

УДК 519.6

doi 10.26089/NumMet.v17r103

РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ПОЛНЫХ ТЕНЗОРНЫХ МАГНИТНО-ГРАДИЕНТНЫХ ДАННЫХ

Я. Ван¹, Д. В. Лукьяненко², А. Г. Ягола³

Рассматриваются особенности численной реализации решения трехмерной обратной задачи обращения полных тензорных магнитно-градиентных данных, которая моделируется системой двух трехмерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Для решения этой некорректно поставленной задачи применяется алгоритм, основанный на минимизации функционала А. Н. Тихонова. В качестве метода минимизации используется метод сопряженных градиентов. Выбор параметра регуляризации осуществляется в соответствии с версией обобщенного принципа невязки, в которой учитываются ошибки округления, существенные при решении задач большой размерности.

Ключевые слова: магнитостатика, полный тензор градиентов компонент магнитной индукции, обратные задачи, некорректно поставленные задачи, метод регуляризации.

1. Введение. Математические модели в магнитостатике, связывающие плотность магнитного момента ограниченного тела и его магнитную индукцию, достаточно хорошо известны (например, [2–6]). Менее известны математические модели магнитостатики, связывающие объемную (или поверхностную) плотность магнитного момента тела с полным тензором градиентов компонент магнитной индукции (ГКМИ), измеряемым в некоторой удаленной от тела области [7–12]. Китайским участником рассматриваемой работы вместе со своими коллегами из Института геологии и геофизики Китайской академии наук было установлено [13], что тензор градиентов компонент магнитной индукции в таких моделях обладает большей чувствительностью к тонкой структуре распределения магнитного момента, чем сама магнитная индукция. Поэтому измерения тензора ГКМИ представляются более перспективными для интерпретации магнитных полей с помощью решения обратных задач. Модели, включающие тензор ГКМИ, могут быть рассмотрены в различных вариантах: линейных и нелинейных, непрерывных и дискретных, для двумерных и трехмерных магнитных полей. Все эти модели порождают обратные задачи нахождения плотности магнитного момента по тензору ГКМИ в различных постановках задачи.

В настоящей статье рассматривается наиболее перспективная для интерпретации постановка: необходимо обратить полные магнитно-градиентные данные в трехмерной области с целью восстановления объемной намагниченности. Подобная обратная задача магнитостатики описывается операторным уравнением первого рода, которое в общем случае представляет собой некорректно поставленную задачу. Она может как иметь неединственное решение, так и не иметь классического решения вообще. При этом она, как правило, неустойчива по отношению к ошибкам измерения входных данных (компонент тензора ГКМИ). Эти трудности преодолеваются с помощью применения специальных методов решения таких некорректно поставленных задач — регуляризирующих алгоритмов (РА). Важнейшим классом регуляризирующих алгоритмов является семейство вариационных РА. Наиболее известен из них метод регуляризации А. Н. Тихонова. Часто используется также обобщенный метод невязки (ОМН).

В данной работе рассмотрены особенности реализации решения трехмерной обратной задачи обращения полных тензорных магнитно-градиентных данных.

2. Полный тензор градиентов компонент магнитной индукции (ГКМИ). Для начала введем понятие полного тензора градиентов компонент магнитной индукции $\mathbf{B}_{\text{tensor}}$ (ГКМИ), который в отличие от индукции магнитного поля $\mathbf{B}_{\text{field dipole}}$ (которая имеет 3 компоненты) имеет 9 компонент и может быть

¹ Институт геологии и геофизики Китайской академии наук, 100029, Пекин, Китай; профессор, e-mail: yfwang@mail.iggcas.ac.cn

² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; ассистент, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

³ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; профессор, e-mail: yagola@physics.msu.ru

записан в следующей матричной форме:

$$\mathbf{B}_{\text{tensor}} = [B_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix},$$

где $\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x}$, $\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}$, $\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial y}$ и $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$.

3. Трехмерная модель полных тензорных магнитно-градиентных данных. Уравнение, описывающее магнитное поле $\mathbf{B}_{\text{field dipole}}$, индуцируемое магнитным диполем \mathbf{m} , имеет вид

$$\mathbf{B}_{\text{field dipole}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right),$$

где $\mathbf{m} = m_x\mathbf{i} + m_y\mathbf{j} + m_z\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = (x - x_s)\mathbf{i} + (y - y_s)\mathbf{j} + (z - z_s)\mathbf{k}$, $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$ — расстояние между точкой (x_s, y_s, z_s) , которая соответствует расположению измеряющего поле $\mathbf{B}_{\text{field dipole}}$ триаксиального сенсора, и точкой (x, y, z) , в которой расположен магнитный диполь \mathbf{m} , μ_0 — величина магнитной проницаемости в вакууме.

Преобразовав $\mathbf{B}_{\text{field dipole}}$ к виду

$$\mathbf{B}_{\text{field dipole}} = B_{x \text{ dipole}}\mathbf{i} + B_{y \text{ dipole}}\mathbf{j} + B_{z \text{ dipole}}\mathbf{k} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(x - x_s)}{r^5} - \frac{m_x}{r^3} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(y - y_s)}{r^5} - \frac{m_y}{r^3} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(z - z_s)}{r^5} - \frac{m_z}{r^3} \right) \mathbf{k} \right)$$

и переобозначив переменные как $i = x, y, z$ и $p = (p_x, p_y, p_z) = (x_s, y_s, z_s)$, мы можем записать выражения для компонент вектора $\mathbf{B}_{\text{field dipole}}$ в следующем виде: $B_{i \text{ dipole}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(i - p_i)}{r^5} - \frac{m_i}{r^3} \right)$.

Беря производные от $B_{i \text{ dipole}}$ по пространственным переменным $i = x, y, z$ и $j = x, y, z \neq i$, мы можем получить следующие выражения для диагональных и недиагональных элементов тензора градиентов компонент магнитной индукции $\mathbf{B}_{\text{tensor}}$ (ГКМИ):

$$B_{ii} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{6m_i(i - p_i)}{r^5} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{15(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(i - p_i)(i - p_i)}{r^7} \right),$$

$$B_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3m_i(j - p_j)}{r^5} + \frac{3m_j(i - p_i)}{r^5} - \frac{15(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(i - p_i)(j - p_j)}{r^7} \right).$$

Таким образом, для всего рассматриваемого объекта, по объему которого V мы хотим восстановить плотность магнитного момента \mathbf{M} ($\mathbf{M} = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$), мы получаем следующие трехмерные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$\mathbf{B}_{\text{field dipole}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right) dv,$$

$$B_{ii} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{6m_i(i - p_i)}{r^5} + \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{15(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})(i - p_i)(i - p_i)}{r^7} \right) dv,$$

$$B_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3m_i(j - p_j)}{r^5} + \frac{3m_j(i - p_i)}{r^5} - \frac{15(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})(i - p_i)(j - p_j)}{r^7} \right) dv.$$

Эти уравнения могут быть переписаны в виде следующей системы из двух интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{\text{field dipole}}(x_s, y_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V K_1(x - x_s, y - y_s, z - z_s) \mathbf{M}(x, y, z) dv, \\ \mathbf{B}_{\text{tensor dipole}}(x_s, y_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V K_2(x - x_s, y - y_s, z - z_s) \mathbf{M}(x, y, z) dv. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{B}_{\text{field dipole}} = [B_x \ B_y \ B_z]^T$ и $\mathbf{B}_{\text{tensor dipole}} = [B_{xx} \ B_{xy} \ B_{xz} \ B_{yz} \ B_{zz}]^T$, а ядра интегральных уравнений K_1 и K_2 имеют вид

$$K_1(x - x_s, y - y_s, z - z_s) = \frac{1}{r^5} \begin{bmatrix} 3(x - x_s)^2 - r^2 & 3(x - x_s)(y - y_s) & 3(x - x_s)(z - z_s) \\ 3(y - y_s)(x - x_s) & 3(y - y_s)^2 - r^2 & 3(y - y_s)(z - z_s) \\ 3(z - z_s)(x - x_s) & 3(z - z_s)(y - y_s) & 3(z - z_s)^2 - r^2 \end{bmatrix},$$

$$K_2(x - x_s, y - y_s, z - z_s) = \frac{3}{r^7} \begin{bmatrix} (x - x_s)[3r^2 - 5(x - x_s)^2] & (y - y_s)[r^2 - 5(x - x_s)^2] & (z - z_s)[r^2 - 5(x - x_s)^2] \\ (y - y_s)[r^2 - 5(x - x_s)^2] & (x - x_s)[r^2 - 5(y - y_s)^2] & -5(x - x_s)(y - y_s)(z - z_s) \\ (z - z_s)[r^2 - 5(x - x_s)^2] & -5(x - x_s)(y - y_s)(z - z_s) & (x - x_s)[r^2 - 5(z - z_s)^2] \\ -5(x - x_s)(y - y_s)(z - z_s) & (z - z_s)[r^2 - 5(y - y_s)^2] & (y - y_s)[r^2 - 5(z - z_s)^2] \\ (x - x_s)[r^2 - 5(z - z_s)^2] & (y - y_s)[r^2 - 5(z - z_s)^2] & (z - z_s)[3r^2 - 5(z - z_s)^2] \end{bmatrix}.$$

Если мы предположим, что $V \subset P = \{(x, y, z) : L_x \leq x \leq R_x, L_y \leq y \leq R_y, L_z \leq z \leq R_z\}$ и система сенсорных плоскостей ограничена прямоугольным параллелепипедом

$$Q = \{(x_s, y_s, z_s) \equiv (s, t, r) : L_s \leq s \leq R_s, L_t \leq t \leq R_t, L_r \leq r \leq R_r\},$$

то мы можем переписать систему (1) в операторном виде

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \int_{L_z}^{R_z} K(s, t, r, x, y, z) \mathbf{M}(x, y, z) dx dy dz = \mathbf{B}(s, t, r), \quad (2)$$

где $\mathbf{B}(s, t, r)$ и $\mathbf{M}(x, y, z)$ являются векторными функциями $\mathbf{B} = [B_x \ B_y \ B_z \ B_{xx} \ B_{xy} \ B_{xz} \ B_{yz} \ B_{zz}]^T$ и $\mathbf{M} = [M_x \ M_y \ M_z]^T$, а ядро $K(s, t, r, x, y, z)$ является матричной функцией $K = [K_1 \ K_2]^T$ ($K = [K_1]^T$ в том случае, если мы хотим провести обращение без использования полного тензора ГКМИ для сравнения двух подходов).

Далее будем предполагать, что $\mathbf{M} \in W_2^2(P)$ и $\mathbf{B} \in L_2(Q)$, а оператор \mathbf{A} с ядром K непрерывен и однозначен. Нормы правой части уравнения (2) и решения вводятся следующим образом:

$$\|\mathbf{B}\|_{L_2} = \sqrt{\|B_x\|_{L_2}^2 + \|B_y\|_{L_2}^2 + \|B_z\|_{L_2}^2 + \|B_{xx}\|_{L_2}^2 + \|B_{xy}\|_{L_2}^2 + \|B_{xz}\|_{L_2}^2 + \|B_{yz}\|_{L_2}^2 + \|B_{zz}\|_{L_2}^2},$$

$$\|\mathbf{M}\|_{W_2^2} = \sqrt{\|M_x\|_{W_2^2}^2 + \|M_y\|_{W_2^2}^2 + \|M_z\|_{W_2^2}^2}.$$

Пусть вместо точно известных $\overline{\mathbf{B}}$ и оператора \mathbf{A} известны их приближенные значения \mathbf{B}_δ и A_h , такие, что $\|\mathbf{B}_\delta - \overline{\mathbf{B}}\|_{L_2} \leq \delta$ и $\|A - A_h\|_{W_2^2 \rightarrow L_2} \leq h$. При выписанных условиях задача является некорректной, для ее решения необходимо построить регуляризирующий алгоритм. Воспользуемся алгоритмом, основанным на минимизации функционала А. Н. Тихонова

$$F^\alpha[\mathbf{M}] = \|A_h \mathbf{M} - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|\mathbf{M}\|_{W_2^2}^2. \quad (3)$$

Для любого $\alpha > 0$ существует единственная экстремаль функционала Тихонова \mathbf{M}_η^α , $\eta = \{\delta, h\}$, реализующая минимум $F^\alpha[\mathbf{M}]$. Для выбора параметра регуляризации можно использовать алгоритм конечномерного обобщенного принципа невязки [14, 15]. При выборе параметра $\alpha = \alpha(\eta)$ по обобщенному принципу невязки

$$\rho(\alpha) = \|A_h \mathbf{M}_\eta^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}^2 - \left(\delta + h \|\mathbf{M}_\eta^\alpha\|_{W_2^2} \right)^2 = 0 \quad (4)$$

\mathbf{M}_η^α стремится при $\eta \rightarrow 0$ к точному решению задачи в норме W_2^2 , а следовательно, и равномерно на P .

В качестве метода минимизации функционала А.Н. Тихонова применяется метод сопряженных градиентов.

4. Структура алгоритма и его распараллеливание. При численной минимизации функционала (3) преимущественно использовались алгоритмы, которые подробно описаны в работах [5, 6], в том числе и с указанием способов оптимального распараллеливания соответствующих алгоритмов. В связи

с этим, в этом разделе мы опишем один из принципиально новых подходов, который не упоминается в работах [5, 6].

После введения конечно-разностной аппроксимации приближенное решение M , которое реализует минимум функционала (3), может быть найдено как решение системы

$$(A_h^T A_h + \alpha R^T R) M = A_h^T B_\delta, \quad (5)$$

где R — конечно-разностная аппроксимация оператора R : $\|M\|_{W_2^2} = \|RM\|_{L_2}$, размерность матрицы A : $(N_A \times N)$, матрицы R : $(N_R \times N)$, вектора M : $(N \times 1)$.

Для решения системы (5) мы будем использовать реализацию метода сопряженных градиентов, предложенную в работе [16].

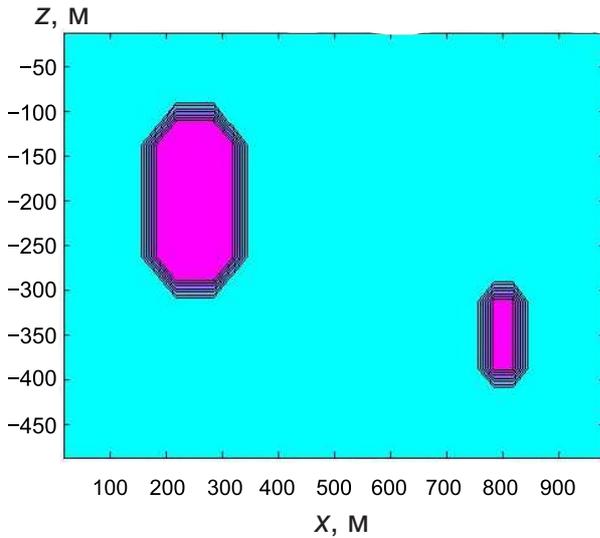


Рис. 1. Модельное решение для модуля вектора M на сетке $(N_x, N_y, N_z) = (30, 1, 20)$

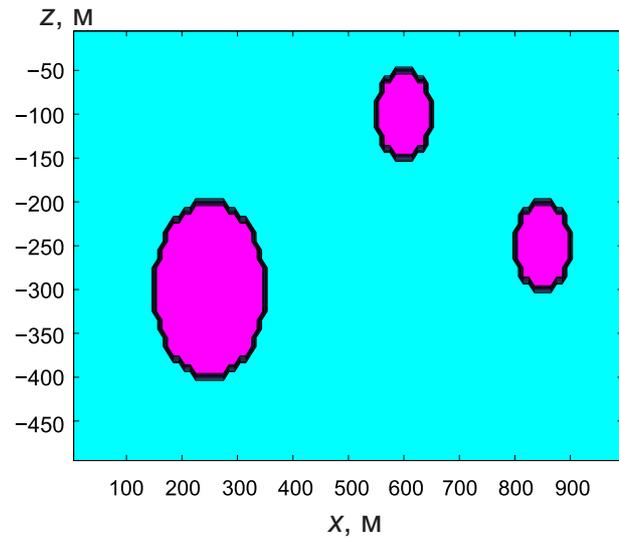


Рис. 2. Модельное решение для модуля вектора M на сетке $(N_x, N_y, N_z) = (100, 1, 50)$

Пусть $M^{(s)}$ — минимизирующая последовательность, $p^{(s)}$, $q^{(s)}$ — вспомогательные векторы, $p^{(0)} = 0$, $M^{(1)}$ — любая допустимая точка. Тогда формулы метода сопряженных градиентов для поиска решения $M^{(N)}$ системы (5) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} r^{(s)} &= \begin{cases} A_h^T (A_h M^{(s)} - B_\delta) + \alpha R^T (R M^{(s)}), & \text{если } s = 1, \\ r^{(s-1)} - q^{(s-1)} / (p^{(s-1)}, q^{(s-1)}), & \text{если } s \geq 2, \end{cases} \\ p^{(s)} &= p^{(s-1)} + \frac{r^{(s)}}{(r^{(s)}, r^{(s)})}, \\ q^{(s)} &= A_h^T (A_h p^{(s)}) + \alpha R^T (R p^{(s)}), \\ M^{(s+1)} &= M^{(s)} - \frac{p^{(s)}}{(p^{(s)}, q^{(s)})}. \end{aligned}$$

Согласно теории, после N итераций (напомним, что N — размерность пространства решений) эти формулы должны давать точный ответ при расчетах без округлений. Реально, за счет ошибок округления происходит досрочный выход на “фон” ошибок округления [17] либо итерационный процесс останавливается вдалеке от этого “фона” и итерационный процесс может быть продолжен. Поэтому при решении вычислительно емких задач актуально использовать критерий прекращения итерационного процесса в методе сопряженных градиентов по выходу на ошибки машинного округления [17].

Рассмотрим покомпонентное вычисление невязки на s -й итерации:

$$r_n^{(s)} = \sum_{k=1}^{N_A} A_{kn} (A M^{(s)})_k + \alpha \sum_{k=1}^{N_R} R_{kn} (R M^{(s)})_k - (A^T B_\delta)_n. \quad (6)$$

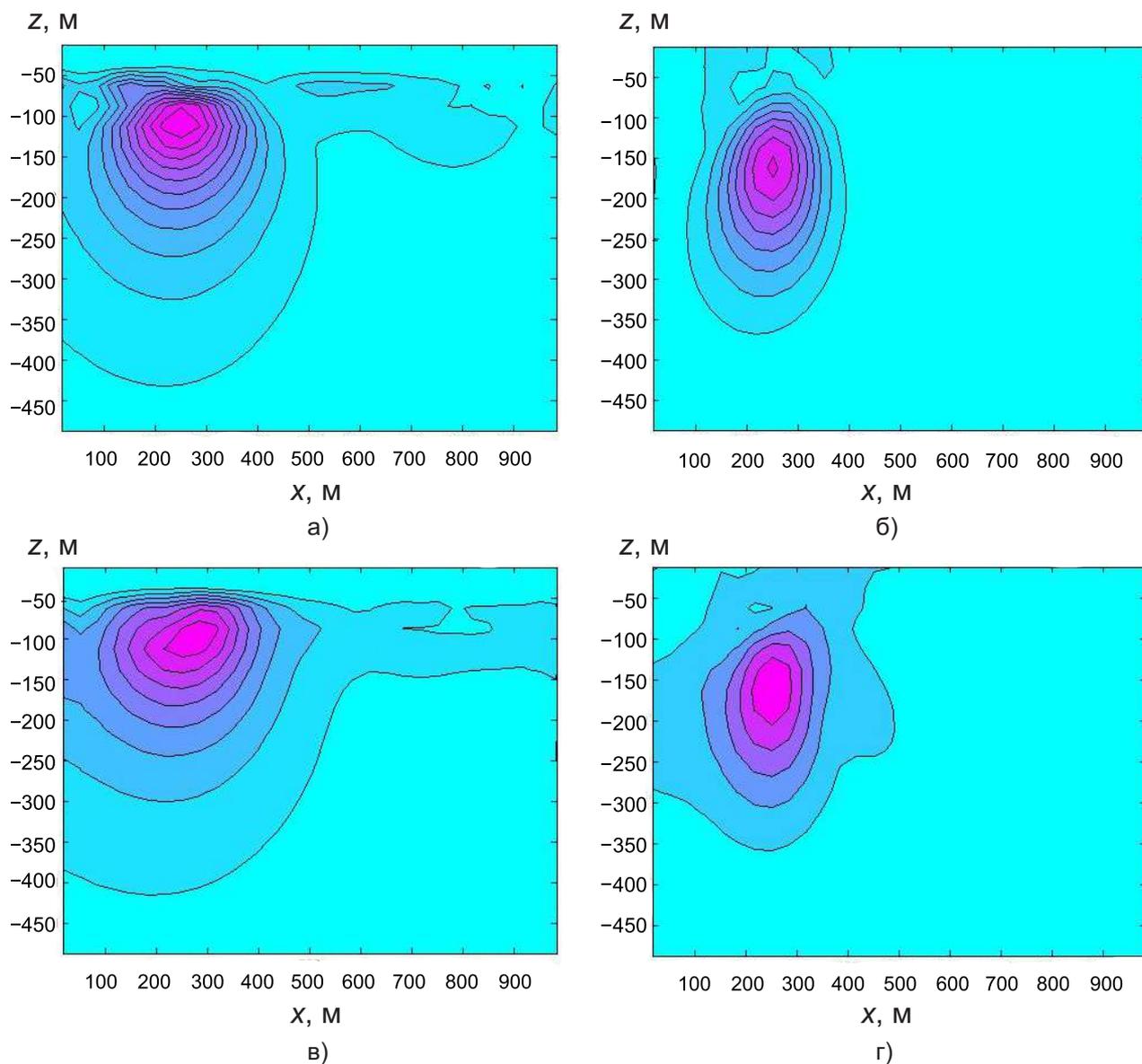


Рис. 3. Результаты расчетов для первого модельного примера: а) и в) соответствуют ситуации, когда все измерения проводились только “у земли”, б) и г) измерения производились “у земли и в воздухе”; а) и б) при вычислениях использован полный тензор градиентов компонент магнитной индукции (ГКМИ), в) и г) классический подход (обрабатывались только результаты измерения индуцированного магнитного поля)

При вычислении правой части (6) ошибки округления от умножений пренебрежимо малы, а от сложений — складываются по правилу статистики:

$$(\sigma^{(s)})^2 = \sum_{n=1}^N \left((A^T B_\delta)_n^2 + \sum_{k=1}^{N_A} \left((A_{kn})^2 (A z^{(s)})_k^2 + (A_{kn})^2 (M^{(s)})_n^2 + (A_{kn})^2 (B_\delta)_k^2 \right) + \right. \\
 \left. + \alpha \sum_{k=1}^{N_R} \left((R_{kn})^2 (R M^{(s)})_k^2 + (R_{kn})^2 (M^{(s)})_n^2 \right) \right).$$

Невязка вычисляется достоверно, если $\|r^{(s)}\|^2 \gg \Delta^2 (\sigma^{(s)})^2$, $\|r^{(s)}\|^2 = \sum_{n=1}^N (r_n^{(s)})^2$, где Δ — ошибка округления единичной операции (например, $\Delta = 10^{-16}$ для вычислений с “двойной точностью” и $\Delta = 10^{-32}$ для вычислений с “четверной точностью”).

Учитывая еще и накопление ошибок по итерациям, мы можем прийти к следующему критерию остановки итерационного процесса [17]: расчет прекращается на итерации N_{optimal} , когда впервые выполняется условие $\Delta^2 \sum_{s=1} \left(\frac{(\sigma^{(s)})^2}{\|r^{(s)}\|^2} \right) > 1$.

Более того, полученную оценку для уровня “фона” ошибок округления можно использовать для обобщения обобщенного принципа невязки (4) [14, 15]:

$$\rho(\alpha) = \|A_h M_\eta^\alpha - B_\delta\|^2 - (\delta + h \|M_\eta^\alpha\|)^2 - \Delta^2 \sum_{s=1}^{N_{\text{optimal}}} (\sigma^{(s)})^2 = 0.$$

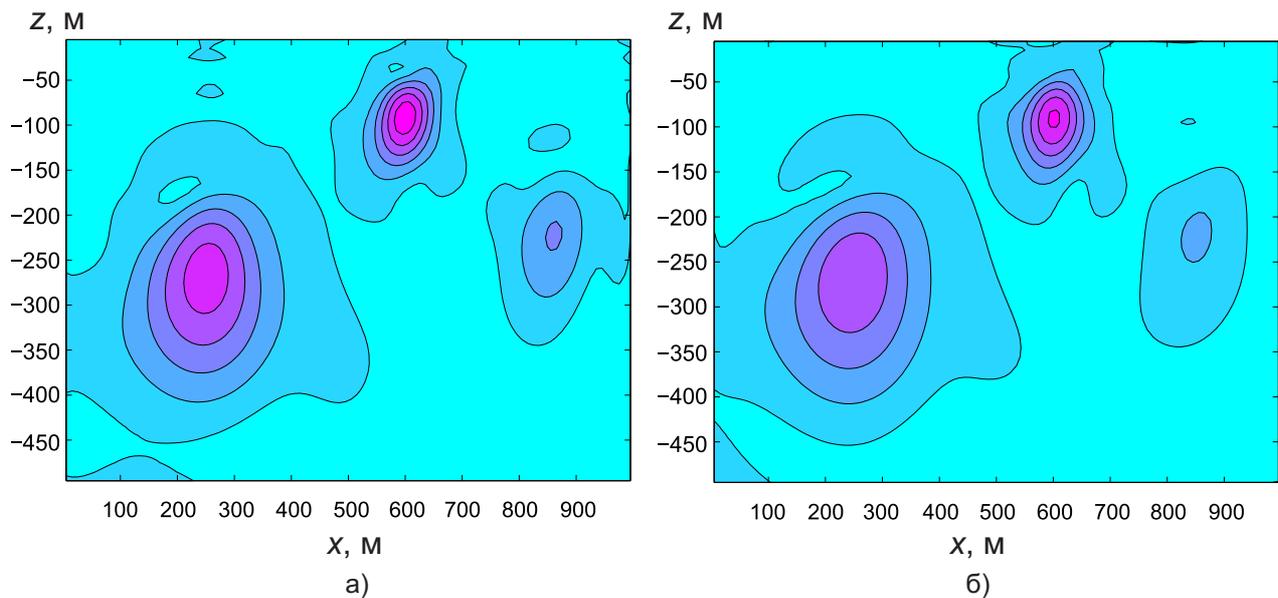


Рис. 4. Результаты расчетов для второго модельного примера (при расчетах использовался только полный тензор градиентов компонент магнитной индукции (ГКМИ)): а) итерационный процесс минимизации функционала прекращен по выходу на размерность пространства (15 000 итераций); б) итерационный процесс прекращен по выходу на ошибки машинных округлений ($\sim 1\,500$ итераций)

5. Результаты модельных численных экспериментов. На рис. 3 представлены результаты обработки как только магнитных данных, так и полных тензорных магнитно-градиентных данных, которые соответствуют модельному решению, изображенному на рис. 1. Для тестовых расчетов мы будем использовать область интегрирования $x = [0, 1000]$; $y = [-1, 1]$; $z = [-500, 0]$ (м) с сетками $(N_x, N_y, N_z) = (30, 1, 20)$, а также две серии измерений:

1) $x = [0, 1000]$; $y = [-10, 10]$; $z = [0, 2]$ (м) (что соответствует измерениям “у земли” на высотах 0 и 2 метра в случае, когда нет возможности поднять в воздух измерительное оборудование);

2) $x = [0, 1000]$; $y = [-200, 200]$; $z = [0, 1000]$ (м) (что соответствует измерениям “у земли и в воздухе” на высотах 0 и 1000 метров, когда есть возможность поднять измерительное оборудование на значительную высоту с помощью авиационной техники) с сетками $(N_s, N_t, N_r) = (200, 2, 2)$.

Во всех случаях нам необходимо было восстановить 1 800 параметров по 6 400 измерениям. Как видно на приведенных результатах расчетов, использование полного тензора ГКМИ помогает существенно улучшить результаты расчетов, улучшив локализацию в пространстве восстанавливаемых параметров намагниченности.

На рис. 4 представлены результаты обработки полных тензорных магнитно-градиентных данных, которые соответствуют модельному решению, изображенному на рис. 2.

Для тестовых расчетов мы будем использовать область интегрирования $x = [0, 1000]$; $y = [-1, 1]$; $z = [-500, 0]$ (м) с сетками $(N_x, N_y, N_z) = (100, 1, 50)$ и серию измерений в области $x = [0, 1000]$; $y = [-200, 200]$; $z = [0, 1000]$ (м) (что соответствует измерениям “у земли и в воздухе” на высотах 0 и 1000 метров, когда есть возможность поднять измерительное оборудование на значительную высоту с помощью авиационной техники) с сетками $(N_s, N_t, N_r) = (800, 2, 2)$. Иными словами, нам необходимо было восстановить 15 000

параметров по 25 600 измерениям. Как видно из приведенных результатов расчетов, использование критерия прекращения итерационного процесса по выходу на фон ошибок округления при реализации метода сопряженных градиентов может существенно сократить время расчетов при получении эквивалентного решения.

6. Выводы. Использование при восстановлении параметров намагниченности полного тензора градиентов компонент магнитной индукции, измеряемого в некоторой удаленной от тела области, существенно улучшает результат решения соответствующих некорректно поставленных обратных задач магнитостатики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 14-01-91151-ГФЕН_а, 14-01-00182_а, 14-01-31201 и 16-01-00755). Тестовые расчеты выполнены с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М. В. Ломоносова [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В. Практика суперкомпьютера “Ломоносов” // Открытые системы. 2012. № 7. 36–39.
2. Lelièvre P.G., Oldenburg D.W. Magnetic forward modelling and inversion for high susceptibility // *Geophysical Journal International*. 2006. **166**, N 1. 76–90.
3. Li Y., Oldenburg D.W. 3-D inversion of magnetic data // *Geophysics*. 1996. **61**, N 2. 394–408.
4. Pignatelli A., Nicolosi I., Chiappini M. An alternative 3D inversion method for magnetic anomalies with depth resolution // *Annals of Geophysics*. 2006. **49**, N 4/5. 1021–1027.
5. Lukyanenko D.V., Yagola A.G., Evdokimova N.A. Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2011. **18**, N 9. 1013–1029.
6. Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г. Применение многопроцессорных систем для решения трехмерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода для векторных функций // *Вычислительные методы и программирование*. 2010. **11**. 336–343.
7. Christensen A., Rajagopalan S. The magnetic vector and gradient tensor in mineral and oil exploration // *Preview*. 2000. **84**. 77.
8. Heath P., Heinson G., Greenhalgh S. Some comments on potential field tensor data // *Exploration Geophysics*. 2003. **34**, N 2. 57–62.
9. Schiffler M., Queitsch M., Stolz R., Chwala A., Krech W., Meyer H.-G., Kukowski N. Calibration of SQUID vector magnetometers in full tensor gradiometry systems // *Geophys. J. Int.* 2014. **198**, N 2. 954–964.
10. Schmidt P.W., Clark D.A. Advantages of measuring the magnetic gradient tensor // *Preview*. 2000. **85**. 26–30.
11. Schmidt P., Clark D., Leslie K., Bick M., Tilbrook D.L. GETMAG — a SQUID magnetic tensor gradiometer for mineral and oil exploration // *Exploration Geophysics*. 2004. **35**, N 4. 297–305.
12. Zhdanov M.S., Cai H., Wilson G.A. 3D inversion of SQUID magnetic tensor data // *Geology and Geosciences*. 2012. **1**. 1–5.
13. Ji S., Wang Y., Zou A. Regularizing inversion of susceptibility with projection onto convex set using full tensor magnetic gradient data // *Inverse Problems in Science & Engineering*. 2016 (in press).
14. Морозов В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1966. **6**, № 1. 170–175.
15. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
16. Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. Улучшенная форма метода сопряженных градиентов // *Математическое моделирование*. 2011. **23**, № 7. 33–51.
17. Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. Улучшенные формы итерационных методов для систем линейных алгебраических уравнений // *Доклады АН*. 2013. **451**, № 3. 264–270.

Поступила в редакцию
26.12.2015

Regularized Inversion of Full Tensor Magnetic Gradient Data

Y. Wang¹, D. V. Luk’yanenko², and A. G. Yagola³

¹ *Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences; Beitucheng West Road 19, Beijing, 100029, China; Dr. Sci., Professor, e-mail: yfwang@mail.iggcas.ac.cn*

² *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Ph.D., Assistant, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru*

³ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: yagola@physics.msu.ru*

Received December 26, 2015

Abstract: Features of numerical solution of the three-dimensional ill-posed problem devoted to the inversion of full tensor magnetic gradient data are considered. This problem is simulated by a system of two three-dimensional Fredholm integral equations of the first kind. The Tikhonov regularization is applied to solve this ill-posed problem. The conjugate gradient method is used as a minimization method. The choice of the regularization parameter is realized according to the generalized residual principle with consideration of round-off errors capable of affecting the final result of calculations significantly.

Keywords: magnetostatics, full tensor magnetic gradient data, inverse problems, ill-posed problems, regularization method.

References

1. Vl. V. Voevodin, S. A. Zhumatii, S. I. Sobolev, et al., "Practice of 'Lomonosov' Supercomputer," *Otkrytye Sistemy*, No. 7, 36–39 (2012).
2. P. G. Lelièvre and D. W. Oldenburg, "Magnetic Forward Modelling and Inversion for High Susceptibility," *Geophys. J. Int.* **166** (1), 76–90 (2006).
3. Y. Li and D. W. Oldenburg, "3-D Inversion of Magnetic Data," *Geophysics* **61** (2), 394–408 (1996).
4. A. Pignatelli, I. Nicolosi, and M. Chiappini, "An Alternative 3D Inversion Method for Magnetic Anomalies with Depth Resolution," *Ann. Geophys.* **49** (4/5), 1021–1027 (2006).
5. D. V. Lukyanenko, A. G. Yagola, and N. A. Evdokimova, "Application of Inversion Methods in Solving Ill-Posed Problems for Magnetic Parameter Identification of Steel Hull Vessel," *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **18** (9), 1013–1029 (2011).
6. D. V. Lukyanenko and A. G. Yagola, "Application of Multiprocessor Systems for Solving Three-Dimensional Fredholm Integral Equations of the First Kind for Vector Functions," *Vychisl. Metody Programm.* **11**, 336–343 (2010).
7. A. Christensen and S. Rajagopalan, "The Magnetic Vector and Gradient Tensor in Mineral and Oil Exploration," *Preview* **84**, 77 (2000).
8. P. Heath, G. Heinson, and S. Greenhalgh, "Some Comments on Potential Field Tensor Data," *Explor. Geophys.* **34** (2), 57–62 (2003).
9. M. Schiffler, M. Queitsch, R. Stolz, et al., "Calibration of SQUID Vector Magnetometers in Full Tensor Gradiometry Systems," *Geophys. J. Int.* **198** (2), 954–964 (2014).
10. P. W. Schmidt and D. A. Clark, "Advantages of Measuring the Magnetic Gradient Tensor," *Preview* **85**, 26–30 (2000).
11. P. Schmidt, D. Clark, K. Leslie, et al., "GETMAG — a SQUID Magnetic Tensor Gradiometer for Mineral and Oil Exploration," *Explor. Geophys.* **35** (4), 297–305 (2004).
12. M. S. Zhdanov, H. Cai, and G. A. Wilson, "3D Inversion of SQUID Magnetic Tensor Data," *J. Geol. Geosci.* **1**, 1–5 (2012).
13. S. Ji, Y. Wang, and A. Zou, "Regularizing Inversion of Susceptibility with Projection onto Convex Set Using Full Tensor Magnetic Gradient Data," *Inverse Probl. Sci. Eng.* 2016 (in press).
14. V. A. Morozov, "Regularization of Incorrectly Posed Problems and the Choice of Regularization Parameter," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **6** (1), 170–175 (1966) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **6** (1), 242–251 (1966)].
15. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharkii, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Numerical Methods for Solving Incorrect Problems* (Nauka, Moscow, 1990) [in Russian].
16. N. N. Kalitkin and L. V. Kuz'mina, "Improved Form of the Conjugate Gradient Method," *Mat. Model.* **23** (7), 33–51 (2011) [*Math. Models Comput. Simul.* **4** (1), 68–81 (2012)].
17. N. N. Kalitkin and L. V. Kuz'mina, "Improved Forms of Iterative Methods for Systems of Linear Algebraic Equations," *Dokl. Akad. Nauk* **451** (3), 264–270 (2013) [*Dokl. Math.* **88** (1), 489–494 (2013)].