

УДК 519.2:541.1

ПОЛУНОРМИРОВАННЫЕ ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ СПЛАЙНОВ

В. А. Морозов¹

В работе устанавливается связь теории А. Н. Тихонова нормальных решений с методом фактор-пространств, широко применяемым в современной вычислительной математике. При этом теория сплайнов развивается как для гильбертовых, так и для некоторых классов нормированных пространств. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00398).

Ключевые слова: метод фактор-пространств, нормальные решения, теория сплайнов, линейные алгебраические уравнения, аппроксимация, некорректно поставленные задачи, метод регуляризации.

А. Н. Тихоновым была развита концепция нормального решения систем линейных алгебраических уравнений [1], обобщенная затем на случай, когда условие минимальной нормы решения заменяется условием минимальности некоторой полунормы [2]. Это позволило применить теорию решения линейных уравнений к теории сплайнов, хотя внешне кажется, что последняя связана исключительно с разработкой специфических подходов в теории приближений [5].

1. L -сплайны. Пусть H — полное гильбертово пространство, $Z \subset H$ — его подпространство. Обозначим через H/Z фактор-пространство пространства H по подпространству Z , элементами которого являются классы смежности $X \subset H : X = x + Z, x \in H$ — фиксированный элемент. L -нормой элемента $X \in H/Z$ назовем величину $\|X\|_L = \inf_{y \in X} \|Ly\|_G$, где L — линейный ограниченный оператор, действующий из H в G , а G — также гильбертово пространство.

Определение 1. Элемент $\hat{s}_x \in X$:

$$\|L\hat{s}_x\|_G = \inf_{y \in X} \|Ly\|_G \quad (1)$$

называется L -сплайном, а элемент $s_x = \hat{s}_x$ при $L = E$ (тождественному оператору) называется *естественным сплайном*.

Определение 2. Задача (1) называется корректной [3], если L -сплайн существует и единственен для любого $x \in H$, а любая минимизирующая (1) последовательность сходится к $\hat{s}_x$.

Определение 3. Оператор L и множество Z называются *взаимно дополнительными*, если всякая последовательность $z_k \in Z : \|Lz_k\|_G \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, сходится в H к нулю.

Теорема 1. Задача (1) корректна тогда и только тогда, когда оператор L и множество Z взаимно дополнителны.

Замечание. Условие $N_L \cap Z = \{0\}$ в общем случае является лишь необходимым для корректности задачи (1). Если H конечномерно, то это условие и достаточно. Здесь N_L — ядро оператора L .

Дадим эквивалентные, но более удобные для дальнейшего формулировки условия взаимной дополнителности L и Z .

Лемма 1. Для выполнения условия дополнителности L и Z необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $y_k \in H : \rho(y_k, Z) \rightarrow 0, \|Ly_k\|_G \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, следовало $y_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Пусть $P^\perp$ — ортопроектор на ортогональное дополнение $Z^\perp$ к подпространству Z . Поскольку

$$\rho(y, Z) = \|P^\perp y\|_H,$$

то условие взаимной дополнителности L и Z выполнено тогда и только тогда, когда для любой последовательности $y_k \in H : \|Ly_k\|_G^2 + \|P^\perp y_k\|_H^2 \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, следует $y_k \rightarrow 0$. Отсюда, используя известную теорему функционального анализа [6], получаем, что справедлива

Лемма 2. Для того чтобы выполнялось условие взаимной дополнителности L и Z , необходимо и достаточно существование постоянной $m > 0$, такой, что

$$m^2 \|y\|_H^2 \leq \|Ly\|_G^2 + \|P^\perp y\|_H^2, \quad \forall y \in H. \quad (2)$$

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Далее считаем условие взаимной дополнительной L и Z выполненным. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. Задача (1) обобщенно корректна в том смысле, что любая последовательность элементов $y_k \in H : \rho(y_k, X) \rightarrow 0, \|Ly_k\|_G \rightarrow |X|_L, k \rightarrow \infty$, сходится к L -сплайну $\hat{s}_x$.

Теорема 3. Для того чтобы элемент $\hat{s}_x \in X$ был L -сплайном, необходимо и достаточно, чтобы $(L\hat{s}_x, Lz)_G = 0, \forall z \in Z$. При этом имеет место обобщенное равенство Пифагора

$$\|Lx\|_G^2 = \|L\hat{s}_x\|_G^2 + \|Lx - L\hat{s}_x\|_G^2, \quad \forall x \in H. \quad (3)$$

Из теоремы 3 вытекает, что множество $\hat{S}$ всех L -сплайнов является подпространством в H .

2. Сплайн-аппроксимация. Говорят, что семейство подпространств $Q_n \subset H, n = 1, 2, \dots$, аппроксимирует H , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{y \in Q_n} \|y - x\|_H = 0, \quad \forall x \in H.$$

Рассмотрим случай, когда имеется последовательность подпространств $Z_n, n = 1, 2, \dots$, и соответствующих им подпространств L -сплайнов $\hat{S}_n$. Поставим задачу: найти условия, обеспечивающие аппроксимацию подпространствами $\hat{S}_n$ пространства H .

Пусть $P_n^\perp$ и m_n соответственно ортопроектор на $Z_n^\perp$ и константа в соотношении (2).

Определение 4. Будем говорить, что выполнено условие (М), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m_0 > 0.$$

Определение 5. Говорят, что выполнено условие L -согласования, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n|_L = |x|_L, \quad \forall x \in H, \quad (4)$$

где $|x|_L = \|Lx\|_G$ и $X_n = x + Z_n$.

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть выполнено условие (М). Тогда для того чтобы подпространства L -сплайнов $\hat{S}_n$ аппроксимировали H , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие L -согласования (4).

Наряду с подпространством L -сплайнов $\hat{S}_n$ рассмотрим подпространство S_n естественных сплайнов. Заметим, что в этом случае $L = E$ и условие (М) выполнено автоматически. Верна

Теорема 5. Пусть выполнено условие (М). Тогда подпространства $\hat{S}_n$ и S_n аппроксимируют H одновременно.

Определение 6. Семейство подпространств Z_n будем называть аннулирующим, если для любого $y \in H : y \in Z_n, n = 1, 2, \dots$, вытекает, что $y = 0$.

Теорема 6. Пусть выполнено условие (М). Для того чтобы подпространства L -сплайнов $\hat{S}_n$ аппроксимировали H , необходимо и достаточно, чтобы подпространства Z_n были аннулирующими.

Теоремы 5 и 6 существенно облегчают процесс исследования вопроса о сходимости сплайнов.

3. Далее остановимся на некоторых достаточных условиях сходимости L -сплайнов. Будем предполагать, что указаны линейные операторы $A_n, n = 1, 2, \dots$, действующие из H в банаховы пространства F_n , такие, что выполняются условия:

а) $\|A_n\| \leq K < +\infty$, где K не зависит от n ;

б) $A_n z = 0 \iff z \in Z_n$;

в) можно указать линейный оператор $A : H \rightarrow F$ (F — банахово пространство), такой, что

$$Ay = 0 \iff y = 0; \quad \gamma^2 \|y\|_H^2 \leq \|Ly\|_G^2 + \|Ay\|_F^2 \quad \forall y \in H,$$

где $\gamma > 0$ не зависит от выбора y ;

г) выполняется следующее неравенство:

$$\|Ay\|_F^2 - \|A_n y\|_{F_n}^2 \leq r_n^2 \|Ly\|_G^2 \quad \forall y \in H,$$

где r_n не зависят от выбора y и стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 7 (ср. [4]). При указанных условиях задача (1) корректна при любом фиксированном n ; при этом подпространства L -сплайнов $\hat{S}_n$ аппроксимируют H при $n \rightarrow \infty$.

4. Пример. Пусть $H = W_2^{(r)}[a, b]$, $r \geq 1$ [6]. Зададим на $[a, b]$ сетку узлов

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = b, \quad t_i = t_i^{(n)},$$

и пусть определены функционалы

$$l_i^{(n)}(x) = h_i^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(\xi) d\xi, \quad h_i = t_{i+1} - t_i.$$

Положим $Z_n = \{z \in W_2^{(r)} : l_i^{(n)}(z) = 0, i = \overline{1, n}\}$. Тогда

$$X_n = x + Z_n = \{y \in W_2^{(r)} : l_i^{(n)}(y) = l_i^{(n)}(x) = \hat{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Пусть оператор $L = \frac{d^r}{dt^r}$.

Задача нахождения L -сплайна заключается в определении функции $\hat{s}_x^n = \hat{s}_x(t) \in W_2^{(r)}$, такой, что

$$\left\| \frac{d^r \hat{s}_x}{dt^r} \right\|_{L_2} = \inf_y \left\| \frac{d^r y}{dt^r} \right\|_{L_2}, \quad y \in X_n. \quad (5)$$

Используя интегральное представление функций $x(t) \in W_2^{(r)}$

$$x(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{r-1} t^{r-1} + \int_a^t \frac{(t-\xi)^{r-1}}{(r-1)!} x^{(r)}(\xi) d\xi,$$

легко показать, что оператор L и множества Z_n взаимно дополнительные при всех $n \geq r$. Итак, справедлива

Теорема 8. При любом $n \geq r$ задача (5) корректна (и обобщенно корректна).

Полагая

$$d(y) = \int_a^b y^2(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^n \kappa_i l_i^2(y), \quad y \in W_2^{(r)},$$

нетрудно показать, что существуют такие коэффициенты $\kappa_i > 0$, что $d(y) \leq C h_n^{2r} \|y^{(r)}\|_{L_2} \forall y \in W_2^{(r)}$, где $C = \text{const}$, $h_n = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$. Полагая $A_n y = (l_1(y), l_2(y), \dots, l_n(y))$, убеждаемся в выполнении условий а)–г)

теоремы 7, если взять в качестве оператора A оператор вложения из $W_2^{(r)}$ в L_2 . Отсюда вытекает

Теорема 9. Если $h_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то для любого $x \in W_2^{(r)}$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{s}_x^n - x\|_{W_2^{(r)}} = 0$.

Замечание. Справедливость данной теоремы можно также установить, заметив, что подпространства Z_n являются аннулирующими. При этом очевидно, что условие $h_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, является не только достаточным, но и необходимым для выполнения этого свойства.

5. Нелинейные сплайны. Пусть E — банахово пространство, на котором задан выпуклый вещественный функционал $p(x)$, такой, что

$$\gamma(\|Ly - Lx\|_G) \leq \frac{1}{2} p(x) + \frac{1}{2} p(y) - p\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x, y \in E, \quad (6)$$

где функция $\gamma(t) > 0$ строго возрастает при $t > 0$ ($\gamma(0) = 0$) и непрерывна в нуле, а L — некоторый линейный оператор, действующий из E в банахово пространство G .

Пусть Z — некоторое подпространство E и пусть E/Z — фактор-пространство E по подпространству Z . Рассмотрим задачу: найти элемент $\hat{s}_x \in X = \varphi(x)$, где φ — естественный гомоморфизм, из условия

$$\inf_{y \in X} p(y) = p(\hat{s}_x). \quad (7)$$

Определение 7. Решение задачи (7) называем p -сплайном.

Предположим, что функционал $p(x)$ полунепрерывен снизу на E , а оператор L и множество Z взаимно дополнительные, т.е. для всякой последовательности $y_n \in Z : \|Ly_n\|_G \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, имеет место соотношение $y_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Теорема 10. При указанных условиях p -сплайн однозначно определен при любом $X \subset E/Z$, $X = \varphi(x)$.

Доказательство. Положим $p^* = \inf_{y \in X} p(y)$. Определим элементы $x_n \in X : p(x_n) \leq p^* + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \rightarrow 0+$, $n \rightarrow \infty$. Используя (6), получим

$$\gamma(\|Lx_{n+k} - Lx_n\|_G) \leq \frac{1}{2}(p^* + \varepsilon_{n+k}) + \frac{1}{2}(p^* + \varepsilon_n) - p^* \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

независимо от натурального k . Поэтому $\|Lx_{n+k} - Lx_n\|_G \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, независимо от k . Очевидно, что $x_{n+k} - x_n \in Z$; следовательно, $x_{n+k} - x_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, независимо от k (по условию дополненности L и Z). Так как E — полное пространство, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Используя полунепрерывность снизу функционала $p(x)$, имеем $p(x_0) \leq p^*$. Из замкнутости X вытекает, что $x_0 \in X$, т.е. x_0 — искомое решение. Если x_0 и x_1 два решения задачи (7), то получаем $x_0 - x_1 \in Z$ и

$$\gamma(\|Lx_0 - Lx_1\|_G) \leq \frac{1}{2}p(x_0) + \frac{1}{2}p(x_1) - p\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}p^* + \frac{1}{2}p^* - p^* = 0.$$

Из условия дополненности L и Z следует $x_1 = x_0$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Докл. АН СССР. 1965. **163**, № 3. 591–594.
2. Морозов В.А. Метод регуляризации и решение систем линейных алгебраических уравнений // Тр. Всесоюзного семинара “Вычисл. методы лин. алгебры”. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1971.
3. Тихонов А.Н. Об устойчивости задачи оптимизации функционалов // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1966. **6**, № 1. 631–634.
4. Морозов В.А. О приближенном решении операторных уравнений методом сплайнов // Докл. АН СССР. 1971. **200**, № 1. 35–38.
5. Morozov V.A. Theory of splines and the problem of stable calculation of values of unbounded operators // J. Comp. Math. and Math. Phys. 1971. **11**, N 3. 545–558.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
7. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
8. Вайникко Г.М. Анализ дискретизационных методов. Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1976.
9. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.
10. Алберг Д., Нильсон Э., Уолш Д. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию
03.03.2003