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde P_k]$ относятся к квадратурной формуле Маркова с двумя фиксированными узлами (для сокращения записи коэффициенты

Чебышёва $a_0^{*(\nu)}[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]$ в качестве аргументов функции U не указаны). Для формулы Маркова с одним фиксированным узлом последовательные приближения строятся аналогично. Способы выбора начального приближения $a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k]$ изложены в [17–19].

Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно h очередного приближения $a_i^{*(\nu)}[U]$, $U^{(\nu)}(x_0+\alpha_j^{(s)}h)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]$ на единицу ($s=1,2$). При этом порядок точности приближений, т.е. порядок разностей между точными и приближенными значениями соответствующих величин

$$y(x_0+\alpha_j^{(s)}h)-U^{(\nu)}(x_0+\alpha_j^{(s)}h), \qquad a_i^*[\Phi]-a_i^{*(\nu)}[\tilde{P}_k],$$

увеличивается до тех пор, пока не будет достигнут максимальный порядок точности приближенного решения, равный порядку точности формулы $y(x_0+\alpha h)\approx U(x_0+\alpha h)$. Как следует из (11), этот порядок равен $O(h^{k+2})$. Итерации продолжаются или до достижения максимального порядка точности приближенного решения, или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

5. Оценка погрешности приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части системы. Обозначим $\delta_i = a_i^*[\Phi]-a_i^*[\tilde{P}_k]$, $i=0,1,\ldots,k$. Вычитая из (19) уравнение (17) и используя формулу конечных приращений Лагранжа, будем иметь для случая квадратурной формулы Маркова (15) с одним фиксированным узлом:

$$\delta_i=\frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f(x_j^{(1)},\hat{y})}{\partial y}\big[U(x_j^{(1)};\, a_0^*[\Phi],\ldots,a_k^*[\Phi])-U(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde{P}_k],\ldots,a_k^*[\tilde{P}_k])\big]T_i^*(\alpha_j^{(1)})+\rho_i.$$

Применим еще раз формулу конечных приращений Лагранжа к разностям для U:

$$\delta_i=\frac{4}{2k+1}\sum_{m=0}^{k}\Big[\sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f(x_j^{(1)},\hat{y})}{\partial y}\,\frac{\partial U(x_j^{(1)};\,\hat{a}_0,\ldots,\hat{a}_k)}{\partial a_m^*[\Phi]}\,T_i^*(\alpha_j^{(1)})\Big]\delta_m+\rho_i.$$

В производных $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial U}{\partial a_m^*}$ аргументы $\hat{y},\hat{a}_0,\ldots,\hat{a}_k$ берутся в соответствии с теоремой Лагранжа о среднем значении. Как видно из (4) и (5), скалярная матрица $\dfrac{\partial U}{\partial a_m^*}$ порядка M содержит множитель h, поэтому последнее равенство может быть представлено в виде

$$\delta_i=\frac{4}{2k+1}\sum_{m=0}^{k}hQ_{im}\delta_m+\rho_i,$$

где Q_{im} — квадратные матрицы порядка M. Отсюда следует, что погрешность δ_i имеет такой же порядок относительно h, что и невязка ρ_i, т.е.

$$\delta_k=O(h^{k+1}), \qquad \delta_i=O(h^{k+2}), \qquad 0\leqslant i\leqslant k-1.$$

Приведенные оценки верны, если $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные по x, y до порядка $2k+1$ включительно. Для дифференциального уравнения $y'=f(x)$ имеем $\delta_i=\rho_i=O(h^{2k+1-i})$, $0\leqslant i\leqslant k$.

В случае квадратурной формулы Маркова (16) с двумя фиксированными узлами аналогично получается оценка погрешности $\delta_i=O(h^{k+2})$, $i=0,1,\ldots,k$. Оценка верна, если $f(x,y)$ имеет непрерывные производные по x, y до порядка $2k+2$ включительно. Для уравнения $y'=f(x)$ имеем $\delta_i=\rho_i=O(h^{2k+2-i})$, $0\leqslant i\leqslant k$.

6. Аналитическое приближение к решению задачи Коши. По найденным приближенным значениям коэффициентов Чебышёва $a_i^*[y]\approx a_i^*[U]$ строится аналитическое приближение к решению задачи (1) на $[x_0,x_0+h]$ в виде $(k+1)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышёва

$$y(x_0+\alpha h)\approx U(x_0+\alpha h)=\sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha), \qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

В частности, $y(x_0+h) \approx U(x_0+h) = \sum\limits_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y]$, при этом погрешность приближенного значения решения имеет порядок $O(h^{k+2})$.

Так как коэффициенты Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ определяются с помощью итерационного процесса приближенно, то указанная здесь оценка погрешности решения справедлива тогда, когда погрешности вычисления коэффициентов $a_i^*[\Phi]$ имеют достаточный для этого порядок относительно h.

7. Примеры. 1) Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'(x) = \big(T_n^*(x)\big)' + \big(y(x) - T_n^*(x)\big)\,\frac{\ln\big(y(x) - T_n^*(x)\big)}{1+x}\,, \quad y(0)=0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{21}$$

где $T_n^*(x)$ — смещенный многочлен Чебышёва первого рода n-го порядка, $n=21$. Решением задачи (21) является многочлен $y(x) = T_n^*(x) + 1$, $n=21$. На заданном отрезке приближенное решение представлялось в виде частичной суммы ряда Чебышёва $y(x) \approx U(x) = \sum\limits_{i=0}^{k+1} a_i^*[y] T_i^*(x)$ при $k=21$. Вычисления проводились с 15–16 значащими цифрами.

Вычисленные коэффициенты ряда Чебышёва $a_1^*[y], \dots, a_{20}^*[y], a_{22}^*[y]$ либо равняются нулю, либо имеют десятичные порядки -14, -15. Коэффициент $a_0^*[y] = 0{,}9999999999999786$, $a_{21}^*[y] = 0{,}9999999999999982$. Абсолютная погрешность $\tilde{\varepsilon}$ приближенного значения решения в конце интервала интегрирования равняется $0{,}976 \times 10^{-14}$. При этом было выполнено 529 вычислений правой части уравнения (21). Заметим, что решение задачи (21) имеет на отрезке $[0,1]$ колебательный характер и большую по модулю производную.

В табл. 1 наряду с этими данными приведены результаты интегрирования уравнения (21), полученные также другими численными методами. Среди них многозначный метод Гира [11] с автоматическим выбором шага интегрирования и переменным порядком (вариант для нежестких систем, максимальный допустимый порядок равен семи), одношаговые методы Фельберга и Ингленда пятого порядка точности с шестью вычислениями правой части уравнения на шаге интегрирования с автоматическим выбором шага [10, 12, 13]. Во втором столбце этой таблицы показана абсолютная погрешность $\tilde{\varepsilon}$ приближенного значения решения $y(x_f)$, отвечающая наилучшей фактически достигнутой точности решения в точке $x_f = 1$. В третьем и четвертом столбцах даны число шагов N_h интегрирования и количество обращений N_f к правой части уравнения (21), использованных при достижении такой точности.

Таблица 1

Метод	$\tilde{\varepsilon}$	N_h	N_f
рядов	$0{,}976 \times 10^{-14}$	1	529
Гира	$0{,}619 \times 10^{-13}$	4786	9546
Фельберга	$-0{,}217 \times 10^{-13}$	5557	33517
Ингленда	$-0{,}132 \times 10^{-12}$	6866	41412

Как следует из табл. 1, приближенное значение решения $y(x_f)$ уравнения (21) в точке $x_f = 1$ методом рядов Чебышёва получено с большей точностью за значительно меньшее число шагов (всего за один шаг!) и с существенно меньшим количеством обращений к правой части (21) по сравнению с указанными численными методами.

2) Интегрируется нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_1' = \frac{y_1^2}{y_2 - x}\,, \quad y_2' = y_1 + 1, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = \frac{1}{3}, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_f, \quad x_f = 6. \tag{22}$$

Решение задачи (22) имеет большую производную, так как содержит быстрорастущую составляющую e^{3x}: $y_1(x) = e^{3x}$, $y_2(x) = x + e^{3x}/3$. Для системы (22) задавалось разбиение промежутка интегрирования $[0, x_f]$ на несколько частичных сегментов длиной $h \leqslant x_f$, и на каждом таком сегменте решение представлялось в виде $(k+1)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышёва. Число частичных сегментов длиной h, на которые разбивался отрезок интегрирования (число шагов N_h), значения h и k, относительные погрешности δ_1 и δ_2 приближенных значений $y_1(x_f)$ и $y_2(x_f)$, вычисленных в конце промежутка интегрирования x_f, а также количество обращений N_f к правой части системы (22) приведены в табл. 2.

Таблица 2

N_h	h	k	δ_1	δ_2	N_f
6	1	25	$-0{,}332 \times 10^{-13}$	$-0{,}297 \times 10^{-13}$	4831
3	2	25	$-0{,}264 \times 10^{-13}$	$-0{,}122 \times 10^{-13}$	2503
2	3	27	$-0{,}295 \times 10^{-12}$	$-0{,}363 \times 10^{-12}$	2405
1	6	30	$-0{,}269 \times 10^{-8}$	$-0{,}239 \times 10^{-8}$	1711

В табл. 3 приведены результаты интегрирования задачи (22), полученные многозначным методом Гира [11] с автоматическим выбором шага и переменным порядком (максимальный допустимый порядок равен семи), одношаговыми методами Фельберга и Ингленда пятого порядка точности с автоматическим выбором шага [10, 12, 13].

Таблица 3

Метод	δ_1	δ_2	N_h	N_f
Гира	$-0{,}663 \times 10^{-13}$	$-0{,}684 \times 10^{-13}$	1626	3735
Фельберга	$0{,}449 \times 10^{-12}$	$0{,}458 \times 10^{-12}$	1921	11551
Ингленда	$0{,}985 \times 10^{-12}$	$0{,}985 \times 10^{-12}$	3840	23076

Во втором и третьем столбцах этой таблицы показаны относительные погрешности δ_1 и δ_2 приближенных значений компонент решения $y_1(x_f)$, $y_2(x_f)$, отвечающие наилучшей фактически достигнутой точности в точке x_f. В четвертом и пятом столбцах даны количество выполненных шагов N_h и число обращений N_f к правой части системы (22), использованных при достижении такой точности.

Как видно из табл. 2 и 3 (например, сравнивая третью строку табл. 2 со строками табл. 3), приближенное решение $y_1(x_f)$, $y_2(x_f)$ задачи (22) в точке x_f методом рядов Чебышёва получено с большей точностью за значительно меньшее число шагов и с существенно меньшим количеством обращений к правой части системы (22), чем указанными численными методами.

8. Заключение. Приведенные здесь результаты решения рассмотренных выше дифференциальных уравнений вместе с подобными результатами для других тестовых задач [14–25] позволяют сделать следующий вывод. Представление решений обыкновенных дифференциальных уравнений и систем уравнений в виде частичной суммы ряда Чебышёва дает возможность вычислять приближение к решению с высокой точностью, причем такая высокая точность на практике может оказаться недостижимой для одношаговых методов типа Рунге–Кутта, многошаговых методов Адамса и метода Гира на той же разрядной сетке, поскольку эта точность требует для указанных численных методов столь малых размеров шага интегрирования, что эти шаги выходят за границу их *реальной области асимптотики* [26].

Благодаря замечательным аппроксимирующим свойствам предложенный в настоящей статье метод может быть использован для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с более высокой точностью и с более крупным шагом дискретизации по сравнению с перечисленными выше алгоритмами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М: Наука, 1986.
2. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1998.
3. *Ильин В.П., Кузнецов Ю.И.* Алгебраические основы численного анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
4. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* О применении формулы численного интегрирования Маркова в ортогональных разложениях // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и Механика. 2009. № 6. 18–22.
5. *Залеткин С.Ф.* Формула численного интегрирования Маркова с двумя фиксированными узлами и ее применение в ортогональных разложениях // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**. 1–17.
6. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О некоторых свойствах частичных сумм рядов Чебышева // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2009. **13**, № 3. 26–34.
7. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
8. *Залеткин С.Ф.* Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием ортогональных разложений // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 1. 69–85.
9. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962.
10. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Бином, 2007.
11. *Gear C.W.* Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1971.

12. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
13. *England R.* Error estimates for Runge–Kutta type solutions to systems of ordinary differential equations // The Computer Journal. 1969. **12**, N 2. 166–170.
14. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Приближенное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе ортогональных разложений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2009. **14**, № 4. 59–68.
15. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О применении ортогональных разложений для приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2010. № 4. 40–43.
16. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Сибирские электронные математические известия. 2010. **7**. 122–131.
17. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О вычислении коэффициентов рядов Чебышёва для решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2011. **8**. 273–283.
18. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О вычислении коэффициентов ортогональных разложений решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2011. **15**, № 2. 41–47.
19. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Вычисление коэффициентов разложения решения задачи Коши в ряд по многочленам Чебышева // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2012. № 5. 24–30.
20. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Об одном приближенном методе интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2013. № 6. 43–46.
21. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Метод решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышёва // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 203–214.
22. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Об одном подходе к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью рядов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2014. № 6. 57–60.
23. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Применение рядов Чебышёва для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2014. **11**. 517–531.
24. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Об одном приближенном аналитическом методе интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 235–241.
25. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О применении рядов Чебышёва к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрорастущими решениями // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2015. № 5. 57–60.
26. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.

Поступила в редакцию
27.01.2016

Approximate Solution of the Cauchy Problem for Ordinary Differential Equations by the Method of Chebyshev Series

O. B. Arushanyan[1] and S. F. Zaletkin[2]

[1] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: arush@srcc.msu.ru*

[2] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: iraz@srcc.msu.ru*

Received January 27, 2016

Abstract: An approximate analytical method of solving the systems of ordinary differential equations resolved with respect to the derivatives of unknown functions is considered. This method is based on the approximation of the solution to the Cauchy problem and its derivatives by partial sums of shifted Chebyshev series. The coefficients of the series are determined by an iterative process with the use of Markov's quadrature formulas. This approach can be used to solve ordinary differential equations with a higher accuracy and with a larger discretization step compared to the known Runge–Kutta and Adams methods.

Keywords: ordinary differential equations, Cauchy problem, approximate analytical methods, numerical methods, orthogonal expansions, shifted Chebyshev series, Markov's quadrature formulas.

References

1. K. I. Babenko, *Fundamentals of Numerical Analysis* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].

2. I. P. Mysovskikh, *Lectures on Numerical Methods* (St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 1998) [in Russian].

3. V. P. Il'in and Yu. I. Kuznetsov, *Algebraic Foundations of Numerical Analysis* (Nauka, Novosibirsk, 1986) [in Russian].

4. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "Application of Markov's Quadrature in Orthogonal Expansions," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 6, 18–22 (2009) [Moscow Univ. Math. Bull. **64** (6), 244–248 (2009)].

5. S. F. Zaletkin, "Markov's Formula with Two Fixed Nodes for Numerical Integration and Its Application in Orthogonal Expansions," Vychisl. Metody Programm. **6**, 1–17 (2005).

6. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "On Some Properties of Partial Sums for Chebyshev Series," Differen. Uravn. Protsessy Upravl. **13** (3), 26–34 (2009).

7. P. K. Suetin, *Classical Orthogonal Polynomials* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].

8. S. F. Zaletkin, "Numerical Integration of Ordinary Differential Equations Using Orthogonal Expansions," Mat. Model. **22** (1), 69–85 (2010).

9. I. S. Berezin and N. P. Zhidkov, *Computing Methods* (Fizmatgiz, Moscow, 1962; Pergamon, Oxford, 1965).

10. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel'kov, *Numerical Methods* (Binom, Moscow, 2007) [in Russian].

11. C. W. Gear, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1971).

12. E. Hairer, S. P. Nörsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations. I. Nonstiff Problems* (Springer, Berlin, 1987; Mir, Moscow, 1990).

13. R. England, "Error Estimates for Runge–Kutta Type Solutions to Systems of Ordinary Differential Equations," Comput. J. **12** (2), 166–170 (1969).

14. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Approximate Integration of Ordinary Differential Equations on the Basis of Orthogonal Expansions," Differen. Uravn. Protsessy Upravl. **14** (4), 59–68 (2009).

15. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Application of Orthogonal Expansions for Approximate Integration of Ordinary Differential Equations," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 4, 40–43 (2010) [Moscow Univ. Math. Bull. **65** (4), 172–175 (2010)].

16. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Approximate Solution of Ordinary Differential Equations Using Chebyshev Series," Sib. Elektron. Mat. Izv. **7**, 122–131 (2010).

17. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "On Calculation of Chebyshev Series Coefficients for the Solutions to Ordinary Differential Equations," Sib. Elektron. Mat. Izv. **8**, 273–283 (2011).

18. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Calculation of the Coefficients of Orthogonal Expansions for the Solutions to Ordinary Differential Equations," Differen. Uravn. Protsessy Upravl. **15** (2), 41–47 (2011).

19. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Calculation of Expansion Coefficients of Series in Chebyshev Polynomials for a Solution to a Cauchy Problem," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 5, 24–30 (2012) [Moscow Univ. Math. Bull. **67** (5–6), 211–216 (2012)].

20. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "An Approximate Method for Integration of Ordinary Differential Equations," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 6, 43–46 (2013) [Moscow Univ. Math. Bull. **68** (6), 292–294 (2013)].

21. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, “A Method of Solving the Cauchy Problem for Ordinary Differential Equations Using Chebyshev Series,” Vychisl. Metody Programm. **14**, 203–214 (2013).

22. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, “On an Approach to Integration of Ordinary Differential Equations with the Use of Series,” Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 6, 57–60 (2014) [Moscow Univ. Math. Bull. **69** (6), 272–274 (2014)].

23. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, “Application of Chebyshev Series for the Integration of Ordinary Differential Equations,” Sib. Elektron. Mat. Izv. **11**, 517–531 (2014).

24. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, “On an Approximate Analytical Method of Solving Ordinary Differential Equations,” Vychisl. Metody Programm. **16**, 235–241 (2015).

25. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, “Application of Chebyshev Series to Integration of Ordinary Differential Equations with Rapidly Growing Solutions,” Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 5, 57–60 (2015) [Moscow Univ. Math. Bull. **70** (5), 237–240 (2015)].

26. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations Using FORTRAN* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1990) [in Russian].