

УДК 518:517.949.8; 533.6.011

doi 10.26089/NumMet.v17r104

**КОНСТРУИРОВАНИЕ СХЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ
С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЙ ЛАГРАНЖА–БЮРМАНА
ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ
УРАВНЕНИЙ НЕВЯЗКОГО ГАЗА**

Е. В. Ворожцов¹

Предлагается строить явные разностные схемы третьего порядка точности для гиперболических законов сохранения с применением разложений сеточных функций в ряды Лагранжа–Бюрмана. Результаты тестовых расчетов для случаев одномерного уравнения переноса и многомерных уравнений Эйлера невязкого сжимаемого газа подтверждают третий порядок точности построенных схем. Получены квазимонотонные профили численных решений.

Ключевые слова: гиперболические законы сохранения, разложения Лагранжа–Бюрмана, разностные методы.

1. Введение. Гиперболические системы законов сохранения описывают в невязком приближении явления, возникающие при обтекании аэродинамических форм, в ракетных соплах, в газовых струях, при распространении загрязняющих газов в атмосфере, при ядерных взрывах и т.п. Поэтому в течение последних более чем шестидесяти лет были выполнены многочисленные исследования с целью численного интегрирования соответствующих систем уравнений в частных производных. К настоящему времени разработаны различные методы в эйлеровых координатах для численного решения указанных систем. Описание наиболее распространенных методов можно найти в [1–7].

Можно разбить существующие численные методы решения квазилинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на следующие две большие группы: методы, которые не используют приближенное решение задачи о распаде разрыва, и методы, существенно использующие решение указанной задачи. Методы, относящиеся ко второй группе, получили в англоязычной литературе краткое название “Riemann solvers”. В дальнейшем для краткости будем такие методы называть RS-методами. Наиболее полное описание RS-методов для решения гиперболических задач различной размерности имеется в [6], см. также обзор более поздних работ в [8].

В настоящей статье описываются численные методы для решения гиперболических уравнений, которые не используют решение задачи о распаде разрыва. В целях краткости будем называть эти методы NRS-методами (Non-Riemann-Solvers). Кратко перечислим некоторые известные NRS-методы: однородные разностные схемы с искусственной вязкостью [1, 9–11]; консервативные разностные схемы [1, 3, 10]; TVD-схемы (Total Variation Diminishing schemes) [3, 5, 6]; схемы метода конечных объемов [12]; компактные разностные схемы [2, 4, 13]. Нередко вышеперечисленные подходы успешно комбинируются друг с другом: например, схемы метода конечных объемов, а также компактные схемы комбинируются с методом искусственной вязкости [14, 15].

В численных решениях, получаемых как по RS-методам, так и по NRS-методам, ударные волны размываются на нескольких интервалах пространственной расчетной сетки, при этом толщина переходной зоны остается приблизительно постоянной во времени.

Ранние методы второго порядка точности, такие как методы Лакса–Вендрофа [16] и МакКормака [17], а также схемы третьего порядка точности Русанова [18], Бурштейна–Мирина [19], Балакина [20], Уорминга–Кутлера–Ломакса [21], были получены с помощью разложений сеточных функций в ряды Тейлора. Оказалось, что, в отличие от ударной волны, ширина X зоны размывания контактного разрыва при использовании однородных разностных схем первого и более высоких порядков точности растет в соответствии с формулой

$$X = C(h, \tau)t^{1/(r+1)}, \quad (1)$$

где t — время, h — шаг сетки вдоль пространственной координаты, τ — временной шаг, r — порядок точности конечно-разностной схемы, а вид функции $C(h, \tau)$ зависит от порядка точности схемы и от ее

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; ведущий науч. сотр., e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

конкретной структуры; конкретные выражения для этой функции, соответствующие некоторым схемам первого и второго порядков точности, были получены в [22, 23] путем анализа их первых дифференциальных приближений. В [24] справедливость формулы (1) была подтверждена с помощью методики, описанной в [23], а также численных экспериментов и для ряда более поздних разностных схем, а именно: PPM (Piecewise Parabolic Method; метод второго порядка точности), WENO (Weighted Essentially NonOscillatory; метод пятого порядка точности в областях гладкого решения и третьего порядка точности на контактных разрывах).

Как следует из формулы (1), ширина X зоны размазывания контактного разрыва меньше при одном и том же значении времени t для схем более высокого порядка точности. Однако, с другой стороны, для ранних схем высоких порядков точности характерно наличие паразитических осцилляций численного решения в окрестностях сильных разрывов. В этой связи в течение последних примерно 25 лет были разработаны некоторые способы снижения амплитуды этих осцилляций. Описание некоторых из этих способов можно найти в [5]. Такие монотонизированные и квазимонотонные схемы высоких порядков точности обладают преимуществом в точности по сравнению со схемами первого порядка при численном моделировании многомерных задач с многими взаимодействующими ударными волнами и контактными разрывами.

За основу при построении новых разностных схем в настоящей работе взята TVD-схема, т.е. схема с невозрастающей полной вариацией решения, предложенная в [25]. Эта схема является представителем более широкого класса TVD-схем порядков точности $(2K - 1)$, $K = 1-7$, разработанного в [26] (см. также [27]). Данная схема была обобщена в [28] на случаи расчета трехмерных течений газа на криволинейных сетках. В [29, 30] метод [25] был развит далее с целью получения новых TVD-методов четвертого и пятого порядков точности по пространственным переменным.

Как известно, в TVD-схемах осуществляется переход к схемам первого порядка точности с целью монотонизации численного решения [3], но в результате этого происходит интенсивное размазывание разрывов. В частности, ширина зон размазывания контактных разрывов увеличивается пропорционально $t^{1/2}$. В этой связи в [31] были предложены TVB-варианты схемы (Total Variation Bounded schemes)[25], имеющие третий и пятый порядки точности (TVB-схемы — это схемы с ограниченной полной вариацией решения). Однако замена TVD-условия на TVB-условие привела к появлению значительных паразитических осцилляций численного решения в окрестности сильных разрывов, как это явствует из примеров расчетов, представленных в [31].

В работе [32] было проведено сравнение десяти существующих RS- и NRS-методов решения уравнений Эйлера на большом количестве одно- и двумерных тестовых задач. Сделан вывод о том, что ни один из рассмотренных десяти методов не превосходил остальные методы. Из приведенных в [32] таблиц ошибок численных решений тестовых задач можно сделать вывод о том, что как RS-, так и NRS-методы сравнимы по своей точности.

В связи с вышеизложенным являются актуальными дальнейшие исследования в области разработки эффективных (с точки зрения и обеспечения приемлемой точности, и уменьшения требуемых затрат машинного времени) квазимонотонных разностных схем высоких порядков точности для численного решения задач, описываемых гиперболическими законами сохранения.

В [33] было предложено использовать разложения сеточных функций в ряды Лагранжа–Бюрмана при построении разностных схем для гиперболических задач. В отличие от ряда Тейлора, ряд Лагранжа–Бюрмана — это степенной ряд по степеням некоторой функции $\varphi(x)$. Тогда можно подобрать функцию $\varphi(x)$ так, чтобы и уменьшить амплитуду паразитических осцилляций численного решения в окрестности сильных разрывов, и повысить точность численного решения. В [33] было построено несколько схем порядков точности $O(\tau) + O(h^2)$ и $O(\tau^2) + O(h^2)$ для одномерного уравнения переноса $u_t + au_x = 0$, где $a = \text{const} > 0$. Кроме того, в [33] была также предложена разностная схема порядка точности $O(\tau) + O(h^2)$ для уравнений Эйлера, описывающих одномерные течения невязкого газа. В [34] схемы из [33] были обобщены на случай численного интегрирования двумерных уравнений Эйлера. Оказалось, что при счете двумерных задач методом установления квазимонотонные схемы, предложенные в [34], требуют в шесть раз меньшего машинного времени, чем известная TVD-схема третьего порядка точности, при сравнимой точности решения на ударных волнах.

В [35, 36] построены явные многостадийные методы типа Рунге–Кутты для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с помощью разложения сеточных функций в ряды Лагранжа–Бюрмана. Так как эти разложения имеют намного более сложный вид, чем разложения в ряды Тейлора, в [35, 36] все требуемые аналитические выкладки выполнялись на настольном компьютере с помощью программы, написанной на языке системы *Mathematica*. Основные детали этой программы описаны в [35].

В [35, 36] были построены новые явные методы первого и второго порядков точности, которые были применены для численного интегрирования задачи Коши для умеренно жесткой системы ОДУ. Оказалось, что L_2 -норма ошибки решения, полученного по новому численному методу второго порядка точности, в 50 раз меньше, чем в случае классического метода Рунге–Кутты второго порядка точности. В [36] даны рекомендации по оптимальному выбору функции $\varphi(x)$ при выводе новых явных методов типа Рунге–Кутта третьего и более высоких порядков точности с помощью разложений сеточных функций в ряды Лагранжа–Бюрмана.

Целью настоящей работы является построение разностных схем третьего порядка точности с помощью разложений Лагранжа–Бюрмана для одномерных, двумерных и трехмерных уравнений Эйлера, описывающих течения сжимаемого невязкого нетеплопроводного газа.

2. Формула разложения Лагранжа–Бюрмана. Пусть $u(x)$ и $\varphi(x)$ — голоморфные функции и $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) \neq 0$, т.е. точка $x = 0$ — нуль первого порядка функции $\varphi(x)$. Тогда можно записать формулу разложения Лагранжа–Бюрмана в виде [33–36]

$$u(x) = u(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\varphi(x-x_0)]^k}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left[u'(x) \left(\frac{x-x_0}{\varphi(x-x_0)} \right)^k \right] \right\}_{x=x_0}. \tag{2}$$

Таким образом, формула (2) позволяет разложить функцию $u(x)$ в ряд по степеням функции $\varphi(x-x_0)$. Обозначим через b_k коэффициент при $[\varphi(x-x_0)]^k$ в (2). В [35, 36] была представлена весьма компактная программа, реализующая вычисление коэффициентов b_k для любого конечного k в системе *Mathematica*, и были даны выражения для первых четырех коэффициентов b_k , т.е. для $k = 1-4$:

$$b_1 = \frac{u'(x_0)}{\varphi'(0)}, \quad b_2 = \frac{u''(x_0)}{2\varphi'(0)^2} - \frac{u'(x_0)\varphi''(0)}{2\varphi'(0)^3} = \frac{1}{2\varphi'(0)} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{u'(x)}{\varphi'(x-x_0)} \right] \right\}_{x=x_0}, \tag{3}$$

$$b_3 = \frac{u'(x_0)\varphi''(0)^2}{2\varphi'(0)^5} - \frac{u''(x_0)\varphi''(0)}{2\varphi'(0)^4} + \frac{u^{(3)}(x_0)}{6\varphi'(0)^3} - \frac{u'(x_0)\varphi^{(3)}(0)}{6\varphi'(0)^4}, \tag{4}$$

$$b_4 = -\frac{5u'(x_0)\varphi''(0)^3}{8\varphi'(0)^7} + \frac{5u''(x_0)\varphi''(0)^2}{8\varphi'(0)^6} - \frac{u^{(3)}(x_0)\varphi''(0)}{4\varphi'(0)^5} + \frac{5u'(x_0)\varphi^{(3)}(0)\varphi''(0)}{12\varphi'(0)^6} - \frac{u''(x_0)\varphi^{(3)}(0)}{6\varphi'(0)^5} + \frac{u^{(4)}(x_0)}{24\varphi'(0)^4} - \frac{u'(x_0)\varphi^{(4)}(0)}{24\varphi'(0)^5}. \tag{5}$$

Из формул (3)–(5) видно, что сложность выражений для коэффициентов b_k быстро возрастает с увеличением номера k . Применение нижеследующей теоремы позволяет существенно упрощать выражения для b_k при подходящем выборе функции $\varphi(x)$.

Теорема. Если функция $\varphi(x)$ является нечетной и, кроме того, $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и ее ряд Маклорена сходится в некоторой окрестности точки $x = 0$, то функция $\varphi(x)$ и ее производные обладают следующими свойствами:

- (i) $\varphi(0) = 0$;
- (ii) производная четного порядка нечетной функции $\varphi(x)$ является нечетной функцией;
- (iii)

$$\frac{d^{2m}\varphi(0)}{dx^{2m}} = 0, \quad m = 1, 2, \dots; \tag{6}$$

- (iv) производная нечетного порядка нечетной функции $\varphi(x)$ является четной функцией.

Доказательство. Согласно определению нечетной функции имеем $\varphi(x) = -\varphi(-x)$. Тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} [\varphi(x) - \varphi(-x)]. \tag{7}$$

Разложение слагаемых $\varphi(x)$ и $\varphi(-x)$ в правой части (7) в соответствующие ряды Маклорена приводит к

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k\varphi(0)}{dx^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \frac{d^k\varphi(0)}{dx^k} \right]. \tag{8}$$

Теперь в суммах, стоящих в правой части (8), нетрудно перегруппировать слагаемые так, чтобы в двух из получающихся четырех сумм присутствовали только четные степени переменной x , а в остальных

двух суммах только нечетные степени переменной x . Тогда суммы, содержащие только четные степени переменной x , взаимно уничтожаются, и из (8) получается следующее разложение для $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \frac{d^{2k-1}\varphi(0)}{dx^{2k-1}}. \quad (9)$$

Свойство (i) вытекает непосредственно из (9). Чтобы доказать (ii), достаточно продифференцировать по x обе части равенства (9) $2m$ раз, $m = 1, 2, \dots$; это дает формулу

$$\frac{d^{2m}\varphi(x)}{dx^{2m}} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x^{2(k-m)-1}}{(2k-1-2m)!} \frac{d^{2k-1}\varphi(0)}{dx^{2k-1}}. \quad (10)$$

Степенной ряд в правой части (10) содержит только нечетные степени переменной x ; следовательно, функция $\frac{d^{2m}\varphi(x)}{dx^{2m}}$ является нечетной. Свойство (iii) следует либо непосредственно из (10), либо из свойства (i), примененного к производной $\frac{d^{2m}\varphi(x)}{dx^{2m}}$. Свойство (iv) доказывается аналогично доказательству свойства (ii). Теорема доказана.

Следствие. Четную функцию $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ нельзя использовать в формуле Лагранжа–Бюрмана (2). Действительно, представление четной функции $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = \frac{1}{2} [\varphi(x) + \varphi(-x)]$ (по аналогии с нечетной функцией) и разложение членов $\varphi(x)$ и $\varphi(-x)$ в соответствующие ряды Маклорена приводят к формуле

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{d^{2k}\varphi(0)}{dx^{2k}}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что функция $\varphi'(x)$ нечетная, поэтому $\varphi'(0) = 0$ в соответствии со свойством (i) теоремы. Однако это противоречит требованию, что точка $x = 0$ должна быть нулем первого порядка функции $\varphi(x)$, т.е. должно выполняться условие $\varphi'(0) \neq 0$.

Примечание 1. Свойство (i) можно доказать без использования разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Маклорена. Действительно, пусть ε — малое положительное число. Применение теоремы Лагранжа к $\varphi(\varepsilon)$ и к $\varphi(-\varepsilon)$ дает равенства

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi(0) = \varepsilon\varphi'(\xi_1), \quad \varphi(0) - \varphi(-\varepsilon) = \varepsilon\varphi'(\xi_2), \quad (12)$$

где $\xi_1 = \theta_1\varepsilon$, $\xi_2 = -\theta_2\varepsilon$, $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Вычитая из левых и правых частей первого равенства в (12) левые и правые части второго равенства соответственно, легко получить следующую формулу для $\varphi(0)$:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2} [\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)] - \frac{\varepsilon}{2} [\varphi'(\xi_1) + \varphi'(\xi_2)]. \quad (13)$$

Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ в правой части (13) приводит к равенству:

$$\varphi(0) = \frac{0}{2} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{2} [\varphi'(\xi_1) + \varphi'(\xi_2)] = 0.$$

Примечание 2. Все вышеперечисленные свойства нечетных функций можно легко доказать также с использованием разложения нечетной функции в тригонометрический ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega x), \quad \omega = 2\pi/T, \quad (14)$$

где T — период функции $\varphi(x)$. Как известно, ряд Фурье (14) является сходящимся на всей вещественной оси, если $\varphi(x)$ — непрерывная кусочно-гладкая функция (доказательство этого факта имеется в [37]).

Примечание 3. Из вышеприведенного следствия вытекает, что имеются только две альтернативы для функции $\varphi(x)$, которую можно применять в формуле разложения Лагранжа–Бюрмана:

- (i) $\varphi(x)$ — нечетная функция;
- (ii) $\varphi(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

Следующие свойства нечетных и четных функций, доказательства которых опускаются ввиду их тривиальности, могут облегчить построение нечетной функции $\varphi(x)$:

- сумма или разность двух нечетных функций является нечетной функцией;
- произведение четной и нечетной функции является нечетной функцией;
- частное четной и нечетной функций является нечетной функцией;
- композиция двух нечетных функций является нечетной функцией.

Так как в случае нечетной функции $\varphi(x)$ справедливо равенство (6), то выражения (3)–(5) существенно упрощаются:

$$b_1 = \frac{u'(x_0)}{\varphi'(0)}, \quad b_2 = \frac{u''(x_0)}{2\varphi'(0)^2}, \quad b_3 = \frac{u^{(3)}(x_0)}{6\varphi'(0)^3} - \frac{u'(x_0)\varphi^{(3)}(0)}{6\varphi'(0)^4}, \quad b_4 = -\frac{u''(x_0)\varphi^{(3)}(0)}{6\varphi'(0)^5} + \frac{u^{(4)}(x_0)}{24\varphi'(0)^4}. \quad (15)$$

3. Схемы третьего и четвертого порядка точности для уравнения конвекции. Рассмотрим одномерное уравнение конвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = s(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (16)$$

где x — пространственная координата, t — время, $F(u) = au$, $a = \text{const} > 0$, $s(x)$ — заданная функция (источниковый член). Будем решать уравнение (16) при заданном начальном условии $u(x, 0) = u_0(x)$.

Построим следующую явную схему для уравнения (16):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) + \tau s(x_j). \quad (17)$$

Здесь $u_j^n = u(x_j, t_n)$, $x_j = (j - 0.5)h$, j — номер ячейки сетки на оси x , $t_n = n\tau$ и $F_{j+1/2}^n = F(u_{j+1/2}^n)$.

Сначала построим аппроксимацию порядка точности $O(h^3)$ члена $\frac{\partial F(u)}{\partial x}$. Введем в рассмотрение разностный оператор

$$D_h F = \frac{1}{h} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n). \quad (18)$$

За основу возьмем капша-аппроксимацию ван Леера потока $F_{j+1/2}^n$ (см., например, [38]):

$$F_{j+1/2}^n = F_j^n + \frac{1}{4} [(1 - \kappa)\Delta_- + (1 + \kappa)\Delta_+]_j, \quad (19)$$

где $(\Delta_+)_j = F_{j+1}^n - F_j^n$, $(\Delta_-)_j = F_j^n - F_{j-1}^n$, а κ — весовой параметр. В зависимости от конкретных значений κ оператор (18) обеспечивает аппроксимацию производной $\frac{\partial F(u)}{\partial x}$ с различными порядками точности, а именно: значение $\kappa = 1/3$ приводит к аппроксимации третьего порядка точности, $\kappa = -1$ дает одностороннюю аппроксимацию второго порядка точности и, наконец, $\kappa = 1$ дает центральную разность второго порядка точности.

Выведем ЛВ-аналог формулы (19). Введем обозначение $\tilde{F}(x) = F(u(x, t_n))$. Заменяя $u(x)$ формально в (2) на $\tilde{F}(x)$, можем записать

$$\tilde{F}(x) = \tilde{F}(x_0) + \frac{\tilde{F}'(x_0)}{\varphi'(0)} \varphi(x - x_0) + O\{[\varphi(x - x_0)]^2\}. \quad (20)$$

Положив в (20) $x = x_{j+1/2}$ и $x_0 = x_j$, получим

$$\tilde{F}_{j+1/2} \approx \tilde{F}_j + \frac{\varphi(x_{j+1/2} - x_j)}{\varphi'(0)} \tilde{F}'(x_j). \quad (21)$$

Выражение $\frac{1}{4} [\dots]$ в (19) можно интерпретировать как аппроксимацию члена $\frac{h}{2} \frac{\partial F}{\partial x}$. Перепишем формулу (21) по аналогии с (19) в виде

$$F_{j+1/2}^n = F_j^n + \frac{1}{2} [(1 - \kappa)\tilde{F}'_-(x_j) + (1 + \kappa)\tilde{F}'_+(x_j)] \frac{\varphi(x_{j+1/2} - x_j)}{\varphi'(0)}, \quad (22)$$

где мы ввели обозначения

$$\tilde{F}'_-(x_j) = \frac{(\Delta_-)_j \varphi'(0)}{\varphi(h)}, \quad \tilde{F}'_+(x_j) = \frac{(\Delta_+)_j \varphi'(0)}{\varphi(h)}. \quad (23)$$

Эти формулы представляют собой LB-аналоги левой и правой разделенных разностей [33, 34]. Подстановка выражений (23) в (22) приводит к следующему выражению для потока $F_{j+1/2}^n$:

$$F_{j+1/2}^n = F_j^n + \frac{1}{2} [(1 - \kappa)\Delta_- + (1 + \kappa)\Delta_+]_j \frac{\varphi(x_{j+1/2} - x_j)}{\varphi(h)}. \quad (24)$$

При выводе этой формулы предполагалось, что функция $\varphi(x)$ нечетная. Наряду с аппроксимацией (24) будет также рассматриваться аппроксимация

$$F_{j+1/2}^n = F_j^n + \frac{1}{2} [(1 - \kappa)\Delta_- + (1 + \kappa)\Delta_+]_j \frac{\varphi(x_{j+1/2} - x_j)}{\varphi'(0)h}. \quad (25)$$

Эта формула получена заменой величины $\varphi(h)$ в (24) отрезком ее ряда Маклорена, так что $\varphi(h) \approx \varphi'(0)h$.

Теперь подставим выражение для потоков (24) в (18) и исследуем порядок аппроксимации формулы (18) по пространству. Для этого разложим значения сеточных величин, входящих в (18), по формуле Лагранжа–Бюрмана (2) относительно точки (x_j, t_n) . Ограничимся случаем нечетной функции $\varphi(x)$. В результате получаем дифференциальное приближение оператора (18) в следующем виде:

$$D_h F \approx B_1 \frac{\partial F(u)}{\partial x} + B_2 \frac{\partial^2 F(u)}{\partial x^2} + B_3 \frac{\partial^3 F(u)}{\partial x^3} + B_4 \frac{\partial^4 F(u)}{\partial x^4}. \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\varphi(h)}{h\varphi'(0)} + \frac{(1 - \kappa)\varphi(h/2)}{h\varphi'(0)} - \frac{(1 - \kappa)\varphi(2h)\varphi(h/2)}{2h\varphi(h)\varphi'(0)} - \frac{\varphi(h)^3\varphi^{(3)}(0)}{6h[\varphi'(0)]^4} + \\ &+ \frac{(1 - \kappa)\varphi^3(2h)\varphi(h/2)\varphi^{(3)}(0)}{12h\varphi(h)[\varphi'(0)]^4} - \frac{(1 - \kappa)\varphi^2(h)\varphi(h/2)\varphi^{(3)}(0)}{6h[\varphi'(0)]^4}, \\ B_2 &= -\frac{\varphi^2(h)}{2h[\varphi'(0)]^2} + \frac{(1 - \kappa)\varphi^2(2h)\varphi(h/2)}{4h\varphi(h)[\varphi'(0)]^2} + \frac{\kappa\varphi(h)\varphi(h/2)}{h[\varphi'(0)]^2} + \\ &+ \frac{(\kappa - 1)\varphi(h/2)\varphi^4(2h)\varphi^{(3)}(0)}{12h\varphi(h)[\varphi'(0)]^5} - \frac{\kappa\varphi(h/2)\varphi^3(h)\varphi^{(3)}(0)}{3h[\varphi'(0)]^5} + \frac{\varphi^4(h)\varphi^{(3)}(0)}{6h[\varphi'(0)]^5}, \\ B_3 &= \frac{\varphi^3(h)}{6h[\varphi'(0)]^3} - \frac{\varphi^3(2h)\varphi(h/2)(1 - \kappa)}{12h\varphi(h)[\varphi'(0)]^3} + \frac{(1 - \kappa)\varphi^2(h)\varphi(h/2)}{6h[\varphi'(0)]^3}, \\ B_4 &= \frac{\kappa\varphi(h/2)\varphi^3(h)}{12h[\varphi'(0)]^4} - \frac{\varphi^4(h)}{24h[\varphi'(0)]^4} + \frac{(1 - \kappa)\varphi(h/2)[\varphi(2h)]^4}{48h\varphi(h)[\varphi'(0)]^4}. \end{aligned} \quad (27)$$

Затруднительно сделать заключение о порядке аппроксимации оператора (18) непосредственно из формул (26), (27). Поэтому поступим следующим образом: подставим в (27) вместо $\varphi(h)$, $\varphi(2h)$, $\varphi(h/2)$ их разложения в усеченные ряды Маклорена. Если ограничиться первыми двумя членами этих разложений, то с учетом теоремы, доказанной выше, получаем

$$\varphi(\sigma h) \approx \varphi'(0)\sigma h + \frac{\sigma^3 h^3}{6} \varphi^{(3)}(0), \quad (28)$$

где σ — вещественная постоянная, не зависящая от h . Подстановка (28) в (27) приводит к появлению дробей вида $\frac{A}{B(\varphi'(0)h + (h^3/6)\varphi^{(3)}(0))}$. Эти выражения были преобразованы следующим образом:

$$\frac{A}{B(\varphi'(0)h + (h^3/6)\varphi^{(3)}(0))} = \frac{A[\varphi'(0)h - (h^3/6)\varphi^{(3)}(0)]}{B\{[\varphi'(0)h]^2 - (h^6/36)[\varphi^{(3)}(0)]^2\}} \approx \frac{A[\varphi'(0)h - (h^3/6)\varphi^{(3)}(0)]}{B[\varphi'(0)h]^2}. \quad (29)$$

В результате использования формул (28), (29) получаем

$$D_h F \approx \left(1 + \tilde{B}_1\right) \frac{\partial F(u)}{\partial x} + \tilde{B}_2 \frac{\partial^2 F(u)}{\partial x^2} + \tilde{B}_3 \frac{\partial^3 F(u)}{\partial x^3} + \tilde{B}_4 \frac{\partial^4 F(u)}{\partial x^4}, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= \frac{h^4(20 - 23\kappa)[\varphi^{(3)}(0)]^2}{36[\varphi'(0)]^2} + O(h^6), \\ \tilde{B}_2 &= -\frac{h^3\varphi^{(3)}(0)}{16\varphi'(0)} + h^5\left(\frac{53\kappa}{36} - \frac{421}{288}\right) \left[\frac{\varphi^{(3)}(0)}{\varphi'(0)}\right]^2 + O(h^7), \\ \tilde{B}_3 &= h^2\left(\frac{\kappa}{4} - \frac{1}{12}\right) + \frac{h^4\varphi^{(3)}(0)}{\varphi'(0)}\left(\frac{19\kappa}{32} - \frac{49}{96}\right) + O(h^6), \\ \tilde{B}_4 &= \frac{h^3(1 - \kappa)}{8} + h^5\left(\frac{19}{48} - \frac{77\kappa}{192}\right) \frac{\varphi^{(3)}(0)}{\varphi'(0)} + O(h^7). \end{aligned} \quad (31)$$

Из (31) следует, что оператор (18) аппроксимирует производную $\frac{\partial F(u)}{\partial x}$ с порядком точности $O(h^3)$ при $\kappa = 1/3$. С целью обеспечения третьего порядка аппроксимации разностной схемы для уравнения (16) также и по времени применялся следующий метод Рунге–Кутта третьего порядка точности [5]:

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= w^n, \quad w^{(1)} = w^{(0)} + \tau P_h(w^{(0)}), \quad w^{(2)} = \frac{3}{4}w^{(0)} + \frac{1}{4}w^{(1)} + \frac{1}{4}\tau P_h(w^{(1)}), \\ w^{(3)} &= \frac{1}{3}w^{(0)} + \frac{2}{3}w^{(2)} + \frac{2}{3}\tau P_h(w^{(2)}), \quad w^{n+1} = w^{(3)}, \end{aligned} \quad (32)$$

где $P_h(w) = -D_h F(w) + s(x)$.

Нетрудно показать с помощью анализа устойчивости по методу Фурье, что разностная схема (17), (24) является абсолютно неустойчивой при любой функции $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$, $\varphi'(0) > 0$. Для этого подставим в (17), (24) решение вида $u_j^n = U_0 \lambda^n e^{ijkh}$, где $U_0 = \text{const}$, k – вещественное волновое число, $i = \sqrt{-1}$. Для λ получаем при $\kappa = 1/3$ характеристическое уравнение $\lambda = A + iB$, где

$$A = 1 - \frac{cr}{3}(\cos \xi - \cos^2 \xi + \sin^2 \xi), \quad B = -\frac{cr \sin \xi}{3}(5 - 4 \cos \xi). \quad (33)$$

Здесь c – число Куранта, $c = a\tau/h$, $\xi = kh$, $r = \frac{\varphi(h/2)}{\varphi(h)} = \text{const} > 0$. Чтобы доказать неустойчивость схемы (17), (24), достаточно доказать, что $|\lambda| > 1$ хотя бы при одном значении ξ . Подстановка значения $\xi = \pi$ в (33) дает $A = 1 + \frac{2cr}{3}$, $B = 0$. Тогда $\lambda = 1 + \frac{2cr}{3} > 1$ при $cr > 0$, т.е. имеет место неустойчивость при $c > 0$, $r > 0$.

Как известно, с увеличением числа стадий в методах Рунге–Кутта для одномерного уравнения переноса $u_t + au_x = 0$ увеличивается запас устойчивости итоговой схемы, так что при достаточном числе стадий в методе Рунге–Кутта схема становится устойчивой, даже если одностадийная схема была неустойчивой [39, 40]. В нашем случае трехстадийная схема (32) с оператором разностного дифференцирования по пространственной переменной (18) является устойчивой, как показали многочисленные расчеты по этой схеме (результаты некоторых из этих расчетов приводятся ниже).

Покажем теперь, что при некотором ограничении на временной шаг τ решение $P_h(w) = 0$ является единственным решением разностных уравнений (32) при счете на установление. Для этого сначала исключим из (32) промежуточные величины $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, используя линейность оператора $D_h F(w)$ (18):

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\tau} = \left(I + \frac{\tau}{2} P_h + \frac{\tau^2}{6} P_h^2\right) P_h w^n, \quad (34)$$

где I – тождественный оператор, $\|I\| = 1$. В стационарном пределе при $n \rightarrow \infty$ имеем $\left\|\frac{w^{n+1} - w^n}{\tau}\right\| \rightarrow 0$, поэтому из (34) получаем следующее предельное равенство:

$$\left(I + \frac{\tau}{2} P_h + \frac{\tau^2}{6} P_h^2\right) P_h w^n = 0. \quad (35)$$

Нетрудно доказать, что если выбрать шаг τ из требования $\left\| \frac{\tau}{2} P_h + \frac{\tau^2}{6} P_h^2 \right\| < 1$, то оператор в круглых скобках в (35) является невырожденным. Действительно, пусть $B = \frac{\tau}{2} P_h + \frac{\tau^2}{6} P_h^2$. Справедливы неравенства $\|I + B\| \geq \|I\| - \|B\| = |1 - \|B\|| = 1 - \|B\| > 0$ при $\|B\| < 1$. Поэтому единственным решением уравнения (35) является решение $P_h w^n = 0$.

Рассмотрим вопрос о возможности дальнейшего увеличения точности схемы (32), (18) за счет выбора функции $\varphi(x)$. В дальнейшем предполагается, что $\kappa = 1/3$. Запишем локальную погрешность аппроксимации LTE(x, h) оператора (18) с учетом формул (30), (31) в виде $\text{LTE}(x, h) = D_1 h^3 + D_2 h^4 + D_3 h^5 + O(h^6)$, где

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{\lambda}{16} \frac{\partial^2 F(u)}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 F(u)}{\partial x^4}, & D_2 &= \frac{37}{108} \lambda^2 \frac{\partial F(u)}{\partial x} - \frac{5}{16} \lambda \frac{\partial^3 F(u)}{\partial x^3}, \\ D_3 &= -\frac{839}{864} \lambda^2 \frac{\partial^2 F(u)}{\partial x^2} + \frac{151}{576} \lambda \frac{\partial^4 F(u)}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (36)$$

и $\lambda = \frac{\varphi^{(3)}(0)}{\varphi'(0)}$. При счете на установление предельное решение удовлетворяет уравнению $\frac{\partial F(u)}{\partial x} = s(x)$. В

начале процесса установления норма $\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|$ может быть достаточно большой. Если процесс установления сходится, то эта величина будет достаточно малой после некоторого количества итераций, так что можно пренебречь аппроксимацией члена $\frac{\partial u}{\partial t}$ в дальнейшем анализе. Заменим производные $\frac{\partial^k F(u)}{\partial x^k}$ в (36) по формулам $\frac{\partial^k F(u)}{\partial x^k} = \frac{d^{k-1} s(x)}{dx^{k-1}}$, $k = 1, \dots, 4$. Тогда легко найти, что

$$D_1 = -\frac{\lambda}{16} s'(x) + \frac{1}{12} s'''(x). \quad (37)$$

Чтобы обеспечить четвертый порядок точности рассматриваемой разностной схемы по пространственной переменной, положим $D_1 = 0$. Коэффициенты (36) выписаны в центре $x = x_j$ текущей ячейки сетки на оси x . Поскольку вид функции $s(x)$ известен, можем потребовать, чтобы удовлетворялось равенство

$$-\frac{\lambda}{16} s'(x_j) + \frac{1}{12} s'''(x_j) = 0. \quad (38)$$

Отсюда находим λ и затем, используя формулу $\lambda = \frac{\varphi^{(3)}(0)}{\varphi'(0)}$, получаем уравнение

$$\frac{\varphi^{(3)}(0)}{\varphi'(0)} = \frac{4}{3} \frac{s'''(x_j)}{s'(x_j)}. \quad (39)$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ еще зависит от некоторого параметра β так, что $\varphi(x, \beta) = \tilde{\varphi}(\zeta)$, где $\zeta = \beta x$. Тогда из уравнения (39) получаем квадратное уравнение для вычисления β :

$$\beta^2 \frac{\tilde{\varphi}^{(3)}(0)}{\tilde{\varphi}'(0)} = \frac{4}{3} \frac{s'''(x_j)}{s'(x_j)}. \quad (40)$$

Отсюда следует, что если отношение $s'''(x)/s'(x)$ не является константой, т.е. зависит от x , то и оптимальное значение β тоже будет зависеть от x . Однако выше при выводе формулы (24) предполагалось, что параметр β один и тот же для всех j , и формулы (31) были получены из этого предположения.

В общем случае переменного отношения $s'''(x)/s'(x)$ можно находить оптимальное значение параметра β , являющееся одним и тем же для всех x , как решение следующей задачи условной оптимизации: найти $\min_{\beta} \mathcal{F}(\beta)$ при $\beta > 0$, где

$$\mathcal{F}(\beta) = \int_a^b \left[\beta^2 \frac{\tilde{\varphi}^{(3)}(0)}{\tilde{\varphi}'(0)} - \frac{4}{3} \frac{s'''(x)}{s'(x)} \right]^2 dx.$$

Здесь $[a, b]$ — промежуток на оси x , в котором ищется решение уравнения (16). Ясно, что при таком выборе параметра β условие (40) будет нарушаться при некоторых значениях x , так что рассматриваемая аппроксимация (18), (24) производной $\frac{\partial F(u)}{\partial x}$ будет иметь лишь третий порядок точности.

С другой стороны, ясно, что существуют такие функции $s(x)$, которые являются решениями уравнения $s'''(x) = \mu s'(x)$, где $\mu = \text{const} \neq 0$. Тогда из уравнения (40) можно найти оптимальный параметр β , при котором аппроксимация (18), (24) будет иметь порядок точности $O(h^4)$.

В качестве примера рассмотрим задачу о численном решении уравнения (16), где положим, следуя [25], $s(x) = \pi \cos \pi x$ и $F(u) = u$. Источниковый член заставляет численное решение сходиться к стационарному решению $u(x) = \sin(\pi x)$. Вычисления проводились в промежутке $-1 \leq x \leq 1$. Численное решение предполагалось периодическим вне этого интервала, и это использовалось при задании значений решения в двух ячейках сетки слева от точки $x = -1$ и в двух ячейках справа от точки $x = 1$.

Пусть u^n — численное решение, и пусть u_{ex} — точное решение $u_{\text{ex}} = \sin(\pi x)$. Сеточный аналог нормы пространства L_1 вычислялся по формуле

$$E_h = \|u^n - u_{\text{ex}}\|_1 = \sum_j |u_j^n - u_{\text{ex}}| h, \tag{41}$$

где h — шаг равномерной сетки в промежутке $[-1, 1]$. Уравнение (16) решалось численно методом установления, начальное условие задавалось в виде $u(x, 0) = 0$. Применялся следующий критерий сходимости к стационарному решению: $\max_j \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} \right| < \varepsilon$. При задании конкретного значения ε необходимо учиты-

вать ожидаемый порядок малости ошибки предельного стационарного решения относительно h и задавать намного меньшее значение ε , чем порядок точности схемы относительно h . В случае схемы четвертого порядка точности по пространственной переменной задавалось значение $\varepsilon = 10^{-9} \approx 0.1h_{\text{min}}^5$, где h_{min} — наименьшее из значений шагов сетки h , которое использовалось в серии расчетов по конкретной разностной схеме. Иными словами, значение $0.1h_{\text{min}}^5$ меньше на множитель $0.1h_{\text{min}}$, чем ожидаемая погрешность результата расчета по схеме четвертого порядка точности, являющаяся величиной порядка $O(h^4)$.

Таблица 1
Погрешность E_h , порядок сходимости ν ,
число временных шагов N_{conv}
для метода RK3-T

h	E_h	ν	N_{conv}
2/20	0.32516E-2		40665
2/40	0.40999E-3	2.99	728770
2/60	0.12168E-3	3.00	3681382
2/80	0.51368E-4	3.00	11626146

Таблица 2
Погрешность E_h , порядок сходимости ν ,
число временных шагов N_{conv} для
метода RK3-LB, $\beta = 1.0$ в (42)

h	E_h	ν	N_{conv}
2/20	0.27620E-2		47353
2/40	0.34784E-3	2.99	749967
2/60	0.10322E-3	3.00	3789497
2/80	0.43599E-4	3.00	11968705

Таблица 3
Погрешность E_h , порядок сходимости ν ,
число временных шагов N_{conv} для
метода RK3-LB, $\beta = \pi\sqrt{2/3}$ в (42)

h	E_h	ν	N_{conv}
2/20	0.98073E-4		527367
2/40	0.48376E-5	4.34	11487426
2/60	0.89951E-6	4.15	67588287
2/80	0.27763E-6	4.09	216698283

Таблица 4
Погрешность E_h , порядок сходимости ν ,
число временных шагов N_{conv} для
метода RK3-LB1, $\beta = 1.0$ в (42)

h	E_h	ν	N_{conv}
2/20	0.34149E-2		44010
2/40	0.43070E-3	2.99	695674
2/60	0.12784E-3	3.00	3514000
2/80	0.53969E-4	3.00	11097322

Результаты расчетов, представленные в табл. 1–4, были получены при числе Куранта $\tau/h = 0.5$. Порядок точности ν конкретной разностной схемы, входящий в оценку $E_h \leq Ch^p$, вычислялся по формуле [25]

$$\nu = \left\lfloor \frac{\ln(E_{h_{m-1}}/E_{h_m})}{\ln(h_{m-1}/h_m)} \right\rfloor, \text{ где } h_{m-1} \text{ и } h_m \text{ — такие значения шага } h, \text{ что } h_{m-1} \neq h_m, m = 2, 3, \dots$$

При решении задач методом установления машинное время, потребное для сходимости численного решения к стационарному пределу, прямо пропорционально числу выполненных временных шагов N_{conv} . Поэтому в табл. 1–4 приводятся также значения N_{conv} для каждого из тестируемых численных методов.

Далее, в описываемых ниже сериях расчетов использовалась функция $\varphi(x, \beta)$ вида

$$\varphi(x, \beta) = \text{th}(\beta x). \tag{42}$$

Подставляя выражение (42) и $s(x) = \pi \cos \pi x$ в (40), легко найти оптимальное значение β , при котором схема (24), (32) имеет четвертый порядок точности по пространственной переменной:

$$\beta = \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 2.5650996603. \quad (43)$$

Как легко видеть, это выражение для β не зависит от x , что оказалось возможным благодаря тому, что третья производная функции $s(x) = \pi \cos \pi x$ отличается от первой производной лишь на постоянный множитель: $s'''(x)/s'(x) = -\pi^2$. Заметим, что в случае использования разложений сеточных функций в ряды Тейлора нет возможности улучшить точность разностной аппроксимации (18), (24) до $O(h^4)$.

Действительно, в этом случае $\varphi(x) = x$, поэтому $\lambda = \frac{\varphi^{(3)}(0)}{\varphi'(0)} = 0$ и $D_1 = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 F(u)}{\partial x^4} \neq 0$.

В табл. 1–4 представлены результаты численных расчетов тестовой задачи

$$u_t + u_x = \pi \cos(\pi x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(-1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

по схемам третьего и четвертого порядка точности для уравнения (16). Здесь RK3-T — метод Рунге–Кутты третьего порядка точности (32), использующий формулу (19) для вычисления потоков. Метод RK3-LB — это метод (32), в котором потоки рассчитываются по формуле (24), где функция $\varphi(x)$ задавалась согласно (42). Результаты, представленные в табл. 1–4, были получены при $\kappa = 1/3$ в (24).

Таблица 3 подтверждает сделанный выше теоретический вывод о том, что при задании значения β по формуле (43) разностная схема (32), (24) становится схемой четвертого порядка точности по пространственной переменной. Если же параметр β отличается от оптимального значения (43), то порядок точности схемы понижается до третьего (см. табл. 2).

Из сравнения табл. 2 и 3 видно, что увеличение параметра β ведет к увеличению числа временных шагов для выхода разностного решения на стационарный режим.

Погрешность E_h при $\beta = \pi \sqrt{2/3}$ в 33.16 раз меньше на самой грубой сетке, чем в случае метода RK3-T, и выигрыш в ошибке увеличивается при измельчении сетки, так что он равен 185.02 на сетке с шагом $h = 2/80$ (ср. табл. 1 и 3).

Были проведены численные эксперименты по методу RK3-LB также и при $\beta > \pi \sqrt{2/3}$. Они показали, что метод становится неустойчивым при $\beta > 2.7$.

Заметим, что в случае метода RK3-T нельзя повысить точность, достигаемую на заданном шаблоне и на заданной сетке. В то время как проведенное выше аналитическое исследование разностной аппроксимации (18), (24), так и табл. 2 и 3 показывают, что за счет подбора функции $\varphi(x)$ можно существенно повысить точность численного решения по методу RK3-LB на том же шаблоне и на той же сетке.

В табл. 4 представлены результаты расчетов по схеме RK3-LB1, отличающейся от схемы RK3-LB тем, что функция $\varphi(x)$ задается формулой (42), а поток $F_{j+1/2}^n$ вычисляется по формуле (25). Видно, что в этом случае ошибка E_h несколько выше, чем в случае схемы RK3-T (см. табл. 1), но для сходимости требуется меньшее число временных шагов, чем в случае схемы RK3-T. При этом схема RK3-LB1 имеет третий порядок точности.

4. Схема третьего порядка точности для одномерных уравнений Эйлера. Уравнения Эйлера одномерного течения невязкого сжимаемого газа имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F(w)}{\partial x} = 0, \quad w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F(w) = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u + \rho u E \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Здесь ρ — плотность газа, u — скорость, p — давление, $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, ε — удельная внутренняя энергия, γ — отношение удельных теплоемкостей газа, $\gamma = \text{const} > 1$, $E = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2$.

Построенная в предыдущем разделе скалярная разностная схема (32), (18), (24) может быть обобщена естественным образом на случай аппроксимации гиперболической системы законов сохранения (44) с привлечением расщепления вектора потоков $F(w) = F^+(w) + F^-(w)$. В настоящее время известно несколько различных способов расщепления потоков: Стегера–Уорминга [41], Ван Лира [42], Лиу–Стеффена [43], Лакса–Фридрихса и др. [5, 6], Торо и др. [44]. В [34] было выбрано достаточно произвольно расщепление Стегера–Уорминга. Ниже будет тоже использоваться именно это расщепление потоков. В целях краткости здесь не приводятся выражения для векторов F^+ и F^- , соответствующие формулы имеются в [6, 34, 41]. Обобщение формулы (24) на случай аппроксимации уравнений Эйлера (44) может быть записано в виде

$$F_{j+1/2}^n = F_{j+1/2}^+ + F_{j+1/2}^-, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} F_{j+1/2}^+ &= F_j^+ + \frac{1}{2} \Phi [(1 - \kappa) \Delta_{j-1/2} F^+ + (1 + \kappa) \Delta_{j+1/2} F^+]; \\ F_{j+1/2}^- &= F_{j+1}^- - \frac{1}{2} \Phi [(1 - \kappa) \Delta_{j+3/2} F^- + (1 + \kappa) \Delta_{j+1/2} F^-]. \end{aligned} \tag{46}$$

Здесь $\Delta_{j+1/2} F^+ = F_{j+1}^+ - F_j^+$ и Φ — диагональная матрица

$$\Phi = \frac{\varphi(h/2)}{\varphi(h)} I, \tag{47}$$

где I — единичная матрица размера 3×3 . Функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$, $\varphi(x) = -\varphi(-x)$. Нужно подставить формулу для $F_{j+1/2}^n$ (45) в (18), а затем подставить (18) в схему Рунге–Кутты (32) с целью обеспечения третьего порядка аппроксимации численного метода также и во времени.

При отсутствии членов с квадратными скобками в (46) формулы для потоков соответствуют тем, которые используются в известной схеме Годунова первого порядка точности в случае сверхзвукового течения. Как известно, схема Годунова с направленными разностями является монотонной [6]. Согласно [25, 42], члены с квадратными скобками в (46) являются поправками к потокам первого порядка точности, которые сконструированы так, чтобы обеспечивать второй или третий порядок аппроксимации по пространственной переменной. С целью демпфирования осцилляций, которые возникают из-за повышения порядка точности разностной схемы, в [25, 42] использовались в (46) вместо коэффициента $\frac{\varphi(x_{j+1/2} - x_j)}{\varphi(h)}$ ограничители потоков, величина которых стремится к нулю в подобластях больших градиентов численного решения. В результате порядок точности всей схемы по пространственным переменным понижается до первого и схема становится монотонной или квазимонотонной. В этом состоит основной принцип, положенный в основу TVD-схем [3]. Ограничители потоков являются индикаторами гладкости решения и зависят в каждой ячейке от локальных градиентов решения. К настоящему времени были предложены различные выражения для ограничителей потоков, обзор которых имеется в [3, 6].

В связи с вышеизложенным желательно подбирать функцию $\varphi(x)$ в (47) так, чтобы за счет изменения параметра, входящего в формулы для этих функций, можно было обеспечивать малость отношения $\frac{\varphi(h/2)}{\varphi(h)}$, достаточную для того, чтобы эффективно демпфировать паразитические осцилляции численного решения в окрестностях фронтов сильных разрывов решения.

Одним из возможных вариантов такого выбора функции $\varphi(x)$ является функция

$$\varphi(x) = \text{arth}(\beta x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta x}{1 - \beta x}, \quad 0 \leq (\beta x)^2 < 1, \tag{48}$$

где β — задаваемый пользователем положительный параметр. На рис. 1 приводится график отношения $\frac{\text{arth}(X/2)}{\text{arth}(X)}$ ($X = \beta x$), из которого видно, что оно стремится к нулю при $X \rightarrow 1$.

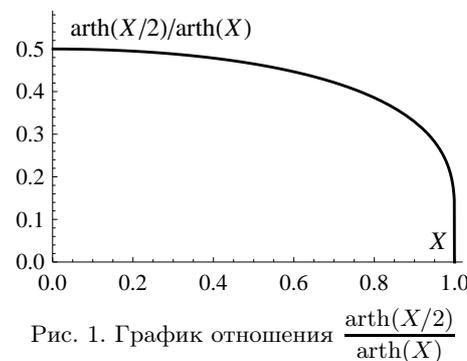


Рис. 1. График отношения $\frac{\text{arth}(X/2)}{\text{arth}(X)}$

Заметим, что при вычислении потоков $F_{j+1/2}^n$ и $F_{j-1/2}^n$ должно использоваться одно и то же значение параметра β , так как это является условием обеспечения второго или третьего порядка аппроксимации рассматриваемой разностной схемы по пространственной переменной.

Ниже приводятся некоторые результаты тестовых расчетов по разностной схеме (32), (45)–(48).

1°. Проверка точности метода на гладком решении. Точное решение этой тестовой задачи взято из [48] и имеет следующий вид:

$$(\rho, u, p) = (1 + 0.2 \sin(2\pi(x - ut)), 0.2, 1). \tag{49}$$

Рассматриваемый тест описывает синусоидальную волну, периодически распространяющуюся в промежутке $0 \leq x \leq 1$. Согласно (49), величины скорости и давления постоянны в расчетной области при $t \geq 0$. Поэтому представляет интерес лишь норма погрешности плотности. Для рассматриваемой задачи подсчитывались сеточные аналоги E_{h1} и E_{h2} норм погрешности плотности в пространствах L_1 и L_2

по формуле $E_{hl} = \left[\sum_j |\rho_j^n - \rho_{\text{ex}}(x_j, t_n)|^l h \right]^{1/l}$, $l = 1, 2$, где $\rho_{\text{ex}}(x, t)$ — точное решение для плотности в соответствии с (49).

Таблица 5
Погрешности в плотности E_{h1} , E_{h2} и
порядки сходимости ν_1, ν_2 при $t = 0.5$

N	E_{h1}	ν_1	E_{h2}	ν_2
10	2.8749E-2		3.1626E-2	
20	3.4400E-3	3.063	3.8867E-3	3.024
40	4.3218E-4	2.993	4.9167E-4	2.983
80	5.3316E-5	3.019	6.0824E-5	3.015
160	6.6275E-6	3.008	7.5656E-6	3.007
320	8.2822E-7	3.000	9.4545E-7	3.000

Таблица 6
Сравнение экстремумов скорости, полученных
по методу TVB и по LB-методу (41)–(44), (28)

Метод	u_{max}	u_{ex}	u_{min}	u_{ex}
TVB [27]	1.000	0.927453	-0.147	0.0
LB, $\beta = 50$	0.946	0.927453	-0.020	0.0
LB, $\beta = 90$	0.933	0.927453	-0.007	0.0

В табл. 5 N — количество ячеек равномерной сетки в промежутке $0 \leq x \leq 1$. В расчетах на всех сетках использовалось значение $\beta = 8$ в (48). Представленные в табл. 5 данные подтверждают третий порядок точности предложенной выше схемы (32), (45)–(48).

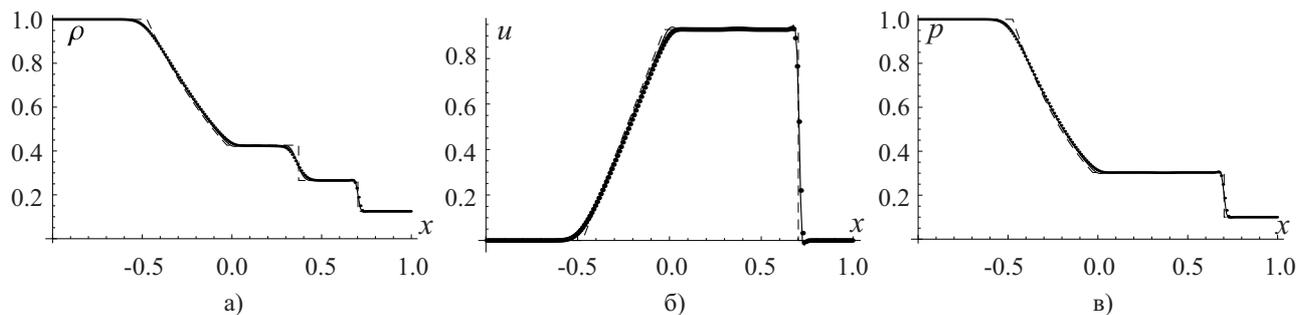


Рис. 2. Численное решение задачи об одномерном распаде разрыва с начальными данными Сода [5, 6] при $t = 0.4$: а) плотность, б) скорость, в) давление

2°. *Задача об одномерном распаде разрыва.* Численный расчет этой задачи был проведен по методу третьего порядка точности (32), (45)–(48) на равномерной сетке из 200 ячеек вдоль оси x , число Куранта равно 0.4. Результаты приведены на рис. 2, где точное решение нанесено штриховой линией, а разностное решение, полученное при $\beta = 50$, — сплошной. Из рисунка видно, что разностное решение квазимонотонное: имеются лишь очень небольшие по амплитуде осцилляции вблизи фронтов сильных разрывов.

В [31] были приведены результаты расчетов этой же задачи с теми же начальными данными из [5, 6] по TVB-схеме третьего порядка точности. Отправным пунктом для этой схемы являются TVD-схемы из работ [25–27]. При выводе этой схемы использовались разложения сеточных функций в ряды Тейлора. В табл. 6 сравниваются амплитуды паразитических осцилляций численных решений, полученных по вышеописанному методу (32), (45)–(48), и по TVB-методу из [31]. В этой таблице u_{max} и u_{min} — значения скорости газа в численном решении в точках локального максимума и локального минимума паразитических осцилляций, лежащих соответственно непосредственно за и перед фронтом ударной волны; u_{ex} — значение скорости в соответствии с точным решением. Из табл. 6 следует, что при $\beta = 50$ погрешности $|u_h - u_{\text{ex}}|$ (u_h — численное решение, полученное либо по TVB-методу [31], либо по LB-методу настоящей работы) в точках экстремумов численных решений в 4–7 раз меньше в случае LB-метода настоящей работы, чем в случае TVB-метода [31].

По LB-методу (32), (45)–(48) были также проведены расчеты при различных значениях параметра β в (48). Оказалось, что с увеличением β уменьшается амплитуда паразитических осцилляций численного решения в окрестностях сильных разрывов. Для примера на рис. 2 пунктирной линией показано численное решение, полученное при $\beta = 90$ в (48). Видно, что амплитуда осцилляций уменьшилась (см. также табл. 6), но и несколько увеличилась интенсивность размазывания контактного разрыва. Из табл. 6 следует, что при $\beta = 90$ погрешности $|u_h - u_{\text{ex}}|$ в точках экстремумов численного решения в 10–20 раз меньше в случае LB-метода настоящей работы, чем в случае TVB-метода [31].

Таким образом, увеличение β в (48) воздействует на численное решение примерно так же, как и увеличение коэффициента искусственной вязкости. Отметим, что при этом никакая искусственная вязкость не вводится в ЛВ-схемы, предлагаемые в настоящей работе.

В TVD-методах тоже не вводится искусственная вязкость для демпфирования паразитических осцилляций численного решения в окрестности сильных разрывов. Однако в работах [3, 45, 46] было показано, что TVD-схемы могут быть построены при помощи введения искусственной вязкости в “стандартные” конечно-разностные схемы, например в схему Лакса–Вендрофа. В коэффициенты этой искусственной вязкости входит ограничитель потоков, который переводит схему Лакса–Вендрофа в подобластях больших градиентов решения в известную схему с направленными разностями (“upwind”) первого порядка точности, которая является монотонной. Кроме того, в [47] было доказано, что порядок точности TVD-методов понижается до первого также в точках экстремума решения.

Принципиальным отличием ЛВ-схем, предложенных в настоящей работе, от TVD-схем является отсутствие ограничителей потока, являющихся нелинейными функциями своих аргументов. Поэтому ЛВ-схемы сохраняют третий порядок точности и в подобластях больших градиентов решения. С другой стороны, построенные ЛВ-схемы являются линейными при их применении к линейным уравнениям с частными производными. По известной теореме Годунова, линейная разностная схема, порядок точности которой выше, чем первый, не может быть монотонной. Однако в ЛВ-схемах имеется некоторый произвол в выборе функции $\varphi(x)$, по степеням которой разлагается функция по формуле Лагранжа–Бюрмана. За счет подходящего выбора функции $\varphi(x)$ можно минимизировать “степень немонотонности” ЛВ-схемы, аппроксимирующей уравнение конвекции $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ($a = \text{const} \neq 0$). Соответствующее исследование требует отдельного рассмотрения.

5. Схема третьего порядка точности для двумерных уравнений Эйлера. Уравнения Эйлера двумерного течения невязкого нетеплопроводного сжимаемого газа имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F(w)}{\partial x} + \frac{\partial G(w)}{\partial y} = 0, \tag{50}$$

где x, y — декартовы пространственные координаты, t — время и

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F(w) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix}, \quad G(w) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Здесь p, ρ, u, v обозначают давление, плотность, составляющие скорости; $E = \varepsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, $H = E + \frac{p}{\rho}$.

Используется уравнение состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$.

Обобщение явной разностной схемы, описанной в предыдущем разделе, на случай двух пространственных переменных осуществляется достаточно просто путем применения построенных разностных операторов (45), (46), (18), аппроксимирующих производную $\frac{\partial F(w)}{\partial x}$ в уравнениях Эйлера, к производной $\frac{\partial G(w)}{\partial y}$. По аналогии с (45), (46) потоки на правой границе $x = x_{j+1/2}$ ячейки (j, k) имеют следующий вид (k — номер ячейки сетки вдоль оси y):

$$F_{j+1/2,k} = F_{j+1/2,k}^+ + F_{j+1/2,k}^-. \tag{52}$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_{j+1/2,k}^+ &= F_{j,k}^+ + \frac{1}{2} \Phi_1 [(1 - \kappa)\Delta_{j-1/2,k} F^+ + (1 + \kappa)\Delta_{j+1/2,k} F^+], \\ F_{j+1/2,k}^- &= F_{j+1,k}^- - \frac{1}{2} \Phi_1 [(1 - \kappa)\Delta_{j+3/2,k} F^- + (1 + \kappa)\Delta_{j+1/2,k} F^-], \end{aligned} \tag{53}$$

где $\Delta_{j+1/2,k} F^+ = F_{j+1,k}^+ - F_{j,k}^+$, $F(w) = F^+(w) + F^-(w)$, при этом, как и в [34], использовалось расщепление векторов потоков $F(w)$ и $G(w)$ по Стегеру и Уормингу; h_1, h_2 — шаги равномерной сетки в направлениях осей x, y соответственно. Далее,

$$\Phi_m = \frac{\varphi(h_m/2)}{\varphi(h_m)} I, \quad m = 1, 2, \tag{54}$$

где I — единичная матрица размера 4×4 . Функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$.

Аналогично выписываются выражения для потоков $G_{j,k+1/2}^+$:

$$G_{j,k+1/2} = G_{j,k+1/2}^+ + G_{j,k+1/2}^- \quad (55)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_{j,k+1/2}^+ &= G_{j,k}^+ + \frac{1}{2} \Phi_2 [(1 - \kappa) \Delta_{j,k-1/2} F G^+ + (1 + \kappa) \Delta_{j,k+1/2} G^+], \\ G_{j,k+1/2}^- &= G_{j,k+1}^- - \frac{1}{2} \Phi_2 [(1 - \kappa) \Delta_{j,k+3/2} G^- + (1 + \kappa) \Delta_{j,k+1/2} G^-], \end{aligned} \quad (56)$$

где $\Delta_{j,k+1/2} G^+ = G_{j,k+1}^+ - G_{j,k}^+$. Затем оператор разностного дифференцирования $P_h(w)$, входящий в схему Рунге–Кутты третьего порядка точности (32), вычислялся по формуле

$$P_h(w) = -\frac{F_{j+1/2,k}(w^*) - F_{j-1/2,k}(w^*)}{h_1} - \frac{G_{j,k+1/2}(w^*) - G_{j,k-1/2}(w^*)}{h_2}. \quad (57)$$

Здесь верхний индекс * принимает значения n , (1), (2) при вычислениях соответственно на первой, второй и третьей стадиях метода (32). Временной шаг τ вычислялся по формуле

$$\tau = C \left[\max_{j,k} \left(\frac{|u_{j,k}^n| + c_{j,k}^n}{h_1}, \frac{|v_{j,k}^n| + c_{j,k}^n}{h_2} \right) \right]^{-1}, \quad (58)$$

где $c_{j,k}^n = \sqrt{\gamma p_{j,k}^n / \rho_{j,k}^n}$ — скорость звука в ячейке (j, k) , C — число Куранта, $C > 0$.

Описанная выше разностная схема тестировалась на задаче об отражении косоугольной ударной волны от стенки. Точное решение рассматриваемой тестовой задачи представляет собой кусочно-постоянную функцию. Значение $\varphi = \pi/6$ для угла между фронтом падающей ударной волны и осью x (см. рис. 3). Подробное описание начальных и граничных условий для данной задачи имеется в [7, 34]. В случае совершенного газа (воздуха) с $\gamma = 1.4$ постоянные точного решения в подобластях 1–3, указанных на рис. 3, имеют вид

- 1) $u_1 = 1.0, v_1 = 0.0, p_1 = 0.084932903, \rho_1 = 1.0, M_1 = 2.90$;
- 2) $u_2 = 0.890755053, v_2 = -0.189217798, p_2 = 0.194177850, \rho_2 = 1.776135164, M_2 = 2.327642861$;
- 3) $u_3 = 0.806645743, v_3 = 0.0, p_3 = 0.390838939, \rho_3 = 2.898621574, M_3 = 1.856588584$.

Здесь M_1, M_2, M_3 — значения числа Маха $M = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{c}$ в подобластях 1, 2, 3 соответственно; c — скорость звука, $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$. Отраженная ударная волна образует угол $\varphi_3 = 0.418279545$ с положительным направлением оси x .

В качестве критерия сходимости разностного решения w^n к предельному стационарному решению проверялось выполнение неравенства $\text{Res}(n) < \varepsilon$, где ε — задаваемое пользователем малое положительное число и

$$\text{Res}(n) = \max_{j,k} \left\{ \max \left(|R_{1,j,k}^n|, |R_{2,j,k}^n|, |R_{3,j,k}^n|, |R_{4,j,k}^n| \right) \right\}, \quad (59)$$

$\{R_{1,j,k}^n, R_{2,j,k}^n, R_{3,j,k}^n, R_{4,j,k}^n\}^T = \frac{w_{j,k}^{n+1} - w_{j,k}^n}{\tau}$; верхний индекс T — операция транспонирования.

На рис. 4 приведены результаты численных расчетов задачи об отражении косоугольной ударной волны от твердой стенки, полученные методом установления по схеме Опера–Чакраварти [25] и по схеме (32), (52)–(56) на равномерной сетке из 160×40 ячеек; $\kappa = 1/3$ в (53), (56). Функция φ , входящая в матрицу (54), задавалась по формуле (48), при этом $\beta = 20$. Метод (32), (48), (52)–(56) будем в дальнейшем называть методом LBRK3. Третий порядок точности схемы [25] во времени обеспечивался применением трехстадийной схемы (32), в дальнейшем будем называть этот численный метод методом TVDRK3. Результаты численных расчетов, приведенные на рис. 4–6, были получены по обоим методам TVDRK3 и LBRK3 при числе Куранта $C = 0.8$ в (58). Число изолиний $M = \text{const}$ одинаково для обеих схем. Видно, что отраженная волна размывается менее интенсивно при счете по схеме LBRK3.

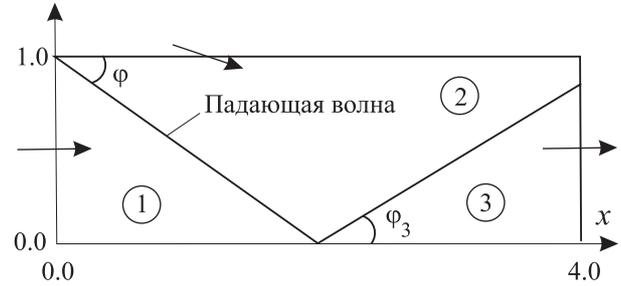


Рис. 3. Пространственная область в задаче об отражении косоугольной ударной волны

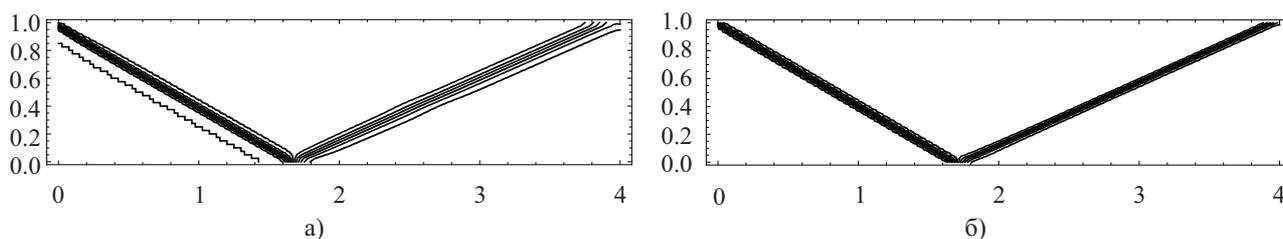


Рис. 4. Задача об отражении косой ударной волны от твердой стенки. Линии постоянных чисел Маха:
а) метод TVDRK3; б) метод LBRK3

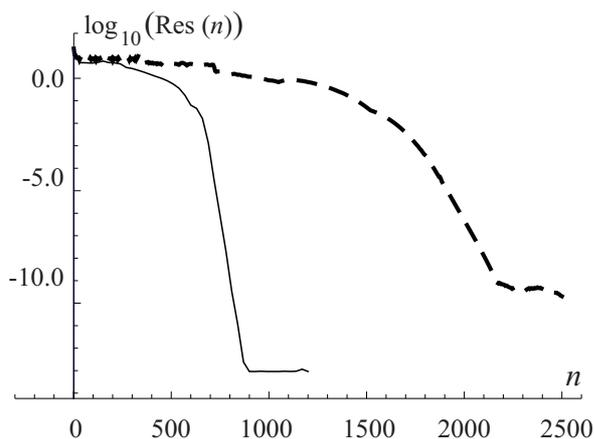


Рис. 5. Невязка (59) как функция числа временных шагов n

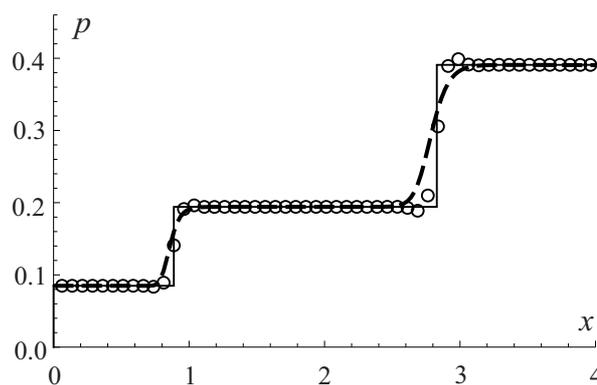


Рис. 6. Задача об отражении косой ударной волны от твердой стенки: (- - -) — расчет по схеме TVDRK3; (o o o) — расчет по схеме LBRK3

На рис. 5 сплошной линией показана невязка (59) в случае схемы LBRK3, а штриховой линией — невязка при использовании схемы TVDRK3. Видно, что новая схема требует 900 шагов во времени для обеспечения падения нормы невязки решения до уровня машинных ошибок округления (10^{-11} – 10^{-12}). В то же время метод TVDRK3 требует 2300 шагов по t для выхода численного решения на установившийся режим, т.е. примерно в 2.55 раз больше, чем схема LBRK3. Отметим также, что схема TVDRK3 требует для получения решения на одном временном шаге машинное время, которое в 2.5 раза больше, чем в случае схемы LBRK3. С учетом того, что для получения стационарного решения по новой схеме требуется в 2.55 раз меньше временных шагов, чем в случае схемы TVDRK3, получаем суммарный выигрыш в машинном времени примерно в 6.38 раз при использовании схемы LBRK3 по сравнению со схемой TVDRK3.

На рис. 6 приведены профили давления газа $p = p(x, y_0)$ в сечении $y_0 = 0.5$, полученные по обеим рассматриваемым схемам. Видно, что профиль давления, полученный по схеме LBRK3, практически монотонный. Далее, отраженная ударная волна размывается в сечении, параллельном оси x , на три и шесть ячеек при использовании методов LBRK3 и TVDRK3 соответственно. При этом в схеме TVDRK3 использовался параметр $\phi = 1/3$, соответствующий третьему порядку точности схемы по пространственным переменным в подобластях гладкого течения.

6. Обобщение LB-схем на трехмерные задачи.

6.1. LB-схема для трехмерного уравнения конвекции. Уравнение конвекции в трехмерном случае имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + C \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{60}$$

где A, B, C — постоянные составляющие вектора скорости конвекции вдоль осей x, y, z соответственно; $|A| + |B| + |C| > 0$. Пусть $u_0(x, y, z)$ — заданная функция, входящая в начальное условие

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z). \tag{61}$$

Как известно, точное решение задачи (60), (61) имеет вид

$$u(x, y, z, t) = u_0(x - At, y - Bt, z - Ct). \tag{62}$$

Следуя [49], будем решать задачу (60), (61) в единичном кубе $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ и возьмем начальное условие в виде

$$u_0(x, y, z) = 1 + 0.2 \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) \sin^2(\pi z). \quad (63)$$

Аппроксимируем уравнение (60) по трехстадийной схеме Рунге–Кутты (32), в которой

$$P_h(u) = - \left(\frac{F_{i+1/2,j,k} - F_{i-1/2,j,k}}{h_1} + \frac{G_{i,j+1/2,k} - G_{i,j-1/2,k}}{h_2} + \frac{H_{i,j,k+1/2} - H_{i,j,k-1/2}}{h_3} \right), \quad (64)$$

h_1, h_2, h_3 — шаги равномерной сетки вдоль осей x, y, z соответственно. Проиллюстрируем построение разностной аппроксимации порядка точности $O(h_1^3)$ для члена $A \frac{\partial u}{\partial x}$ с применением разложения Лагранжа–Бюрмана. Запишем постоянную A в виде $A = A^+ + A^-$, где $A^+ = (A + |A|)/2$, $A^- = (A - |A|)/2$. Далее, положим $F(u) = F^+(u) + F^-(u)$, где $F^\pm(u) = A^\pm u$. Член $\frac{\partial F(u)}{\partial x}$ аппроксимируется по формуле (46). Выражения для аппроксимации членов $B \frac{\partial u}{\partial y}$, $C \frac{\partial u}{\partial z}$ выписываются аналогично.

Как видно из (46), требуются значения численного решения в двух рядах законтурных ячеек, прилегающих к границам $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$. Эти значения задавались с учетом свойства периодичности функции (63).

Временной шаг τ_n задавался по формуле $\tau_n = \kappa \cdot \min \left(\frac{h_1}{|A|}, \frac{h_2}{|B|}, \frac{h_3}{|C|} \right)$, где κ — число Куранта, $0 < \kappa < 1$.

Для рассматриваемой задачи подсчитывались сеточные аналоги норм погрешности плотности в пространствах L_1, L_∞ по формулам

$$E_{h1} = \sum_{i,j,k} |u_{ijk}^n - u_{\text{ex}}(x_i, y_j, z_k, t_n)| h^3, \quad E_{h\infty} = \max_{i,j,k} |u_{ijk}^n - u_{\text{ex}}(x_i, y_j, z_k, t_n)|,$$

где $u_{\text{ex}}(x, y, z, t)$ — точное решение (62) задачи (60), (61); h — шаг равномерной кубической сетки в единичном кубе; (x_i, y_j, z_k) — координаты геометрического центра ячейки (i, j, k) .

В табл. 7 N — количество ячеек равномерной сетки в каждом из промежутков $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. Результаты, представленные в данной таблице, были получены при $U_0 = V_0 = W_0 = 1, \beta = 1$ в (48), $\kappa = 1/3$ в (46), $\frac{\tau}{h} = \frac{1}{2}$. Представленные в табл. 7 данные подтверждают третий порядок точности описанной выше в этом разделе разностной схемы для расчета трехмерных течений невязкого газа.

Была также проведена аналогичная серия расчетов, в которой вместо множителя 0.2 в (63) был взят множитель 0.8. Была получена таблица, аналогичная табл. 7. В полученной таблице числовые значения величин $E_{h1}, E_{h\infty}$ были в четыре раза больше, чем при тех же N в табл. 7, но порядки сходимости ν_1 и ν_∞ оказались полностью идентичными приведенным в табл. 7.

6.2. Явная схема третьего порядка точности для трехмерных уравнений Эйлера. Уравнения Эйлера, описывающие трехмерные течения невязкого нетеплопроводного сжимаемого газа, имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = 0, \quad (65)$$

где x, y, z — декартовы пространственные координаты и

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Таблица 7
Погрешности в плотности $E_{h1}, E_{h\infty}$ и порядки сходимости ν_1, ν_∞ при $t = 1.0$

N	E_{h1}	ν_1	$E_{h\infty}$	ν_∞
10	5.0608E - 03		3.5764E - 02	
20	7.9218E - 04	2.675	5.8629E - 03	2.609
40	1.0358E - 04	2.935	7.7325E - 04	2.923
80	1.3053E - 05	2.988	9.7713E - 05	2.984
160	1.6341E - 06	2.998	1.2243E - 05	2.997

Здесь u, v, w — составляющие скорости вдоль осей x, y, z соответственно; $E = \varepsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$, $H = E + \frac{p}{\rho}$. Как и в разделе 5, используется уравнение состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$.

Построение разностной аппроксимации третьего порядка точности по пространственным переменным для члена $\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z}$ аналогично случаю построения аппроксимации производной $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x}$ (см. раздел 4):

$$\left[\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} \right]_{ijk} = \frac{\mathbf{H}_{i,j,k+1/2} - \mathbf{H}_{i,j,k-1/2}}{h_3},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i,j,k+1/2} &= \mathbf{H}_{i,j,k+1/2}^+ + \mathbf{H}_{i,j,k+1/2}^-, \\ \mathbf{H}_{i,j,k+1/2}^+ &= \mathbf{H}_{i,j,k}^+ + \frac{1}{2} \Phi_3 [(1 - \kappa) \Delta_{i,j,k-1/2} \mathbf{H}^+ + (1 + \kappa) \Delta_{i,j,k+1/2} \mathbf{H}^+], \\ \mathbf{H}_{i,j,k+1/2}^- &= \mathbf{H}_{i,j,k+1}^- - \frac{1}{2} \Phi_3 [(1 - \kappa) \Delta_{i,j,k+3/2} \mathbf{H}^- + (1 + \kappa) \Delta_{i,j,k+1/2} \mathbf{H}^-]. \end{aligned} \quad (67)$$

Здесь $\Delta_{i,j,k+1/2} \mathbf{H}^\pm = \mathbf{H}_{i,j,k+1}^\pm - \mathbf{H}_{i,j,k}^\pm$, $\mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{H}^+(\mathbf{U}) + \mathbf{H}^-(\mathbf{U})$. Далее, $\Phi_3 = \frac{\varphi(h_3/2)}{\varphi(h_3)} I$, где I — единичная матрица размера 5×5 .

В формулы (67) входят матрицы \mathbf{H}^+ и \mathbf{H}^- . Выражения для этих матриц отсутствуют в [6, 41]. Указанные матрицы были получены нами в аналитическом виде для расщепления Стегера–Уорминга [41] с помощью программы, написанной на языке системы *Mathematica*. Для получения в аналитическом виде разложения $\mathbf{C} = \mathbf{K} \mathbf{\Lambda} \mathbf{K}^{-1}$, где $\mathbf{C}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$, использовалась встроенная функция `JordanDecomposition[C]`, результатом работы которой являются матрицы \mathbf{K} и $\mathbf{\Lambda}$. В случае рассматриваемой матрицы $\mathbf{C}(\mathbf{U})$ матрица $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные значения λ_ν матрицы \mathbf{C} , $\nu = 1, \dots, 5$. Представим λ_ν в виде $\lambda_\nu = \lambda_\nu^+ + \lambda_\nu^-$, где $\lambda_\nu^\pm = \frac{1}{2}(\lambda_\nu \pm |\lambda_\nu|)$, и пусть $\mathbf{\Lambda}^\pm = \text{diag}(\lambda_1^\pm, \dots, \lambda_5^\pm)$. Тогда, согласно расщеплению потоков по Стегеру и Уормингу, получаем $\mathbf{C} = \mathbf{K}(\mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^-) \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^-$, где $\mathbf{C}^\pm = \mathbf{K} \mathbf{\Lambda}^\pm \mathbf{K}^{-1}$. Теперь воспользуемся известным соотношением [6] $\mathbf{H} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}$: $\mathbf{H} = (\mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^-) \mathbf{U} = \mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-$, где $\mathbf{H}^\pm = \mathbf{C}^\pm \mathbf{U}$.

Для полноты описания LB-схемы приведем выражения для всех шести векторов потоков $\mathbf{F}^+, \mathbf{F}^-, \mathbf{G}^+, \mathbf{G}^-, \mathbf{H}^+, \mathbf{H}^-$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^\alpha &= \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} \lambda_4^{(1),\alpha} + 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(1),\alpha} + \lambda_5^{(1),\alpha} \\ (u - c)\lambda_4^{(1),\alpha} + 2(\gamma - 1)u\lambda_1^{(1),\alpha} + (u + c)\lambda_5^{(1),\alpha} \\ v[\lambda_4^{(1),\alpha} + 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(1),\alpha} + \lambda_5^{(1),\alpha}] \\ w[\lambda_4^{(1),\alpha} + 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(1),\alpha} + \lambda_5^{(1),\alpha}] \\ (\mathcal{H} - uc)\lambda_4^{(1),\alpha} + (\gamma - 1)V^2\lambda_1^{(1),\alpha} + (\mathcal{H} + uc)\lambda_5^{(1),\alpha} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{G}^\alpha &= \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} \lambda_4^{(2),\alpha} + 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(2),\alpha} + \lambda_5^{(2),\alpha} \\ u[\lambda_4^{(2),\alpha} + 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(2),\alpha} + \lambda_5^{(2),\alpha}] \\ (v - c)\lambda_4^{(2),\alpha} + 2(\gamma - 1)v\lambda_1^{(2),\alpha} + (v + c)\lambda_5^{(2),\alpha} \\ w[\lambda_4^{(2),\alpha} + 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(2),\alpha} + \lambda_5^{(2),\alpha}] \\ (\mathcal{H} - vc)\lambda_4^{(2),\alpha} + (\gamma - 1)V^2\lambda_1^{(2),\alpha} + (\mathcal{H} + vc)\lambda_5^{(2),\alpha} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}^\alpha &= \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} \lambda_4^{(3),\alpha} + 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(3),\alpha} + \lambda_5^{(3),\alpha} \\ u[\lambda_4^{(3),\alpha} + 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(3),\alpha} + \lambda_5^{(3),\alpha}] \\ v[\lambda_4^{(3),\alpha} + 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(3),\alpha} + \lambda_5^{(3),\alpha}] \\ (w - c)\lambda_4^{(3),\alpha} + 2(\gamma - 1)w\lambda_1^{(3),\alpha} + (w + c)\lambda_5^{(3),\alpha} \\ (\mathcal{H} - wc)\lambda_4^{(3),\alpha} + (\gamma - 1)V^2\lambda_1^{(3),\alpha} + (\mathcal{H} + wc)\lambda_5^{(3),\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \begin{cases} \alpha = +, -, \lambda_\nu^{(l),\alpha} = \frac{1}{2}(\lambda_\nu^{(l)} \pm |\lambda_\nu^{(l)}|), \quad l = 1, 2, 3, \nu = 1, \dots, 5, \\ \lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = \lambda_3^{(1)} = u, \quad \lambda_4^{(1)} = u - c, \quad \lambda_5^{(1)} = u + c, \quad \lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = \lambda_3^{(2)} = v, \quad \lambda_4^{(2)} = v - c, \quad \lambda_5^{(2)} = v + c, \\ \lambda_1^{(3)} = \lambda_2^{(3)} = \lambda_3^{(3)} = w, \quad \lambda_4^{(3)} = w - c, \quad \lambda_5^{(3)} = w + c, \quad V^2 = u^2 + v^2 + w^2, \quad \mathcal{H} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} V^2. \end{cases}$$

Значения численного решения в законтурных ячейках, прилегающих к границам $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2$, задавались по способу, описанному в [6]. А именно, пусть N — количество ячеек равномерной сетки вдоль каждой из осей x , y , z внутри расчетной области. Ячейки, лежащие внутри промежутка $0 \leq x \leq 2$, нумеровались так: $i = 3, \dots, N + 2$; тогда законтурными являются ячейки с номерами $i = 1, 2$ и $i = N + 3, N + 4$. Введем вектор “примитивных” переменных $\mathbf{V} = (u, v, w, p, \rho)$. Тогда полагали, что $\mathbf{V}_{1,j,k}^n = \mathbf{V}_{4,j,k}^n$, $\mathbf{V}_{2,j,k}^n = \mathbf{V}_{3,j,k}^n$; $\mathbf{V}_{N+3,j,k}^n = \mathbf{V}_{N+2,j,k}^n$, $\mathbf{V}_{N+4,j,k}^n = \mathbf{V}_{N+1,j,k}^n$. По аналогичным формулам задавались величины в фиктивных ячейках у границ расчетной области, параллельных плоскостям $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$.

Временной шаг τ вычислялся по аналогии с (58) по формуле

$$\tau = C \left[\max_{i,j,k} \left(\frac{|u_{i,j,k}^n| + c_{i,j,k}^n}{h_1}, \frac{|v_{i,j,k}^n| + c_{i,j,k}^n}{h_2}, \frac{|w_{i,j,k}^n| + c_{i,j,k}^n}{h_3} \right) \right]^{-1}, \quad (68)$$

где h_1, h_2, h_3 — шаги равномерной расчетной сетки вдоль осей x, y, z . Третий порядок точности рассматриваемой разностной схемы во времени обеспечивался, как и в двумерном случае, применением трехстадийной схемы Рунге–Кутты (32). Ниже будем для краткости называть вышеописанную разностную схему методом LB3D-RK3.

Тестирование схемы LB3D-RK3 было осуществлено на задаче о сферическом взрыве [6, 11, 44]. В этой задаче в начальный момент времени $t = 0$ имеется сферическая область, заполненная газом под высоким давлением; вне этой сферы находится газ под низким давлением. По существу, это сферически симметричный вариант задачи о распаде разрыва. Задача решалась, как и в [6, 11, 44], в кубе $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$ при следующих начальных данных:

$$(\rho, u, v, w, p)^T = \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 1)^T, & r \leq 0.4, \\ (0.125, 0, 0, 0, 1)^T, & r > 0.4, \end{cases} \quad (69)$$

где $r = [(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2]^{0.5}$. При $t > 0$ решение содержит сферическую ударную волну, сферическую контактную поверхность, распространяющуюся в том же направлении, что и ударная волна, и сферическую волну разрежения, движущуюся в направлении точки $(1, 1, 1)$.

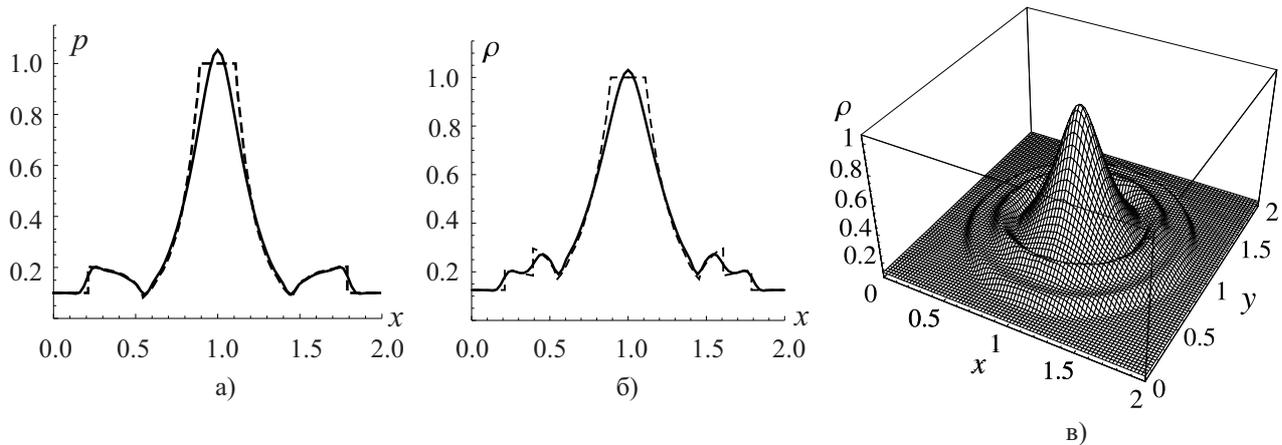


Рис. 7. Решение задачи о сферическом взрыве при $t = 0.25$. Давление в сечении $y = 1$, $z = 1$ (а), плотность в сечении $y = 1$, $z = 1$ (б), поверхность численного решения для плотности в плоскости $z = 1$ (в)

Точное решение рассматриваемой задачи было получено в [6] путем численного решения одномерных уравнений Эйлера в сферических координатах на очень мелкой сетке из 1000 ячеек. Результаты трехмерных численных расчетов, полученные по методу LB3D-RK3, представлены на рис. 7. Число Куранта $C = 0.5$ в (68), использовалась пространственная расчетная сетка из $81 \times 81 \times 81$ кубических ячеек; $\beta = 28$

в (48). Профили давления (рис. 7а) и плотности (рис. 7б) показаны на линии пересечения плоскостей $y = 1$, $z = 1$. Точное решение из [6] показано штриховыми линиями, а численное решение по методу LB3D-RK3 — сплошными. Как видно из рис. 7, в численном решении отсутствуют паразитические осцилляции численного решения в окрестности поверхностей контактного разрыва и ударной волны. Особенно хорошее согласие с точным решением имеет место в профиле давления в области между волной разрежения и фронтом ударной волны. Максимальное значение плотности в точке $x = 1$ лишь на 3% превышает точное значение $\rho = 1$. И, наконец, расчет рассматриваемой задачи до момента $t = 0.25$, для которого в [6, 11, 44] имеются профили точного решения, потребовал очень малого машинного времени: 125 секунд работы процессора Intel с тактовой частотой 3.0 гигагерц.

7. Заключение. Выше показано применение разложений сеточных функций в ряды Лагранжа–Бюрмана для конструирования разностных схем третьего порядка точности, аппроксимирующих уравнения Эйлера невязкого газа, зависящие от одной, двух или трех пространственных переменных и времени. Новая схема третьего порядка точности, построенная для двумерных уравнений Эйлера, требует для своей реализации на каждом временном шаге существенно меньшего количества арифметических операций, чем TVD-схема третьего порядка точности из [25]. Это связано с тем, что в новой схеме, в отличие от метода [25], не требуются громоздкие вычисления ограничителей потоков в каждом пространственном направлении.

Выше применялись направленные разности при построении LB-схем третьего порядка точности. Представляет интерес построение центрированных LB-схем; обзор некоторых существующих центрированных схем имеется в [49].

В настоящей работе использованы нечетные функции $\varphi(x)$. В дальнейшем представляет интерес исследование применения в формуле разложения Лагранжа–Бюрмана (2) функций $\varphi(x)$, которые не являются ни четными, ни нечетными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. 2-е изд. М.: Наука, 1980.
2. Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.
3. LeVeque R.J. Numerical methods for conservation laws. Basel: Birkhäuser, 1992.
4. Tolstykh A.I. High accuracy non-centered compact difference schemes for fluid dynamics applications. Singapore: World Scientific, 1994.
5. Пинчуков В.И., Шу Ч.-В. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния РАН, 2000.
6. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Berlin: Springer, 2010.
7. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014.
8. Boscheri W., Balsara D.S., Dumbser M. Lagrangian ADER-WENO finite volume schemes on unstructured triangular meshes based on genuinely multidimensional HLL Riemann solvers // J. Comput. Phys. 2014. **267**. 112–138.
9. Рустмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
10. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
11. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: КРАСАНД, 2014.
12. LeVeque R.J. Finite-volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
13. Ворожцов Е.В. Сборник задач по теории разностных схем. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000.
14. Jameson A., Schmidt W., Turkel E. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes // AIAA Paper. 1981. doi 10.2514/6.1981-1259.
15. Липавский М.В., Толстых А.И. Об одной мультиоператорной схеме десятого порядка и ее применении в прямом численном моделировании // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. **53**, № 4. 600–614.
16. Lax P.D., Wendroff B. Systems of conservation laws III // Comm. Pure Appl. Math. 1960. **13**, N 2. 217–237.
17. MacCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper. 1969. doi 10.2514/6.1969-354.
18. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. **180**, № 6. 1303–1305.
19. Burstein S.Z., Mirin A.A. Third order difference methods for hyperbolic equations // J. Comput. Phys. 1970. **5**, N 3. 547–571.
20. Балакин В.Б. О методах типа Рунге–Кутты для уравнений газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1970. **10**, № 6. 1512–1519.

21. *Warming R.F., Kutler P., Lomax H.* Second- and third-order noncentered difference schemes for nonlinear hyperbolic equations // *AIAA J.* 1973. **11**, N 2. 189–195.
22. *Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н.* Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики. Новосибирск: Наука, 1985.
23. *Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N.* Methods for the localization of singularities in numerical solutions of gas dynamics problems. New York: Springer, 1990.
24. *Zabusky N.J., Gupta S., Gulak Y.* Localization and spreading of contact discontinuity layers in simulations of compressible dissipative flows // *J. Comput. Phys.* 2003. **188**, N 2. 348–364.
25. *Chakravarthy S.R., Osher S.* A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // *AIAA Paper*. 1985. doi 10.2514/6.1985-0363.
26. *Osher S., Chakravarthy S.R.* Very high order accurate TVD schemes // *ICASE Report N 84-44*. 1984.
27. *Osher S., Chakravarthy S.R.* Very high order accurate TVD schemes // *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. Vol. 2. Heidelberg: Springer, 1986. 229–274.
28. *Chakravarthy S.R., Szema K.-Y.* Euler solver for three-dimensional supersonic flows with subsonic pockets // *J. Aircraft*. 1987. **24**, N 2. 73–83.
29. *Yamamoto S., Daiguji H.* Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier–Stokes equations // *Comp. Fluids*. 1993. **22**, N 2–3. 259–270.
30. *Daiguji H., Yuan X., Yamamoto S.* Stabilization of higher-order high resolution schemes for the compressible Navier–Stokes equations // *Int. J. Numer. Methods Heat & Fluid Flow*. 1997. **7**, N 2/3. 250–274.
31. *Bona C., Bona-Casas C., Terradas J.* Linear high-resolution schemes for hyperbolic conservation laws: TVB numerical evidence // *J. Comput. Phys.* 2009. **228**, N 6. 2266–2281.
32. *Liska R., Wendroff B.* Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // *SIAM J. Sci. Comput.* 2003. **25**. 995–1017.
33. *Ворожцов Е.В.* Построение разностных схем для гиперболических законов сохранения с помощью разложений Лагранжа–Бюрмана // *Тр. Междунар. конф. по вычислительной математике. Часть I*. Новосибирск: Прайскурьер, 2004. 443–448.
34. *Ворожцов Е.В.* Применение разложений Лагранжа–Бюрмана для численного интегрирования уравнений невязкого газа // *Вычислительные методы и программирование*. 2011. **12**. 348–361.
35. *Ворожцов Е.В.* Построение явных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью разложений Лагранжа–Бюрмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2010. **11**. 198–209.
36. *Vorozhtsov E.V.* Derivation of explicit difference schemes for ordinary differential equations with the aid of Lagrange–Bürmann expansions // *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 6244. Heidelberg: Springer, 2010. 250–266.
37. *Strampp W., Ganzha V., Vorozhtsov E.* Höhere Mathematik mit Mathematica. Braunschweig: Vieweg, 1997.
38. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme V: A second-order sequel to Godunov’s method // *J. Comput. Phys.* 1979. **32**, N 1. 101–136.
39. *Pike J., Roe P.L.* Accelerated convergence of Jameson’s finite-volume Euler scheme using van der Houwen integrators // *Comp. Fluids*. 1985. **13**, N 2. 223–236.
40. *Ganzha V.G., Vorozhtsov E.V.* Computer-aided analysis of difference schemes for partial differential equations. New York: Wiley, 1996.
41. *Steger J.L., Warming R.F.* Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with applications to finite difference methods // *J. Comput. Phys.* 1981. **40**. 263–293.
42. *Anderson W.K., Thomas J.L., Van Leer B.* Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations // *AIAA Journal*. 1986. **24**, N 9. 1453–1460.
43. *Liou M.S., Steffen C.J.* A new flux splitting scheme // *J. Comput. Phys.* 1993. **107**, N 1. 23–39.
44. *Toro E.F., Castro C.E., Lee B.J.* A novel numerical flux for the 3D Euler equations with general equation of state // *J. Comput. Phys.* 2015. **303**. 80–94.
45. *Sweby P.K.* High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // *SIAM J. Num. Anal.* 1984. **21**, N 5. 995–1011.
46. *Davis S.F.* A simplified TVD finite difference scheme via artificial viscosity // *SIAM J. Sci. and Statist. Comput.* 1987. **8**, N 1. 1–18.
47. *Osher S., Chakravarthy S.* High resolution schemes and the entropy condition // *SIAM J. Num. Anal.* 1984. **21**, N 5. 984–995.
48. *Wu K., Yang Z., Tang H.* A third-order accurate direct Eulerian GRP scheme for the Euler equations in gas dynamics // *J. Comput. Phys.* 2014. **264**. 177–208.
49. *Lahooti M., Pishavar A.* A new fourth order central WENO method for 3D hyperbolic conservation laws // *Appl. Math. Comput.* 2012. **218**, N 20. 10258–10270.

Поступила в редакцию
11.01.2016

Construction of Third-Order Schemes Using Lagrange–Bürmann Expansions for the Numerical Integration of Inviscid Gas Equations

E. V. Vorozhtsov¹

¹ *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Institutskaya ulitsa 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, Leading Scientist, e-mail: vorozh@itam.nsc.ru*

Received January 11, 2016

Abstract: It is proposed to construct several explicit third-order difference schemes for the hyperbolic conservation laws using the expansions of grid functions in Lagrange–Bürmann series. The results of test computations for the one-dimensional advection equation and multidimensional Euler equations governing the inviscid compressible gas flows confirm the third order of accuracy of the constructed schemes. The quasi-monotonous profiles of numerical solutions are obtained.

Keywords: hyperbolic conservation laws, Lagrange–Bürmann expansions, difference methods.

References

1. A. A. Samarskii and Yu. P. Popov, *Difference Schemes of Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].
2. A. I. Tolstykh, *Compact Difference Schemes and Their Application to Aerohydrodynamic Problems* (Nauka, Moscow, 1990) [in Russian].
3. R. J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws* (Birkhäuser, Basel, 1992).
4. A. I. Tolstykh, *High Accuracy Non-Centered Compact Difference Schemes for Fluid Dynamics Applications* (World Scientific, Singapore, 1994).
5. V. I. Pinchukov and C.-W. Shu, *High Order Numerical Methods for the Problems of Aerodynamics* (Izd. Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
6. E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction* (Springer, Berlin, 2010).
7. K. N. Volkov, Yu. N. Deryugin, V. N. Emel'yanov, A. S. Kozelkov, and I. V. Teterina, *Difference Schemes in Gas Dynamics on Unstructured Grids* (Fizmatlit, Moscow, 2014) [in Russian].
8. W. Boscheri, D. S. Balsara, and M. Dumbser, “Lagrangian ADER-WENO Finite Volume Schemes on Unstructured Triangular Meshes Based on Genuinely Multidimensional HLL Riemann Solvers,” *J. Comput. Phys.* **267**, 112–138 (2014).
9. R. Richtmyer and K. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems* (Wiley, New York, 1967; Mir, Moscow, 1972).
10. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Yanenko, *Systems of Quasilinear Equations and their Application to Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1978; Amer. Math. Soc., Providence, 1983).
11. I. V. Popov and I. V. Fryazinov, *Method of Adaptive Artificial Viscosity for Solving the Gas Dynamics Equations* (Krasand, Moscow, 2014) [in Russian].
12. R. J. LeVeque, *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004).
13. E. V. Vorozhtsov, *Exercises for the Theory of Difference Schemes* (Novosibirsk. Tekh. Univ., Novosibirsk, 2000) [in Russian].
14. A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel, “Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes,” *AIAA Paper* (1981). doi 10.2514/6.1981-1259
15. M. V. Lipavskii and A. I. Tolstykh, “Tenth-Order Accurate Multioperator Scheme and Its Application in Direct Numerical Simulation,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **53** (4), 600–614 (2013) [*Comput. Math. Math. Phys.* **53** (4), 455–468 (2013)].
16. P. D. Lax and B. Wendroff, “Systems of Conservation Laws III,” *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (2), 217–237 (1960).
17. R. W. MacCormack, “The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering,” *AIAA Paper* (1969). doi 10.2514/6.1969-354

18. V. V. Rusanov, "Difference Schemes of the Third-Order Accuracy for Continuous Computation of Discontinuous Solutions," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **180** (6), 1303–1305 (1968) [*Sov. Math. Dokl.* **9**, 771–777 (1968)].
19. S. Z. Burstein and A. A. Mirin, "Third Order Difference Methods for Hyperbolic Equations," *J. Comput. Phys.* **5** (3), 547–571 (1970).
20. V. B. Balakin, "Methods of the Runge-Kutta Type for Gas Dynamics," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **10** (6), 1512–1519 (1970) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **10** (6), 208–216 (1970)].
21. R. F. Warming, P. Kutler, and H. Lomax, "Second- and Third-Order Noncentered Difference Schemes for Nonlinear Hyperbolic Equations," *AIAA J.* **11** (2), 189–196 (1973).
22. E. V. Vorozhtsov and N. N. Yanenko, *Methods for the Localization of Singularities in Numerical Solutions of Gas Dynamics Problems* (Nauka, Novosibirsk, 1985) [in Russian].
23. E. V. Vorozhtsov and N. N. Yanenko, *Methods for the Localization of Singularities in Numerical Solutions of Gas Dynamics Problems* (Springer, New York, 1990).
24. N. J. Zabusky, S. Gupta, and Y. Gulak, "Localization and Spreading of Contact Discontinuity Layers in Simulations of Compressible Dissipative Flows," *J. Comput. Phys.* **188** (2), 348–364 (2003).
25. S. R. Chakravarthy and S. Osher, "A New Class of High Accuracy TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *AIAA Paper* (1985). doi 10.2514/6.1985-0363
26. S. Osher and S. R. Chakravarthy, *Very High Order Accurate TVD Schemes*, ICASE Report No. 84-44 (1984).
27. S. Osher and S. R. Chakravarthy, "Very High Order Accurate TVD Schemes," in *IMA Volumes in Mathematics and its Applications* (Springer, Heidelberg, 1986), Vol. 2, pp. 229–274.
28. S. R. Chakravarthy and K.-Y. Szema, "Euler Solver for Three-Dimensional Supersonic Flows with Subsonic Pockets," *J. Aircraft* **24** (2), 73–83 (1987).
29. S. Yamamoto and H. Daiguji, "Higher-Order-Accurate Upwind Schemes for Solving the Compressible Euler and Navier–Stokes Equations," *Comp. Fluids* **22** (2–3), 259–270 (1993).
30. H. Daiguji, X. Yuan, and S. Yamamoto, "Stabilization of Higher-Order High Resolution Schemes for the Compressible Navier–Stokes Equations," *Int. J. Numer. Methods Heat & Fluid Flow* **7** (2/3), 250–274 (1997).
31. C. Bona, C. Bona-Casas, and J. Terradas, "Linear High-Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws: TVB Numerical Evidence," *J. Comput. Phys.* **228** (6), 2266–2281 (2009).
32. A. Liska and B. Wendroff, "Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for the Euler Equations," *SIAM J. Sci. Comput.* **25**, 995–1017 (2003).
33. E. V. Vorozhtsov, "Construction of Difference Schemes for Hyperbolic Conservation Laws with the Aid of the Lagrange–Bürmann Expansions," in *Proc. Int. Conf. on Numerical Mathematics, Novosibirsk, Russia, June 21–25, 2004* (Price-Courier Pres, Novosibirsk, 2004), Part 1, pp. 443–448.
34. E. V. Vorozhtsov, "Application of Lagrange–Bürmann Expansions for the Numerical Integration of the Inviscid Gas Equations," *Vychisl. Metody Programm.* **12**, 348–361 (2011).
35. E. V. Vorozhtsov, "Derivation of Explicit Difference Schemes for Ordinary Differential Equations with the Aid of Lagrange–Bürmann Expansions," *Vychisl. Metody Programm.* **11**, 198–209 (2010).
36. E. V. Vorozhtsov, "Derivation of Explicit Difference Schemes for Ordinary Differential Equations with the Aid of Lagrange–Bürmann Expansions," in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2010), Vol. 6244, pp. 250–266.
37. W. Strampp, V. Ganzha, and E. Vorozhtsov, *Höhere Mathematik mit Mathematica* (Vieweg, Braunschweig, 1997).
38. B. van Leer, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method," *J. Comput. Phys.* **32** (1), 101–136 (1979).
39. J. Pike and P. L. Roe, "Accelerated Convergence of Jameson's Finite-Volume Euler Scheme Using van der Houwen Integrators," *Comp. Fluids* **13** (2), 223–236 (1985).
40. V. G. Ganzha and E. V. Vorozhtsov, *Computer-Aided Analysis of Difference Schemes for Partial Differential Equations* (Wiley, New York, 1996).
41. J. L. Steger and R. F. Warming, "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Applications to Finite Difference Methods," *J. Comput. Phys.* **40**, 263–293 (1981).
42. W. K. Anderson, J. L. Thomas, and B. van Leer, "Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations," *AIAA J.* **24** (9), 1453–1460 (1986).
43. M. S. Liou and C. J. Steffen, "A New Flux Splitting Scheme," *J. Comput. Phys.* **107** (1), 23–39 (1993).
44. E. F. Toro, C. E. Castro, and B. J. Lee, "A Novel Numerical Flux for the 3D Euler Equations with General Equation of State," *J. Comput. Phys.* **303**, 80–94 (2015).

45. P. K. Sweby, "High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws," *SIAM J. Num. Anal.* **21** (5), 995–1011 (1984).
46. S. F. Davis, "A Simplified TVD Finite Difference Scheme via Artificial Viscosity," *SIAM J. Sci. and Statist. Comput.* **8** (1), 1–18 (1987).
47. S. Osher and S. Chakravarthy, "High Resolution Schemes and the Entropy Condition," *SIAM J. Num. Anal.* **21** (5), 984–995 (1984).
48. K. Wu, Z. Yang, and H. Tang, "A Third-Order Accurate Direct Eulerian GRP Scheme for the Euler Equations in Gas Dynamics," *J. Comput. Phys.* **264**, 177–208 (2014).
49. M. Lahooti and A. Pishavar, "A New Fourth Order Central WENO Method for 3D Hyperbolic Conservation Laws," *Appl. Math. Comput.* **218** (20), 10258–10270 (2012).