

УДК 519.633.6

doi 10.26089/NumMet.v16r341

МОДИФИКАЦИЯ СХЕМЫ “КАБАРЕ” ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ В ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

А. В. Данилин¹, А. В. Соловьев², А. М. Зайцев³

Предложен явный численный алгоритм для расчета течений смесей идеальных газов в двумерных областях. Приведены физическая модель и уравнения движения смеси в консервативной и характеристической формах. Дискретизация уравнений движения произведена по методике “кабаре”. Алгоритм испытан на задачах о прохождении ударной волны в воздухе через неоднородности из легкого и тяжелого газов, начальные условия для которых адаптированы из рассмотренных другими авторами натуральных и численных экспериментов. Показано хорошее совпадение расчетов по предложенному алгоритму с результатами этих экспериментов.

Ключевые слова: односкоростная многокомпонентная среда, системы гиперболических уравнений, схема “кабаре”, вычислительная гидродинамика, консервативный метод, метод конечных объемов, турбулентное перемешивание.

1. Введение. Для свойств численных алгоритмов, предназначенных для решения задач многокомпонентной газовой динамики, наряду с консервативностью, высокой разрешающей способностью и возможностью точно воспроизводить разрывные решения особый интерес представляет их качество, связанное с разрешением границ раздела двух сред. Не удовлетворяющие этим качествам алгоритмы могут приводить к сильным осцилляциям давления, скорости и плотности на этих границах [1], что может вызывать численную неустойчивость или же, наоборот, будет приводить к неоправданно большой численной диссипации.

Цель настоящей статьи состоит в построении численного алгоритма для решения задач многокомпонентной газовой динамики в двумерных областях на основе подхода “кабаре” и проверки качества получаемых с его помощью решений на задачах, сопряженных с большими градиентами плотностей и давлений на границе раздела двух газовых сред. Использование этого подхода позволяет получить консервативную явную разностную схему, имеющую второй порядок аппроксимации по пространству и времени и устойчивую при числах Куранта–Фридрихса–Леви в диапазоне от 0 до 1. В схемах, основанных на данном подходе, используются консервативные (относящиеся к центрам расчетных ячеек) и потоковые (относящиеся к граням ячеек) переменные. Для расчета по методу “кабаре” применяется так называемый балансно-характеристический подход, в рамках которого для вычисления консервативных переменных используются уравнения движения в консервативной форме, а для вычисления потоковых величин — в характеристической. Указанный подход подробно изложен в работах [2–7]. В качестве задач для исследования выбраны тесты с прохождением ударных волн в воздухе через пространственные неоднородности, состоящие из более тяжелого и более легкого газов. Данные тесты широко представлены в ряде вычислительных работ [8–11, 15–17], постановка задач в которых является как самостоятельной, так и адаптированной из натуральных экспериментов [12, 13, 18]. Для этих тестов приведены качественные и количественные результаты, а также их сравнение с экспериментальными данными и вычислениями других авторов. Рассматриваемые здесь результаты являются развитием одномерного многокомпонентного алгоритма, предложенного авторами в работе [14].

2. Уравнения движения.

2.1. Консервативная форма уравнений движения. Описываемая физическая модель газовой смеси строится в следующих предположениях. Смесь состоит из N идеальных газов с постоянными удельными теплоемкостями при постоянном объеме и показателями адиабаты. Смесь находится в условиях,

¹ Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: danilin.physics@gmail.com

² Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

³ Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: azai@ibrae.ac.ru

когда проскальзыванием ее отдельных компонентов можно пренебречь, что приводит к так называемой односкоростной модели. Кроме того, предполагается локальное термодинамическое равновесие, т.е. одно-температурность модели. Смесь существует в условиях отсутствия фазовых и химических превращений. Внешние силы, а также вязкость и диффузия отсутствуют. Из вышеизложенного следует форма уравнений неразрывности для компонентов, законы сохранения импульса и энергии для смеси:

$$\frac{\partial \rho \xi_f}{\partial t} + \frac{\partial \rho \xi_f u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \xi_f v}{\partial y} = 0, \quad f = \overline{1, N}; \quad \sum_{f=1}^N \xi_f \equiv 1; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho E + p)}{\partial x} + \frac{\partial v(\rho E + p)}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Здесь ξ_f — массовые доли отдельных компонентов смеси, (u, v) — вектор скорости смеси, ρ — общая плотность газовой смеси, p — давление смеси, E — полная энергия единицы массы смеси.

Уравнение состояния смеси задается следующим соотношением:

$$p = (\bar{\gamma} - 1) \rho \left(E - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right).$$

Здесь $\bar{\gamma} = \left(\sum_{f=1}^N \gamma_f C_f \xi_f \right) \left(\sum_{f=1}^N C_f \xi_f \right)^{-1}$ — эффективный показатель адиабаты смеси, где γ_f и C_f — показатели адиабаты и удельные теплоемкости при постоянном объеме отдельных компонентов смеси соответственно.

2.2. Простая форма уравнений движения. Система уравнений (1)–(4) после ряда эквивалентных преобразований может быть записана в так называемой простой форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \quad \varphi^T = (\xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \rho, u, v, p), \tag{5}$$

где
$$A_x = \begin{pmatrix} u & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{\gamma} p & 0 & u \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} v & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \bar{\gamma} p & v \end{pmatrix}.$$

Равенство (5) может быть представлено в форме неоднородных одномерных уравнений переноса вдоль направлений \mathbf{x} и \mathbf{y} :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathbf{f}_x \equiv -A_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \tag{6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mathbf{f}_y \equiv -A_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{7}$$

2.3. Характеристическая форма уравнений движения. Можно показать, что собственные значения матриц A_x и A_y имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1^x &= u + c, & \lambda_2^x &= u - c, & \lambda_f^x &= u, & f &= \overline{3, N+3}; \\ \lambda_1^y &= v + c, & \lambda_2^y &= v - c, & \lambda_f^y &= v, & f &= \overline{3, N+3}. \end{aligned}$$

Здесь $c = \sqrt{\bar{\gamma} p / \rho}$ — скорость звука.

Из собственных векторов матрицы A_x составим матрицу $\Omega_x = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/(\rho c) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/(\rho c) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -c^2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Умножим ее на выражение (6), получив тем самым локально одномерную характеристическую форму уравнений движения вдоль оси x :

$$\Omega_x \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda_x \Omega_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Omega_x \mathbf{f}_x, \quad \Lambda_x = \text{diag}(\lambda_1^x, \lambda_2^x, \lambda_3^x, \dots, \lambda_{N+3}^x). \quad (8)$$

Аналогичные действия над выражением (7) приводят к локально одномерной характеристической форме уравнений движения вдоль направления y :

$$\Omega_y \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda_y \Omega_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Omega_y \mathbf{f}_y, \quad \Lambda_y = \text{diag}(\lambda_1^y, \lambda_2^y, \lambda_3^y, \dots, \lambda_{N+3}^y).$$

3. Численный алгоритм.

3.1. Расчетная область и сетка. Расчетная область — прямоугольник $[X_l, X_r] \times [Y_b, Y_t]$. В расчетной области введена равномерная расчетная сетка из $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$ узлов, заданная узловыми точками

$$(x_i, y_j): \quad X_l = x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x} < x_{N_x+1} = X_r, \quad Y_b = y_1 < y_2 < \dots < y_{N_y} < y_{N_y+1} = Y_t.$$

Данный набор узлов порождает $N_x \times N_y$ расчетных ячеек, $N_x \times (N_y + 1)$ горизонтальных и $(N_x + 1) \times N_y$ вертикальных граней. Центрам ячеек соответствуют консервативные переменные, обозначаемые двумя полуцелыми индексами $(i + 1/2, j + 1/2)$, центрам горизонтальных и вертикальных граней соответствуют потоковые переменные, обозначаемые индексами $(i + 1/2, j)$ и $(i, j + 1/2)$ соответственно. Консервативные переменные имеют смысл средних значений физических величин в рамках одной вычислительной ячейки, потоковые переменные отвечают за обмен величинами между ячейками. Схема оперирует тремя временными слоями: начальным n , полуцелым $n + 1/2$ и новым $n + 1$.

3.2. Задание начальных данных. В качестве глобальных физических констант задаются показатели адиабаты γ_f и удельные теплоемкости при постоянном объеме C_f компонентов смеси. В начальный момент времени в центрах и на гранях расчетных ячеек задаются плотность компонентов смеси ρ_f , скорость (u, v) и давление p , откуда определяется полная энергия E .

3.3. Временной шаг. Для устойчивости представленного явного алгоритма шаг по времени определяется условием Куранта–Фридрихса–Леви:

$$\frac{(\lambda_{\max}^x)_{i+1/2, j+1/2}^n \tau_n}{\Delta x_{i+1/2}} \leq \text{CFL} \leq 1; \quad \frac{(\lambda_{\max}^y)_{i+1/2, j+1/2}^n \tau_n}{\Delta y_{j+1/2}} \leq \text{CFL} \leq 1;$$

$$(\lambda_{\max}^x)_{i+1/2, j+1/2}^n = |u_{i+1/2, j+1/2}^n| + c_{i+1/2, j+1/2}^n, \quad (\lambda_{\max}^y)_{i+1/2, j+1/2}^n = |v_{i+1/2, j+1/2}^n| + c_{i+1/2, j+1/2}^n.$$

Здесь $c_{i+1/2, j+1/2}^n = \sqrt{(\gamma p / \rho)_{i+1/2, j+1/2}^n}$ — локальная скорость звука на n -м временном слое и CFL — число Куранта.

Окончательно, шаг по времени выбирается следующим образом:

$$\tau_n = \text{CFL} \min_{i,j} \left(\frac{\Delta x_{i+1/2}}{(\lambda_{\max}^x)_{i+1/2, j+1/2}^n}, \frac{\Delta y_{j+1/2}}{(\lambda_{\max}^y)_{i+1/2, j+1/2}^n} \right).$$

3.4. Схема “кабаре”. Схема “кабаре” для численного решения уравнений движения (1)–(4) записывается следующим образом:

$$\frac{U_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{\bar{E}_{i+1, j+1/2}^{n+1} - \bar{E}_{i, j+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\bar{F}_{i+1/2, j+1}^{n+1} - \bar{F}_{i+1/2, j}^n}{\Delta y_{i+1/2}} = 0. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{U}^T = (\rho \xi_1, \dots, \rho \xi_N, \rho u, \rho v, \rho E)$ — вектор консервативных величин; $\mathbf{E}^T = (\rho \xi_1 u, \dots, \rho \xi_N u, \rho u^2 + p, \rho v u, u(\rho E + p))$ — вектор потоков, относящихся к вертикальным граням; $\mathbf{F}^T = (\rho \xi_1 v, \dots, \rho \xi_N v, \rho u v, \rho v^2 +$

$p, v(\rho E + p)$) — вектор потоков, относящихся к горизонтальным граням; $\bar{\eta} = (\eta^n + \eta^{n+1})/2$ — черта над потоковыми переменными обозначает усреднение по начальному и новому временным слоям.

3.5. Первая фаза алгоритма. Один временной шаг схемы “кабаре” состоит из трех фаз. В первой фазе алгоритма вычисляются промежуточные консервативные значения на полуцелом $n + 1/2$ временном слое. Во второй фазе вычисляются потоковые переменные на новом $n + 1$ временном слое. На третьей фазе рассчитываются консервативные переменные на новом $n + 1$ временном слое.

Дискретизация уравнений движения в первой фазе алгоритма имеет вид

$$\frac{U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{E_{i+1,j+1/2}^n - E_{i,j+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{F_{i+1/2,j+1}^n - F_{i+1/2,j}^n}{\Delta y_{i+1/2}} = 0. \quad (10)$$

Из выражения (10) получаются значения консервативных величин $\xi_1, \dots, \xi_N, \rho, u, v, E, p$ на полуцелом временном слое.

3.6. Вторая фаза алгоритма. Во второй фазе при помощи характеристического подхода вычисляются потоковые переменные на новом временном слое. Далее будет рассматриваться алгоритм вычисления потоковых переменных на вертикальных гранях расчетной сетки. Алгоритм для расчета величин на горизонтальных гранях полностью аналогичен и в данном тексте не приводится. Для нашего вычисления в рамках одной пространственно-временной ячейки $[x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}] \times [t_n, t_{n+1}]$ считаются постоянными некоторые зависящие от локальных параметров течения газа элементы матрицы Ω_x . Обозначим такую матрицу $\Omega_{x_{i+1/2,o}}^{n+1/2}$, где для сокращения записи выражений под обозначением “о” подразумевается индекс $j + 1/2$:

$$\Omega_{x_{i+1/2,o}}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & G_{i+1/2,o}^{n+1/2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & -G_{i+1/2,o}^{n+1/2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\bar{\gamma}p/\rho & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь $G_{i+1/2,o}^{n+1/2} = 1/(\rho c)_{i+1/2,o}^{n+1/2}$ — вспомогательная величина.

Собственные значения матрицы (11) будем считать постоянными в рамках рассматриваемой пространственно-временной ячейки:

$$(\lambda_1^x)_{i+1/2,o}^{n+1/2} = u_{i+1/2,o}^{n+1/2} + c_{i+1/2,o}^{n+1/2}; \quad (\lambda_2^x)_{i+1/2,o}^{n+1/2} = u_{i+1/2,o}^{n+1/2} - c_{i+1/2,o}^{n+1/2}; \quad (\lambda_f^x)_{i+1/2,o}^{n+1/2} = u_{i+1/2,o}^{n+1/2}, \quad f = \overline{3, N+3},$$

где $c_{i+1/2,o}^{n+1/2} = \sqrt{\bar{\gamma}p/\rho}_{i+1/2,o}^{n+1/2}$ — локальная скорость звука.

Для случая постоянства элементов $G_{i+1/2,o}^{n+1/2}$ матрицы $\Omega_{x_{i+1/2,o}}^{n+1/2}$ характеристическая форма уравнений движения (8) сводится к набору уравнений переноса локальных инвариантов Римана:

$$\frac{\partial I_f^x}{\partial t} + (\lambda_f^x)_{i+1/2,o}^{n+1/2} \frac{\partial I_f^x}{\partial x} = (g_f^x)_{i+1/2,o}^{n+1/2}, \quad f = \overline{1, N+3},$$

где $I_1^x = u + G_{i+1/2,o}^{n+1/2}p$, $I_2^x = u - G_{i+1/2,o}^{n+1/2}p$, $I_3^x = v$, $I_4^x = \ln(p/\rho^{\bar{\gamma}})$, $I_f^x = \xi_f$, $f = \overline{5, N+3}$.

Таким образом, для каждой расчетной ячейки получена система уравнений переноса инвариантов Римана I_f^x с соответствующими характеристическими скоростями λ_f^x в направлении x . Данная система приближает исходную дифференциальную систему (8). Далее для каждой расчетной грани производится вычисление и коррекция потоковых значений инвариантов на $n + 1$ временном слое. При этом для каждой грани рассчитываются два возможных значения инвариантов: один, приходящий из левой, и другой, приходящий из правой по отношению к грани расчетной ячейки. Первый инвариант обозначается индексом L , второй — индексом R . Затем из этих инвариантов выбирается один в соответствии со знаком соответствующей характеристической скорости, отнесенной к этой грани. Алгоритм такого выбора приведен ниже. Рассмотрим экстраполяцию на новый временной слой и коррекцию некоторого инварианта I , переносимого по характеристике λ в направлении x .

Экстраполяция инварианта, приходящего из левой ячейки: $(I_{i,o}^{n+1})_L^* = 2I_{i-1/2,o}^{n+1/2} - I_{i-1,o}^n$.

Коррекция инварианта, приходящего из левой ячейки:

$$(I_{i,\circ}^{n+1})_L = \begin{cases} m, & (I_{i,\circ}^{n+1})_L^* \leq m; \\ M, & (I_{i,\circ}^{n+1})_L^* \geq M; \\ (I_{i,\circ}^{n+1})_L^*, & (I_{i,\circ}^{n+1})_L^* \in (m, M); \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} m = \min(I_{i-1,\circ}^n, I_{i-1/2,\circ}^{n+1/2}, I_{i,\circ}^n) + \tau_n g; \\ M = \max(I_{i-1,\circ}^n, I_{i-1/2,\circ}^{n+1/2}, I_{i,\circ}^n) + \tau_n g; \\ g = \frac{(I_{i-1/2,\circ}^{n+1/2} - I_{i-1/2,\circ}^n)}{\tau_n/2} + \lambda_{i-1/2,\circ}^{n+1/2} \frac{(I_{i,\circ}^n - I_{i-1,\circ}^n)}{\Delta x_{i-1/2}}. \end{cases}$$

Экстраполяция инварианта, приходящего из правой ячейки: $(I_{i,\circ}^{n+1})_R^* = 2I_{i+1/2,\circ}^{n+1/2} - I_{i+1,\circ}^n$.

Коррекция инварианта, приходящего из левой ячейки:

$$(I_{i,\circ}^{n+1})_R = \begin{cases} m, & (I_{i,\circ}^{n+1})_R^* \leq m; \\ M, & (I_{i,\circ}^{n+1})_R^* \geq M; \\ (I_{i,\circ}^{n+1})_R^*, & (I_{i,\circ}^{n+1})_R^* \in (m, M). \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} m = \min(I_{i,\circ}^n, I_{i+1/2,\circ}^{n+1/2}, I_{i+1,\circ}^n) + \tau_n g; \\ M = \max(I_{i,\circ}^n, I_{i+1/2,\circ}^{n+1/2}, I_{i+1,\circ}^n) + \tau_n g; \\ g = \frac{(I_{i+1/2,\circ}^{n+1/2} - I_{i+1/2,\circ}^n)}{\tau_n/2} + \lambda_{i+1/2,\circ}^{n+1/2} \frac{(I_{i+1,\circ}^n - I_{i,\circ}^n)}{\Delta x_{i+1/2}}. \end{cases}$$

Окончательный выбор значения потокового инварианта I на новом временном слое:

$$I_{i,\circ}^{n+1} = \begin{cases} I_{i,\circ}^{n+1}{}_L, & \lambda_{i-1/2,\circ}^{n+1/2} + \lambda_{i+1/2,\circ}^{n+1/2} \geq 0; \\ I_{i,\circ}^{n+1}{}_R, & \lambda_{i-1/2,\circ}^{n+1/2} + \lambda_{i+1/2,\circ}^{n+1/2} < 0. \end{cases}$$

После вычисления потоковых значений инвариантов на $n+1$ временном слое из них производится восстановление потоковых физических величин.

Вычислим вспомогательные величины G_Q и G_R , необходимые для расчета потоковых значений давления и скорости:

$$G_R = \begin{cases} G_{i-1/2,\circ}^{n+1/2}, & \lambda_{1i-1/2,\circ}^{x n+1/2} + \lambda_{1i+1/2,\circ}^{x n+1/2} \geq 0; \\ G_{i+1/2,\circ}^{n+1/2}, & \lambda_{1i-1/2,\circ}^{x n+1/2} + \lambda_{1i+1/2,\circ}^{x n+1/2} < 0; \end{cases} \quad G_Q = \begin{cases} G_{i-1/2,\circ}^{n+1/2}, & \lambda_{2i-1/2,\circ}^{x n+1/2} + \lambda_{2i+1/2,\circ}^{x n+1/2} \geq 0; \\ G_{i+1/2,\circ}^{n+1/2}, & \lambda_{2i-1/2,\circ}^{x n+1/2} + \lambda_{2i+1/2,\circ}^{x n+1/2} < 0. \end{cases}$$

По полученным значениям инвариантов I_f^x , $f = \overline{5, N+3}$, рассчитываются потоковые значения массовых долей компонентов смеси ξ_f : $\xi_f^{n+1} = (I_{f+4}^x)_{i,\circ}^{n+1}$ при $f = \overline{1, N-1}$; $\xi_N^{n+1} = 1 - \sum_{f=1}^{N-1} \xi_f^{n+1}$.

Из значений $\{\xi_f\}_i^{n+1}$ вычисляем эффективный показатель адиабаты $\bar{\gamma}_i^{n+1}$: $\bar{\gamma}_i^{n+1} = \frac{\sum_{f=1}^N \gamma_f C_f \xi_f^{n+1}}{\sum_{f=1}^N C_f \xi_f^{n+1}}$.

Перейдем к непосредственному вычислению потоковых величин на $n+1$ временном слое.

$$\text{Давление: } p_{i,\circ}^{n+1} = \frac{(I_1^x)_{i,\circ}^{n+1} - (I_2^x)_{i,\circ}^{n+1}}{G_R + G_Q}.$$

$$\text{Продольная скорость: } u_{i,\circ}^{n+1} = \frac{G_R (I_2^x)_{i,\circ}^{n+1} + G_Q (I_1^x)_{i,\circ}^{n+1}}{G_R + G_Q}.$$

$$\text{Поперечная скорость: } v_{i,\circ}^{n+1} = (I_3^x)_{i,\circ}^{n+1}.$$

$$\text{Суммарная плотность: } \rho_{i,\circ}^{n+1} = \left(\frac{p_{i,\circ}^{n+1}}{\exp(I_4^x)_{i,\circ}^{n+1}} \right)^{1/(\bar{\gamma}_{i,\circ}^{n+1})}.$$

$$\text{Плотности отдельных газовых компонентов: } \rho_{f,i,\circ}^{n+1} = \rho_{i,\circ}^{n+1} \xi_{f,i,\circ}^{n+1}, \quad f = \overline{1, N}.$$

$$\text{Полная энергия: } E_{i,\circ}^{n+1} = \frac{p_{i,\circ}^{n+1}}{(\bar{\gamma}_{i,\circ}^{n+1} - 1) \rho_{i,\circ}^{n+1}} + \frac{(u_{i,\circ}^{n+1})^2}{2} + \frac{(v_{i,\circ}^{n+1})^2}{2}.$$

3.7. Третья фаза. Дискретизация уравнений движения в третьей фазе алгоритма:

$$\frac{U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{E_{i+1,j+1/2}^{n+1} - E_{i,j+1/2}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{F_{i+1/2,j+1}^{n+1} - F_{i+1/2,j}^{n+1}}{\Delta y_{j+1/2}} = 0. \tag{12}$$

Следует отметить, что суммирование дискретизаций уравнений движения (10) и (12) на первом и третьем шаге алгоритма даст в итоге исходную схему “кабаре” (9).

3.8. Граничные условия. Схема допускает задание ряда физически значимых граничных условий, таких как вход, выход, стенка с проскальзыванием, стенка с прилипанием, периодические граничные условия. Реализация всех типов граничных условий в рамках схемы “кабаре” объединена общим подходом — дополнением приграничных граней недостающими значениями инвариантов с дальнейшей реконструкцией потоковых физических величин по общему алгоритму в ходе второго шага алгоритма. Отличие всех граничных условий сводится к способу дополнения недостающих значений инвариантов.

4. Численные эксперименты.

4.1. Прохождение ударной волны через цилиндрическую неоднородность из легкого газа. Начальные условия данной задачи взяты из работы [10], в которой воспроизводится существенно двумерный эксперимент [12] с прохождением ударной волны через пузырь из смеси гелия с воздухом.

Таблица 1

Начальные параметры течения в задаче 4.1

Вел.	Уд. волна	Воздух	Гелий-воздух	Ед. изм.
ρ	1.376	1.0	0.182	кг/м ³
γ	1.4	1.4	1.648	1
u	124.824	0	0	м/с
p	156980	100000	100000	Па
C_v	720.0	720.0	2440.0	Дж/(кг К)

Численный эксперимент ставится следующим образом. Расчетная область — прямоугольник $[0, L_x] \times [0, L_y] = [0, 0.3] \times [0, 0.0445]$. В расчетной области задана расчетная сетка $N_x \times N_y = 1450 \times 215$ расчетных ячеек. С целью экономии времени задача ставится в осесимметричной постановке: вместо полного круглого пузыря в начальный момент в области $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2, x_0 = 0.085, y_0 = 0, r = 0.025, y \geq 0$, задается полукруг, заполненный смесью гелия и воздуха (данная смесь рассматривается в расчете как один газ с усредненными физическими характеристиками), в остальной части расчетной области находится воздух. Пузырь и окружающая среда находятся в статическом и термодинамическом равновесии. На левой грани задаются условия входа ударной волны, на правой грани — условия выхода. На верхней и нижней гранях задается условие стенки со свободным проскальзыванием. Точные физические параметры задачи в начальный момент времени приведены в табл. 1.

На левой грани задаются условия входа ударной волны, на правой грани — условия выхода. На верхней и нижней гранях задается условие стенки со свободным проскальзыванием. Точные физические параметры задачи в начальный момент времени приведены в табл. 1.

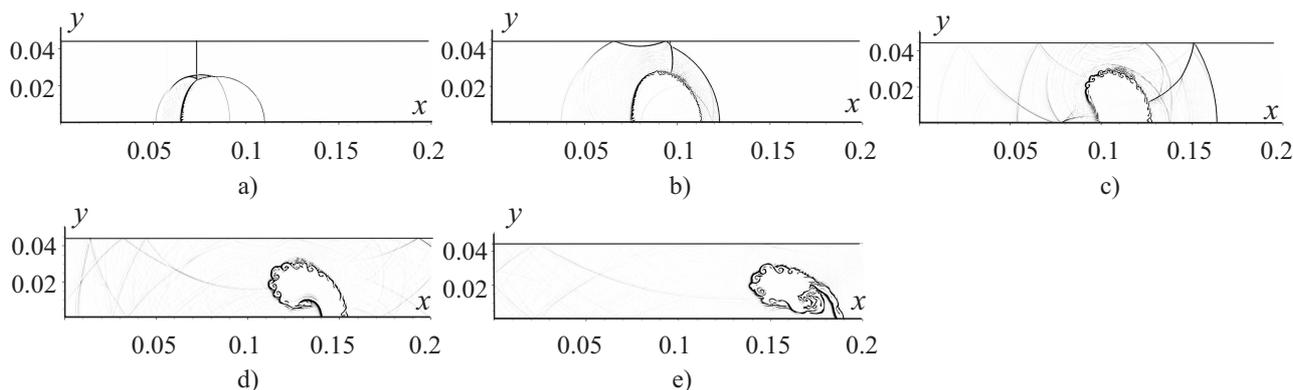


Рис. 1. Эволюция прямоугольной неоднородности при прохождении через нее ударной волны на моменты времени а) $T = 52$ мс, б) $T = 102$ мс, в) $T = 201$ мс, д) $T = 376$ мс, е) $T = 704$ мс. Время отсчитывается с момента запуска эксперимента, CFL = 0.45

На рис. 1 приведено распределение модуля градиента плотности смеси в различные моменты времени, соответствующие характерным этапам течения:

- а) после столкновения ударной волны с пузырем внутри второго возникает новая ударная волна, скорость которой за счет меньшей плотности водород-воздушной смеси превышает скорость исходной;
- б) интерференция исходной и индуцированной ударных волн, деформация и возникновение мелкой ряби на границе пузыря;

с) выраженное развитие неустойчивости Релея–Тейлора на поверхности пузыря и возникновение сложной интерференции отраженных ударных волн и волн разрежения;

d–e) дальнейшая деформация пузыря, начало турбулизации окружающего его течения.

Данная техника представления результатов расчета имитирует шпирен-метод, эффективный при визуализации пространственных структур течения с выраженными неоднородностями плотности — ударных волн, границ между средами и вихревых структур.

Прямое сравнение результатов расчетов, приведенных на рис. 1, с их прототипом из работы [10] показывает детально точное совпадение эволюции границы раздела двух фаз и картины распределения отраженных ударных волн вплоть до начала выраженной турбулизации течения вокруг пузыря. Различия результатов на завершающей стадии расчета объясняется разными диссипативно-дисперсионными свойствами численных алгоритмов, ярко проявляющимися при моделировании турбулентных течений.

4.2. Прохождение ударной волны через прямоугольную неоднородность из тяжелого газа. Начальные условия данной задачи взяты из работы [11], прототипом для которой послужил эксперимент из [13].

Расчетной областью является прямоугольник $[0, L_x] \times [0, L_y] = [0, 0.45] \times [0, 0.2]$. Задана расчетная сетка $N_x \times N_y = 720 \times 320$ расчетных ячеек. В начальный момент времени в прямоугольнике $[0.1, 0.25] \times [0, 0.1]$ находится тяжелый газ — фторид серы VI (SF_6), в остальной части расчетной области находится воздух. Пузырь SF_6 и окружающая воздушная среда находятся в статическом и термодинамическом равновесии. На левой грани задаются условия входа ударной волны. На верхней, нижней и правой гранях задается условие стенки со свободным проскальзыванием. Точные физические параметры задачи в начальный момент времени приведены в табл. 2.

Таблица 2
Начальные параметры течения в задаче 4.2

Вел.	Уд. волна	Воздух	SF_6	Ед. изм.
ρ	1.6672	1.153	5.805	кг/м ³
γ	1.4	1.4	1.076	1
u	133.273	0	0	м/с
p	163256	96856	96856	Па
C_v	720.0	720.0	613.46	Дж/(кг К)

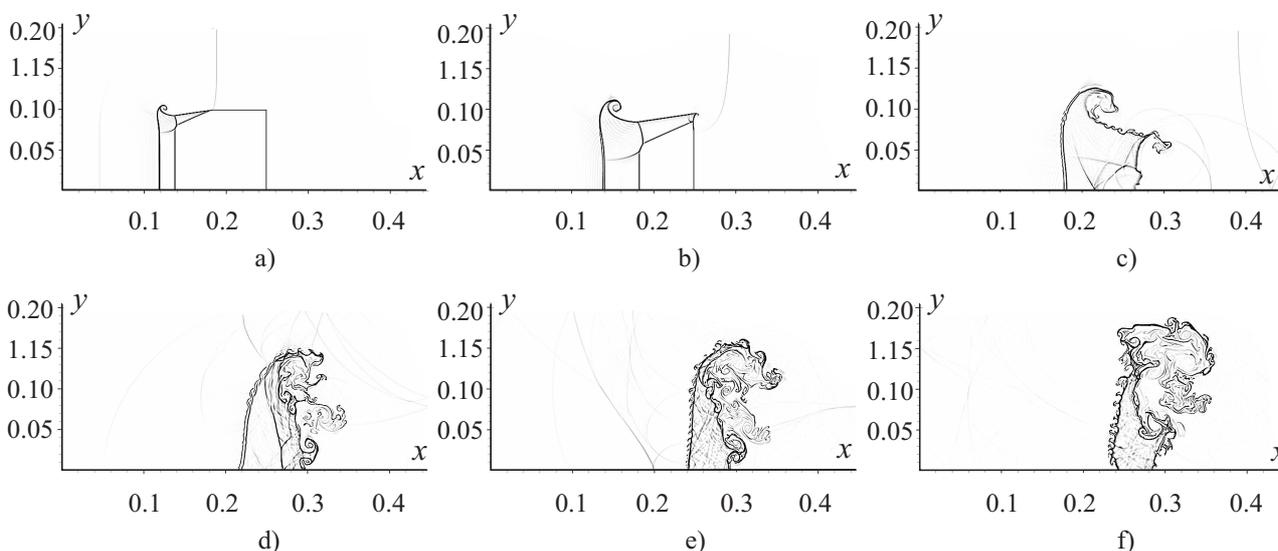


Рис. 2. Эволюция прямоугольной неоднородности при прохождении через нее ударной волны на моменты времени а) $T = 206$ мс, б) $T = 446$ мс, в) $T = 726$ мс, д) $T = 1726$ мс, е) $T = 2046$ мс, ф) $T = 2846$ мс.

Время отсчитывается с момента столкновения ударной волны с неоднородностью, $CFL = 0.45$

На рис. 2 представлено распределение модуля градиента плотности смеси в различные моменты времени:

a–b) первоначальная ударная волна при прохождении через область с тяжелым газом порождает горизонтально движущуюся ударную волну, имеющую меньшую по сравнению с первоначальной скорость, а при прохождении над этой областью порождает на границе раздела сред ударную волну, движущуюся вниз;

с) на границе раздела сред развивается неустойчивость Релея–Тейлора, справа от области с тяжелым газом — искривленный фронт отраженной от правой стенки ударной волны;

d–f) турбулизация течения в области с тяжелым газом после прохождения отраженной ударной вол-

ны.

Сравнение результатов расчетов, приведенных на рис. 2, с приведенными в [11], как и в предыдущем эксперименте, показывает хорошее совпадение эволюции границы раздела двух фаз и распределения отраженных ударных волн вплоть до выраженной турбулизации течения.

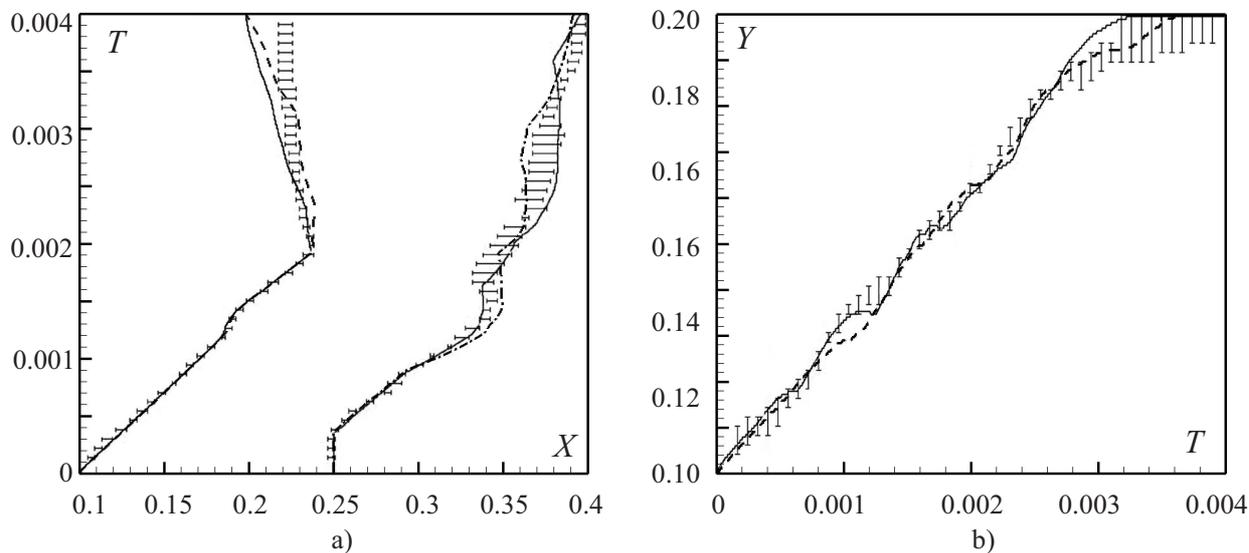


Рис. 3. Координаты крайней левой и крайней правой ячеек, содержащих SF₆ в данный момент времени (а): штриховая и штрихпунктирная линии — расчет по “кабаре”, сплошная линия — расчет из работы [11], отрезки — экспериментальные данные с интервалом погрешности. Координата наивысшей ячейки, содержащей SF₆ в данный момент времени (б): штриховая линия — расчет по “кабаре”, сплошная линия — расчет из работы [11], отрезки — экспериментальные данные с интервалом погрешности

На рис. 3 показаны количественные характеристики распространения SF₆ в расчетной области: на нем приведены зависимости от времени положений крайне левой, правой и верхней точек, содержащих SF₆, самая нижняя точка при этом остается фиксированной и находится на нижней грани расчетной области. Кроме того, на данном рисунке для сравнения приведены расчетные и экспериментальные результаты из работы [11]. Из рисунка видно отличное совпадение всех приведенных результатов в начальные моменты времени. Данное совпадение, однако, ухудшается после сильной турбулизации течения при прохождении через него отраженной от правой стенки ударной волны, что для результатов вычислений можно обосновать различием дисперсионных свойств используемых схем.

5. Заключение. В настоящей статье предложен явный численный алгоритм для решения задач многокомпонентной газовой динамики в прямоугольных двумерных областях на основе методики “кабаре”. Сравнение проведенных численных экспериментов с работами других авторов показало высокое качество решений, получаемых при помощи предложенного алгоритма, что позволяет использовать результаты данной работы при обобщении многокомпонентного алгоритма “кабаре” на трехмерный случай со структурированными и неструктурированными пространственными сетками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abgrall R. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi conservative approach // J. Comput. Phys. 1996. **125**, N 1. 150–160.
2. Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы Кабаре // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 1. 101–116.
3. Головизнин В.М., Карabasов С.А. Нелинейная коррекция схемы Кабаре // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 12. 107–123.
4. Головизнин В.М., Карabasов С.А., Кобринский И.М. Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. 2003. **15**, № 9. 29–48.
5. Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // Математическое моделирование. 2006. **18**, № 11. 14–30.
6. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. **228**, N 19. 7426–7451.

7. Кондаков В.Г. Обобщение схемы КАБАРЕ на многомерные уравнения задач газовой динамики. Канд. дис. М.: МГУ, 2014.
8. Quirk J.J., Karni S. On the dynamics of a shock-bubble interaction // *Journal of Fluid Mechanics*. 1996. **318**. 129–163.
9. Jacobs J.W. The dynamics of shock accelerated light and heavy gas cylinders // *Physics of Fluids A*. 1993. **5**, N 9. 2239–2247.
10. Lagumbay R.S. Modeling and simulation of multiphase/multicomponent flows. PhD Thesis, University of Colorado. Boulder, 2006.
11. Bates K.R., Nikiforakis N., Holder D. Richtmyer–Meshkov instability induced by the interaction of a shock wave with a rectangular block of SF₆ // *Physics of Fluids*. 2007. **19**. doi 10.1063/1.2565486.
12. Haas J.-F., Sturtevant B. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. **181**. 41–76.
13. Holder D.A. et al. Shock tube experiments on Richtmyer–Meshkov instability growth using an enlarged double-bump perturbation // *Laser Part. Beams*. 2003. **21**, N 3. 411–418.
14. Данилин А.В., Соловьев А.В. Модификация схемы “кабаре” для расчета течения многокомпонентных газовых смесей // *Вычислительные методы и программирование*. 2015. **16**. 18–25.
15. Latini M., Schilling O., Don W.S. Effects of WENO flux reconstruction order and spatial resolution on reshocked two-dimensional Richtmyer–Meshkov instability // *J. Comput. Phys*. 2007. **221**, N 2. 805–836.
16. Holmes R.L., Grove J.W., Sharp D.H. Numerical investigation of Richtmyer–Meshkov instability using front tracking // *J. Fluid Mechanics*. 1995. **301**. 51–64.
17. Cohen R.H., Dannevik W.P., Dimits A.M. Three-dimensional simulation of a Richtmyer–Meshkov instability with a two-scale initial perturbation // *Physics of Fluids*. 2002. **14**. 3692–3709.
18. Collins B.D., Jacobs J.W. PLIF flow visualization and measurements of the Richtmyer–Meshkov instability of an air/SF₆ interface // *J. of Fluid Mechanics*. 2002. **464**. 113–136.

Поступила в редакцию
10.06.2015

A Modification of the CABARET Scheme for Numerical Simulation of Multicomponent Gaseous Flows in Two-Dimensional Domains

A. V. Danilin¹, A. V. Solovjev², and A. M. Zaitsev³

¹ Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Junior Scientist, e-mail: danilin.physics@gmail.com

² Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

³ Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Junior Scientist, e-mail: azai@ibrae.ac.ru

Received June 10, 2015

Abstract: An explicit numerical algorithm for calculation of two-dimensional motion of multicomponent gas mixtures is proposed. A physical model as well as conservative and characteristic forms of governing equations are given. The discretization of the governing equations is made in accordance with the CABARET (Compact Accurately Boundary Adjusting-REsolution Technique) approach. The proposed algorithm is tested on problems of air shock waves passing through dense and dilute volume inhomogeneities with initial conditions adopted from numerical and experimental studies of other authors. A good agreement between the results of these studies and those obtained by the CABARET approach is shown.

Keywords: one-velocity multicomponent medium, systems of hyperbolic equations, CABARET scheme, computational fluid dynamics (CFD), conservative methods, finite volume methods, turbulent mixing.

References

1. R. Abgrall, "How to Prevent Pressure Oscillations in Multicomponent Flow Calculations: A Quasi Conservative Approach," *J. Comput. Phys.* **125** (1), 150–160 (1996).
2. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, "Some Characteristics of Finite Difference Scheme 'Cabaret'," *Mat. Model.* **10** (1), 101–116 (1998).
3. V. M. Goloviznin and S. A. Karabasov, "Nonlinear Correction of Cabaret Scheme," *Mat. Model.* **10** (12), 107–123 (1998).
4. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and I. M. Kobrinskii, "Balance-Characteristic Schemes with Separated Conservative and Flux Variables," *Mat. Model.* **15** (9), 29–48 (2003).
5. V. M. Goloviznin, "Balanced Characteristic Method for 1D Systems of Hyperbolic Conservation Laws in Eulerian Representation," *Mat. Model.* **18** (11), 14–30 (2006).
6. S. A. Karabasov and V. M. Goloviznin, "Compact Accurately Boundary-Adjusting High-Resolution Technique for Fluid Dynamics," *J. Comput. Phys.* **228** (19), 7426–7451 (2009).
7. V. G. Kondakov, *A Generalization of the 'Cabaret' Scheme to Multidimensional Equations of Gas Dynamics*, Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (Moscow State Univ., Moscow, 2014).
8. J. J. Quirk and S. Karni, "On the Dynamics of a Shock–Bubble Interaction," *J. Fluid Mech.* **318**, 129–163 (1996).
9. J. W. Jacobs, "The Dynamics of Shock Accelerated Light and Heavy Gas Cylinders," *Phys. Fluids A* **5** (9), 2239–2247 (1993).
10. R. S. Lagumbay, *Modeling and Simulation of Multiphase/Multicomponent Flows*, PhD Thesis (University of Colorado, Boulder, 2006).
11. K. R. Bates, N. Nikiforakis, and D. Holder, "Richtmyer–Meshkov Instability Induced by the Interaction of a Shock Wave with a Rectangular Block of SF₆," *Phys. Fluids* **19** (2007). doi 10.1063/1.2565486
12. J.-F. Haas and B. Sturtevant, "Interaction of Weak Shock Waves with Cylindrical and Spherical Gas Inhomogeneities," *J. Fluid Mech.* **181**, 41–76 (1987).
13. D. A. Holder, A. V. Smith, C. J. Barton, and D. L. Youngs, "Shock-Tube Experiments on Richtmyer–Meshkov Instability Growth Using an Enlarged Double-Bump Perturbation," *Laser Part. Beams* **21** (3), 411–418 (2003).
14. A. V. Danilin and A. V. Solovjev, "A Modification of the CABARET Scheme for the Computation of Multicomponent Gaseous Flows," *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 18–25 (2015).
15. M. Latini, O. Schilling, W. S. Don, "Effects of WENO Flux Reconstruction Order and Spatial Resolution on Reshocked Two-Dimensional Richtmyer–Meshkov Instability," *J. Comput. Phys.* **221** (2), 805–836 (2007).
16. R. L. Holmes, J. W. Grove, and D. H. Sharp, "Numerical Investigation of Richtmyer–Meshkov Instability Using Front Tracking," *J. Fluid Mech.* **301**, 51–64 (1995).
17. R. H. Cohen, W. P. Dannevik, A. M. Dimits, et al., "Three-Dimensional Simulation of a Richtmyer–Meshkov Instability with a Two-Scale Initial Perturbation," *Phys. Fluids* **14**, 3692–3709 (2002).
18. B. D. Collins and J. W. Jacobs, "PLIF Flow Visualization and Measurements of the Richtmyer–Meshkov Instability of an Air/SF₆ Interface," *J. Fluid Mech.* **464**, 113–136 (2002).