

УДК 550.341

doi 10.26089/NumMet.v16r455

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ ЧАСТОТНО-ЗАВИСИМЫХ ЛУЧЕЙ ПРИ ИЗВЕСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

К. Г. Гадыльшин¹, М. И. Протасов²

Предложен численный метод построения точных частотно-зависимых лучей, когда известно решение уравнения Гельмгольца. Впервые представлен анализ свойств частотно-зависимых лучей и их сравнение со стандартной лучевой теорией и с методом конечно-разностного моделирования. Изучена зависимость частотно-зависимых лучей от частоты зондирующего сигнала. Показано, что при увеличении частоты частотно-зависимые лучи стремятся к классическим лучам. Численные эксперименты демонстрируют отличительные особенности частотно-зависимых лучей, в частности их способность проникать в зоны тени, недоступные для классической лучевой теории.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, точные частотно-зависимые лучи, лучевая теория, численные методы.

1. Введение. Стандартная лучевая теория применима только для малых длин волн, или, что то же самое, для высоких частот [1]. Кроме того, эта теория применима и в тех случаях, когда параметры среды и волновые поля являются гладкими в пределах объема Френеля [2]. В работе [12] показано, что время пробега энергии в ограниченном диапазоне частот связано с объемным интегралом медленности по волновому пути между источником и приемником. В этой работе волновой путь вычисляется путем конечно-разностной аппроксимации функций Грина. Ширина волнового пути является частотно-зависимой величиной. Это означает, что сейсмические данные для разных частотных диапазонов могут иметь разные времена пробега волн.

На практике проблемы со стандартным трассированием остро проявляются при построении изображений геологических объектов [11], в частности под такими сложными границами, как соляные купола или базальтовые интрузии. При этом нужно обеспечить не только расчет корректного времени распространения волны, но и ее динамических параметров, т.е. нужно выполнять так называемую динамическую трассировку лучей.

Было предпринято несколько попыток учесть частотно-зависимую природу сейсмической энергии в рамках стандартной лучевой теории. В работе [4] используется приближенное решение уравнения Гельмгольца и рассчитывается медленность, которая зависит от частоты, а затем выполняется стандартная трассировка лучей. Основным недостатком этого подхода в том, что решение на низких частотах зависит от решения на высоких частотах. Альтернативный метод частотно-зависимого лучевого трассирования предложен в [10]. Этот метод заключался в том, что скоростная модель усредняется в плоскости, перпендикулярной лучу, путем умножения на весовую функцию, ширина которой пропорциональна длине волны. Похожий подход был предложен в [3], однако сглаживается не скорость, а границы между слоями, где веса сглаживания зависят от объема Френеля, частоты, направления луча и длины луча.

Все перечисленные способы позволяют получать приближенные частотно-зависимые лучи. В практических приложениях важно понимать, насколько эти приближенные решения являются адекватными, поэтому необходим способ для их расчета. В работе [5] развита теория точных частотно-зависимых лучей, а также получены аналитические решения для ряда относительно простых сред. В этой связи в настоящей статье мы предлагаем численный метод построения точных частотно-зависимых лучей, что позволяет получать эти лучи в произвольных средах. Кроме того, в статье представлены анализ свойств рассматриваемых лучей и сравнение их с результатами стандартной лучевой теории и конечно-разностного моделирования.

2. Теория. Функция Лагранжа \mathcal{L} консервативной системы — это кинетический потенциал $\mathcal{T} - \mathcal{V}$, где \mathcal{T} — удельная кинетическая энергия, а \mathcal{V} — удельная потенциальная энергия.

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН (ИНГГ СО РАН), просп. Коптюга, 3, 630090, г. Новосибирск; мл. науч. сотр., e-mail: gadylshinkg@ipgg.sbras.ru

² Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН (ИНГГ СО РАН), просп. Коптюга, 3, 630090, г. Новосибирск; ст. науч. сотр. e-mail: ProtasovMI@ipgg.sbras.ru

В соответствии с принципом Гамильтона для консервативных систем, система стремится к такому состоянию, что средняя по времени величина от кинетического потенциала достигает экстремума (обычно минимума). Уравнение движения, которое удовлетворяют принципу Гамильтона, — это уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0.$$

Функция Лагранжа рассматривается как явная функция координаты, переменной u и производных от u по пространственным координатам: $\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(x_i, u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$. Для акустической среды функция Лагранжа запишется в краткой форме в виде (см. [5]):

$$\mathcal{L} = \nabla u \cdot \nabla u^* - k^2 u u^*.$$

Здесь $u(x_i, \omega)$ — акустическое волновое поле в частотной области, $k = \frac{\omega}{c(x_i)}$ — волновое число, ω — частота, $c(x_i)$ — скорость распространения волн. Путем подстановки \mathcal{L} в уравнение Эйлера–Лагранжа можно проверить, что такая подстановка приведет нас к уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0. \tag{1}$$

Путем явного разделения поля u на вещественную амплитуду A и фазу Φ : $u = A e^{i\Phi}$, преобразуем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = (\nabla A + i A \nabla \Phi) \cdot (\nabla A - i A \nabla \Phi) - k^2 A^2 = \nabla A \cdot \nabla A + A^2 \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - k^2 A^2.$$

Одно из уравнений Эйлера–Лагранжа для новых переменных A и Φ приводит нас к уравнению

$$0 = \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_i} - A \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + k^2 A \right),$$

или

$$\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi = k^2 + \frac{\nabla^2 A}{A}. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется точным уравнением эйконала.

Теперь проведем небольшое сравнение. Если в точном уравнении эйконала предположить, что фаза линейно зависит от частоты $\Phi = \omega \cdot \tau$, то оно примет следующий вид

$$\nabla \tau \cdot \nabla \tau = \frac{1}{c^2} + \frac{\nabla^2 A}{A \omega^2}.$$

Если предположить, что рассматриваемые частоты достаточно высоки, то приходим к известному уравнению эйконала

$$\nabla \tau \cdot \nabla \tau = \frac{1}{c^2}.$$

Таким образом, получается, что обычное уравнение эйконала от точного уравнения эйконала отделяют два вышеуказанных предположения.

Другое уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$0 = \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 2 \left(2A \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + A^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} \right),$$

или $2 \frac{\nabla A}{A} \cdot \nabla \Phi + \nabla^2 \Phi = 0$, и называется уравнением переноса.

Уравнение эйконала приводит к уравнению для траекторий распространения акустической энергии, или лучевых путей. Уравнение переноса приводит к закону сохранения энергии в форме, удобной для

вычисления интенсивности звука в любой точке вдоль лучевого пути. Уравнения эйконала и переноса связаны, являются уравнениями первого порядка относительно $\frac{\nabla A}{A}$ и $\nabla\Phi$ и нелинейны; они полностью эквивалентны уравнению Гельмгольца (1).

В работе [5] показано, что существуют траектории, вдоль которых распространяется звук. Уравнения для этих траекторий были получены на основе закона сохранения энергии, при этом никаких приближений не было использовано [5].

Чтобы их ввести, сначала определим единичный вектор \mathbf{t} внешней нормали к поверхности постоянной фазы Φ в точке \mathbf{r} , а затем определим \mathbf{t} как касательный вектор к лучу в точке \mathbf{r} так, что $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, где s — длина луча. Удобно также ввести в рассмотрение волновой вектор \mathbf{K} : $\mathbf{K} = \nabla\Phi$ так, что $\mathbf{K} = K\mathbf{t} = K \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, где $K = |\mathbf{K}|$.

Точное уравнение эйконала принимает форму $\mathbf{K}^2 = k^2 + \frac{\nabla^2 A}{A}$. Тогда уравнение для точных частотно-зависимых лучей переписется в виде $\frac{d\mathbf{K}}{ds} = \nabla K$.

2.1. Вычислительный алгоритм для построения точных частотно-зависимых лучей. Точные частотно-зависимые лучи можно построить, не прибегая к лучевому приближению, если известно решение уравнения Гельмгольца [5]

$$\Delta u + k^2 u = f(\omega)\delta(x - x_s) \quad (3)$$

для некоторого источника ($f(\omega)$ — форма импульса, x_s — положение точечного источника) и волнового числа $k(x)$ в области без поглощения.

Уравнение Гельмгольца дает описание волнового процесса в неограниченном пространстве. Для численных экспериментов требуется информация о полном волновом поле лишь в ограниченной расчетной области, для чего вводятся идеально согласованные поглощающие слои [6] (Perfectly Matched Layer, PML). В частности, для введения поглощающих слоев в направлении x в уравнении требуется сделать замену переменных следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{i\sigma(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Здесь ω — угловая частота, а $\sigma(x)$ — функция, равная нулю в расчетной области и на ее границе и монотонно возрастающая с удалением от границы. Аналогично вводятся поглощающие слои в направлении z .

Конечно-разностная аппроксимация полученных уравнений приводит к комплексной системе линейных алгебраических уравнений для поиска волнового поля в частотной области. Матрица такой системы является разреженной и имеет блочную пятидиагональную структуру (ввиду использования центральной конечно-разностной схемы 4-го порядка аппроксимации). Разреженная матрица хранится в специальном сжатом формате (Compressed Sparse Row, CSR), который содержит информацию только о ненулевых элементах. Решение системы уравнений находится путем построения LU -разложения и последующими прямой и обратной подстановками. Численная реализация такого подхода производится с использованием параллельной библиотеки SuperLU [7], которая на вход принимает размерность системы, матрицу, записанную в формате CSR, и количество MPI-процессов, использующихся для расчетов.

Для трехмерных сред такой подход требует больших объемов памяти для хранения LU -факторов. В этой связи полученную систему уравнений решают итерационным методом, например с использованием аналитического предобусловливателя [8] либо с использованием малоранговой аппроксимации [9].

Решив уравнение Гельмгольца, а также вычислив градиенты волнового поля u и амплитуды A (по определению амплитуда вычисляется из равенства $u = Ae^{i\Phi}$), получим:

$$\frac{\nabla u}{u} = \frac{\nabla A}{A} + i\mathbf{K}.$$

Так как A и $\mathbf{K} = \nabla\Phi$ — вещественные, то

$$\begin{aligned} \frac{\nabla A}{A} &= \operatorname{Re} \frac{\nabla u}{u}, \\ \mathbf{K} &= \operatorname{Im} \frac{\nabla u}{u}. \end{aligned} \quad (4)$$

Напомним, что вектор \mathbf{K} связан с точным частотно-зависимым лучом $\mathbf{K} = K \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, где K можно вычислить через u : $K = \left| \text{Im} \frac{\nabla u}{u} \right|$, тогда уравнения (4) являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на нахождение точного частотно-зависимого луча:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{K} \text{Im} \left(\frac{\nabla u}{u} \right). \tag{5}$$

Здесь уместно сравнить системы обыкновенных дифференциальных уравнений на нахождение точных частотно-зависимых лучей и высокочастотных лучей. Последняя представляется в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = c\mathbf{p}; \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla \left(\frac{1}{c} \right). \tag{6}$$

Первое уравнение системы (6) идентично уравнению (5) с точностью до правой части. Правая часть для точных частотно-зависимых лучей определяется непосредственно волновым полем, тогда как правая часть для высокочастотных лучей определяется вектором медленности \mathbf{p} , который, в свою очередь, определяется градиентом медленности $1/c$.

Для вычислительных целей удобнее исключить K из уравнения (5) путем введения нового параметра луча σ , такого, что $K d\sigma = ds$. Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \text{Im} \frac{\nabla u}{u}. \tag{7}$$

Уравнение (7) решается численно методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Как было указано выше, волновое поле u вычисляется с помощью конечных разностей 4-го порядка применительно к уравнению Гельмгольца (3). При решении ОДУ требуется одно начальное условие. Точный частотно-зависимый луч ищется численно в направлении от приемника к источнику, поскольку решение уравнения Гельмгольца имеет особенность в точке источника.

3. Численные эксперименты. В качестве демонстрационного примера рассмотрим акустическую среду, представляющую собой линейную по глубине функцию $v(z) = az + b$. В этом случае легко построить аналитическое решение в рамках классической лучевой теории. Возьмем в рассмотрение следующий набор параметров a и b :

- 1) эксперимент 1, $a = 1.1$ и $b = 1600$ м/с (рис. 1);
- 2) эксперимент 2, $a = 3.1$ и $b = 1600$ м/с (рис. 2).

Численные эксперименты наглядно демонстрируют сходимость точных частотно-зависимых лучей к классическим лучам при увеличении частоты в уравнении Гельмгольца. Кроме того, можно заметить лучшую сходимость для случаев, когда градиент скорости небольшой (эксперимент 1). С одной стороны, мы видим, что предел (высокая частота) меняется для различных точных частотно-зависимых лучей, а классические высокочастотные лучи дают похожие результаты. С другой стороны, видно, что стандартная лучевая теория не работает для низких частот (изменчивость скорости среды на длине волны мала, например случай 1 Гц, $a = 3.1$).

Другие эксперименты проведены для модели, состоящей из двух однородных слоев, со скоростью 1500 м/с (верхний слой) и 4500 м/с (нижний слой), разделенных нерегулярной границей (синусоидальная граница). На рис. 3 (слева) представлены классические лучи (изображены синим), справа на рис. 3 представлена сейсмограмма волнового поля, рассчитанного с помощью конечно-разностного подхода во временной области (доминирующая частота 25 Гц), и изображены времена пробега для лучевого метода (зеленым) и времена пробега вдоль точных частотно-зависимых лучей для частоты 1 Гц (синим). На рис. 4 изображено то же самое, только для частоты 25 Гц. Можно заметить, что частотно-зависимые лучи образуют регулярное поле лучей (лучи не пересекаются и нет “многолучевости”). Кроме того, можно заметить, что частотно-зависимые лучи соответствуют вступлениям максимальной энергии, особенно для случая, когда частота луча близка к доминирующей частоте зондирующего сигнала, однако присутствует некоторый разбег во временах пробега.

Последний эксперимент был выполнен для широко известной скоростной модели Sigsbee (рис. 5). Точные частотно-зависимые лучи (изображены желтым) были вычислены для частоты 1 Гц. Как можно видеть, поле частотно-зависимых лучей непрерывно и покрывает всю область аналогично падающему волновому полю, вычисленному с помощью конечно-разностного моделирования. На рис. 5 (внизу) представлена сейсмограмма волнового поля, вычисленная конечными разностями, и времена пробега точных

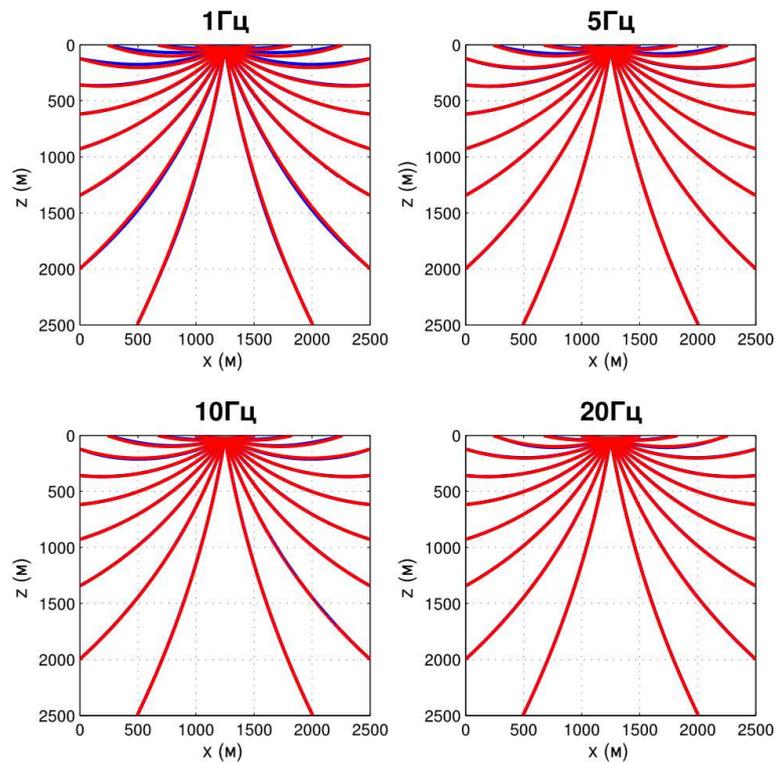


Рис. 1. Эксперимент 1. Классические лучи (изображены красным) и соответствующие точные частотно-зависимые лучи (изображены синим) для набора частот 1, 5, 10, 20 Гц

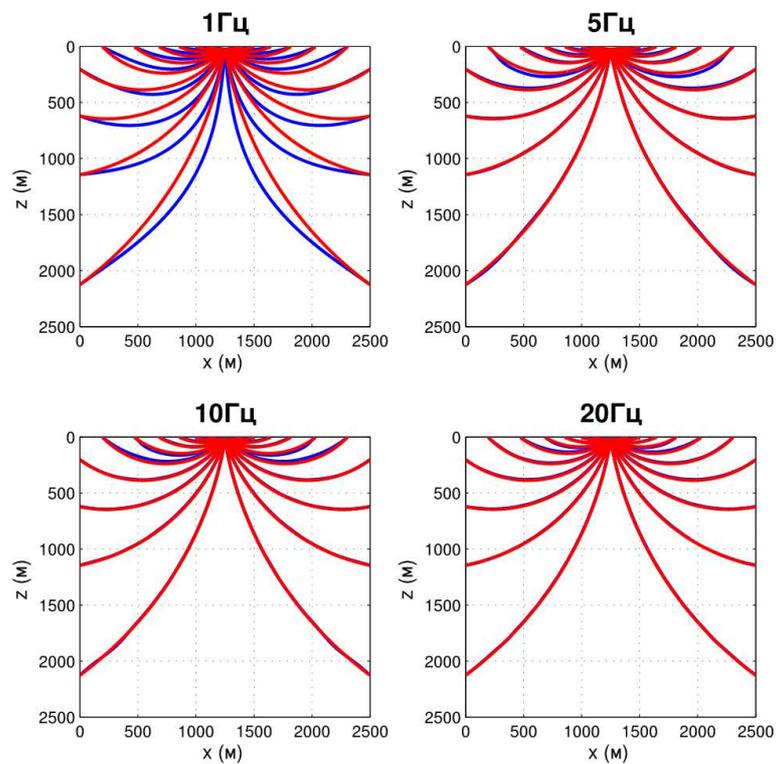


Рис. 2. Эксперимент 2. Классические лучи (изображены красным) и соответствующие точные частотно-зависимые лучи (изображены синим) для набора частот 1, 5, 10, 20 Гц

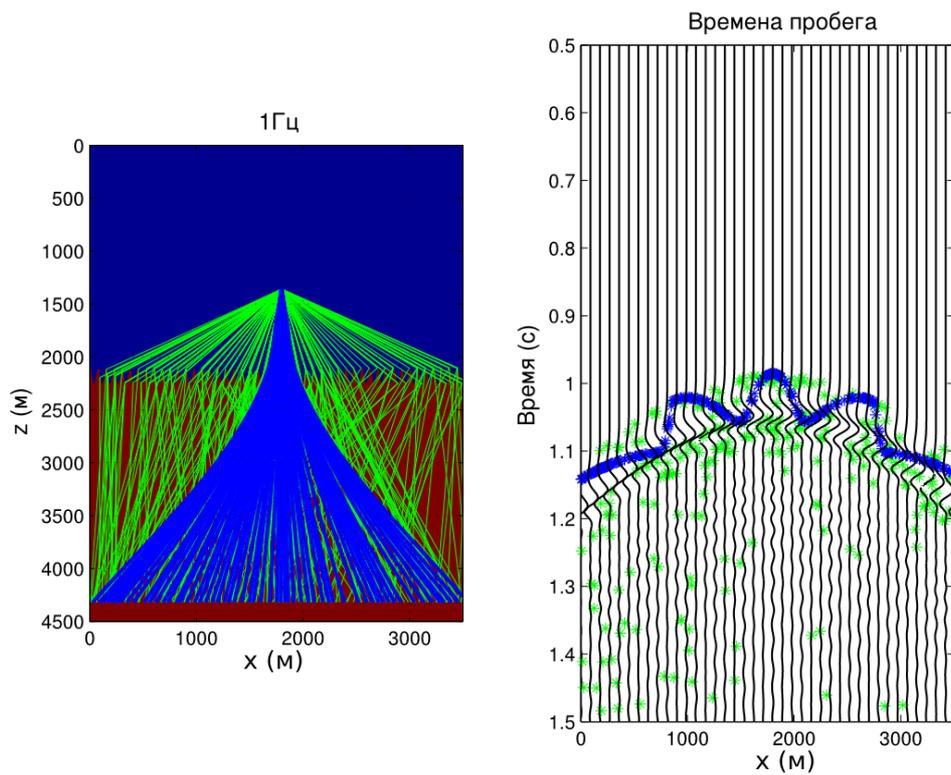


Рис. 3. Слева: классические лучи (изображены зеленым) и соответствующие частотно-зависимые лучи (синим) для 1 Гц. Справа: соответствующие времена пробега

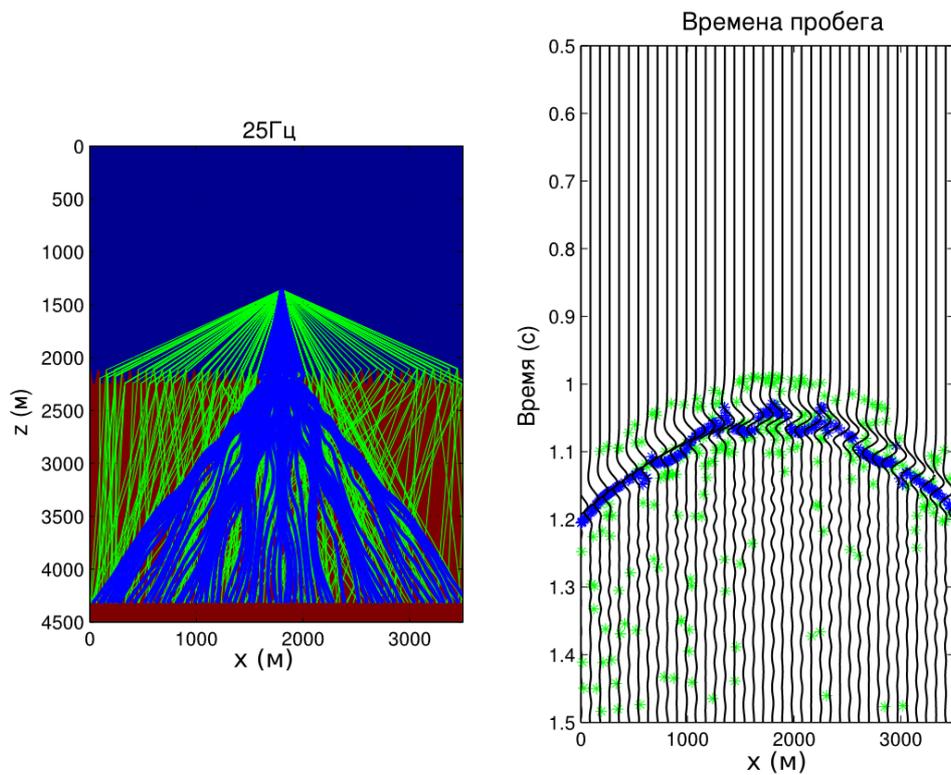


Рис. 4. Слева: классические лучи (изображены зеленым) и соответствующие частотно-зависимые лучи (синим) для 25 Гц. Справа: соответствующие времена пробега

частотно-зависимых лучей для частоты 1 Гц (изображены синим). Заметим, что голограф непрерывен для этого случая и нет так называемых зон теней. Кроме того, синие линии практически соответствуют вступлениям с максимальной энергией.

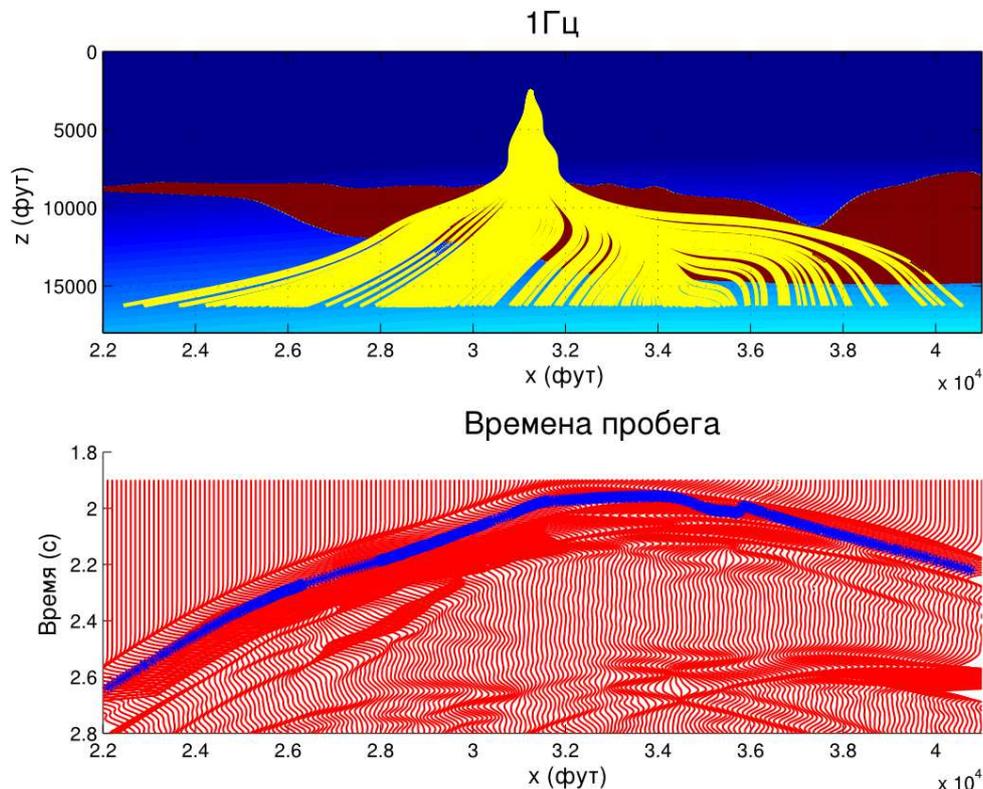


Рис. 5. Численный эксперимент для модели Sigsbee, частота 1 Гц. Сверху: частотно-зависимые лучи (изображены желтым), снизу: соответствующие времена пробега (изображены синим)

4. Заключение. В настоящей статье предложен численный метод, позволяющий строить точные частотно-зависимые лучи при заданном решении уравнения Гельмгольца. Некоторые свойства точных частотно-зависимых лучей отличаются от свойств классических лучей: лучевые траектории зависят от частоты зондирующего сигнала, а на границах раздела сред точные частотно-зависимые лучи проникают в зоны тени, недостижимые для стандартных лучей. Кроме того, поле точных частотно-зависимых лучей регулярно и непрерывно в каустиках — точные частотно-зависимые лучи нигде не пересекаются, что является выгодным отличием от стандартной лучевой теории.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 14-05-93090, 15-35-20015) и гранта Президента РФ (код проекта МК-2909.2014.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
2. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
3. Протасов М.И., Осипов К.С. Частотно-зависимое лучевое трассирование для неплоских границ // Технологии сейсморазведки. 2014. № 3. 25–31.
4. Biondi B. Solving the frequency-dependent eikonal equation // 62nd Annual International Meeting, SEG Expanded Abstracts. 1992. **11**. 1315–1319.
5. Foreman T.L. A frequency dependent ray theory. PhD thesis. Austin: Univ. of Texas at Austin, 1987.
6. Grote M.J., Sim I. Efficient PML for the wave equation. ArXiv preprint: 1001.0319v1 [math.NA]. Ithaca: Cornell Univ. Library, 2010.
7. Li X.S., Demmel J.W. SuperLU_DIST: a scalable distributed-memory sparse direct solver for unsymmetric linear systems // ACM Trans. on Math. Software. 2003. **29**, N 2. 110–140.
8. Неклюдов Д.А., Сильвестров И.Ю., Чеверда В.А. Итерационный метод решения трехмерного уравнения Гельмгольца с «почти аналитическим» предобусловливателем для моделирования акустических волновых полей в задачах сейсморазведки // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 514–529.

9. Воронин К.В., Соловьев С.А. Решение уравнения Гельмгольца с использованием метода малоранговой аппроксимации в качестве предобусловливателя // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 268–280.
10. Lomax A. The wavelength-smoothing method for approximating broad-band wave propagation through complicated velocity structures // Geophysical Journal International. 1994. **117**, N 2. 313–334.
11. Protasov M.I., Tcheverda V.A. True amplitude imaging by inverse generalized Radon transform based on Gaussian beam decomposition of the acoustic Green's function // Geophysical Prospecting. 2011. **59**, N 2. 197–209.
12. Woodward M.J. Wave-equation tomography // Geophysics. 1992. **57**, N 1. 15–26.

Поступила в редакцию
08.10.2015

Calculation of Exact Frequency-Dependent Rays when the Solution of the Helmholtz Equation is Known

K. G. Gadylshin¹ and M. I. Protasov²

¹ *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Junior Scientist, e-mail: gadylshinkg@ipgg.sbras.ru*

² *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: ProtasovMI@ipgg.sbras.ru*

Received October 8, 2015

Abstract: A numerical method is proposed for the calculation of exact frequency-dependent rays when the solution of the Helmholtz equation is known. The properties of frequency-dependent rays are analyzed and compared with the classical ray theory and with the method of finite-difference modeling for the first time. In this paper we study the dependence of these rays on the frequency of probing signals and show the convergence of the exact rays to the classical rays with increasing frequency. A number of numerical experiments demonstrate the distinctive features of exact frequency-dependent rays, in particular, their ability to penetrate into shadow zones impenetrable for the classical rays.

Keywords: Helmholtz equation, exact frequency-dependent rays, ray theory, numerical methods.

References

1. V. M. Babich and V. S. Buldyrev, *Asymptotic Methods in Short-Wavelength Diffraction Theory* (Nauka, Moscow, 1972; Springer, Heidelberg, 1989).
2. Yu. A. Kravtsov and Yu. I. Orlov, *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media* (Nauka, Moscow, 1980; Springer, Heidelberg, 1990).
3. M. I. Protasov and K. S. Osypov, "Frequency Dependent Ray Tracing for Irregular Boundaries," *Seismic Technol.* **11** (3), 1–11 (2014).
4. B. Biondi, "Solving the Frequency-Dependent Eikonal Equation," 62nd Annual Int. SEG Meeting Expanded Abstracts **11**, 1315–1319 (1992). doi 10.1190/1.1821982
5. T. L. Foreman, *A Frequency Dependent Ray Theory*, PhD Thesis (Univ. of Texas at Austin, Austin, 1987).
6. M. J. Grote and I. Sim, *Efficient PML for the Wave Equation*, arXiv preprint: 1001.0319v1 [math.NA] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2010), available at <http://arxiv.org/abs/1001.0319v1>.
7. X. S. Li and J. W. Demmel, "SuperLU_DIST: A Scalable Distributed-Memory Sparse Direct Solver for Unsymmetric Linear Systems," *ACM Trans. Math. Softw.* **29** (2), 110–140 (2003).
8. D. A. Neklyudov, I. Yu. Silvestrov, and V. A. Tcheverda, "A 3D Helmholtz Iterative Solver with a Semi-Analytical Preconditioner for Acoustic Wavefield Modeling in Seismic Exploration Problems," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 514–529 (2014).
9. K. V. Voronin and S. A. Solovyev, "Solution of the Helmholtz Problem Using the Preconditioned Low-Rank Approximation Technique," *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 268–280 (2015).
10. A. Lomax, "The Wavelength-Smoothing Method for Approximating Broad-Band Wave Propagation through Complicated Velocity Structures," *Geophys. J. Int.* **117** (2), 313–334 (1994).

11. M. I. Protasov and V. A. Tcheverda, "True Amplitude Imaging by Inverse Generalized Radon Transform Based on Gaussian Beam Decomposition of the Acoustic Green's Function," *Geophys. Prospect.* **59** (2), 197–209 (2011).
12. M. J. Woodward, "Wave-Equation Tomography," *Geophysics* **57** (1), 15–26 (1992).