

УДК 519.64+534.6

doi 10.26089/NumMet.v16r340

## О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА МЕТОДОМ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. Г. Даева<sup>1</sup>, А. В. Сетуха<sup>2</sup>

Предложена численная схема решения граничного гиперсингулярного интегрального уравнения, возникающего в краевой задаче Неймана для уравнения Гельмгольца. Схема основана на выделении в явном виде главной особенности в ядре. При дискретизации граничного интегрального уравнения возникает система линейных уравнений, коэффициенты которой представляются в виде суммы сильно сингулярных и слабо сингулярных интегралов. Указанные сильно сингулярные интегралы понимаются в смысле конечного значения по Адамару и вычисляются аналитически в случае, когда поверхность аппроксимируется ячейками таким образом, что края всех ячеек имеют вид пространственных многоугольников (не обязательно плоских). Для слабосингулярных интегралов предложены квадратурные формулы типа прямоугольников со сглаживанием особенности. Построенная численная схема протестирована на следующих модельных примерах: при решении гиперсингулярного уравнения на сфере (осуществлялось сравнение численных решений с аналитическими решениями интегрального уравнения, получаемыми из спектральных соотношений); при решении задач дифракции акустической волны на жестких сфере и диске (осуществлялось сравнение характеристик акустического поля в дальней зоне, полученных на основе численного решения задачи, с известными теоретическими и численными данными).

**Ключевые слова:** граничные интегральные уравнения, гиперсингулярные интегралы, метод дискретных особенностей, уравнение Гельмгольца, дифракция акустической волны.

**Введение.** Математическое моделирование дифракции волн на телах сложной формы является актуальной задачей, для решения которой существуют различные подходы. Когда длина волны много меньше характерных размеров отражающих объектов, хорошо работают методы физической оптики и асимптотические методы [1–3]. Однако в том случае, когда длина волны сопоставима с размерами объектов, необходимо ставить и численно решать внешние краевые задачи для волновых полей в пространственных областях вне тел. Так, при моделировании дифракции акустической волны на жестком теле возникает краевая задача Неймана для уравнения Гельмгольца, которая является предметом рассмотрения настоящей статьи.

В краевых задачах дифракции акустических и электромагнитных волн широкое применение находят сеточные и конечно-элементные методы. Такие методы позволяют учесть сложную, в том числе неоднородную, структуру окружающей среды, а также многие физические эффекты [4–6]. Существенную проблему здесь представляет то обстоятельство, что для выполнения граничных условий на бесконечности приходится решать задачу в расчетной области, многократно превышающей размеры тел. Это приводит к очень большой вычислительной сложности таких методов, которая к тому же резко возрастает при уменьшении длины волны, поскольку размеры ячеек должны быть существенно меньше длины волны. Для решения этой проблемы при использовании сеточных методов в последнее время развиваются специальные подходы, например основанные на асимптотическом учете граничных условий [7].

В случае моделирования монохроматических волновых процессов в однородных (кусочно-однородных) средах высокоэффективным является подход, основанный на методе граничных интегральных уравнений. Здесь решение краевой задачи ищется на основе интегрального представления с интегралами по границе области решения задачи (по поверхностям тел). Задача сводится к интегральным уравнениям, записанным на этой границе. При этом граничные условия на бесконечности выполняются автоматически, а получаемые решения точно удовлетворяют уравнениям в области решения задачи. При численном

<sup>1</sup> АО “Концерн Вега”, Кутузовский просп., 34, 121170, Москва; науч. сотр., e-mail: daeva.sg@yandex.ru

<sup>2</sup> Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: setuhaav@rambler.ru

решении задачи расчетная сетка строится только на поверхностях тел, что существенно снижает вычислительную сложность метода.

Традиционно задачи дифракции сводятся к граничным интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода [8]. Однако используемые при этом интегральные представления поля не применимы к задачам дифракции волн на тонких экранах, в которых необходимо выполнение граничного условия на обеих сторонах поверхности.

Во многих задачах естественным является применение граничных интегральных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами, которые позволяют единообразно описывать дифракционные задачи как на телесных объектах, так и на тонких экранах. В последнее время при решении задач дифракции акустических и электромагнитных волн применяются методы, основанные на решении сильно сингулярных интегральных уравнений. Известны подходы, основанные на рассмотрении таких уравнений как псевдодифференциальных с применением для их решения проекционных методов [9–15], а также специальных квадратурных формул и алгоритмов сглаживания особенности [16–20].

Авторы применяют в данной работе другой подход, основанный на рассмотрении интегралов с сильными особенностями в смысле конечного значения по Адамару и на решении интегральных уравнений с такими интегралами методами кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций. Достоинствами используемого подхода являются простота реализации и применимость на поверхностях и системах поверхностей произвольной сложной формы. Применительно к краевой задаче Неймана для уравнения Гельмгольца методы такого типа были предложены Лифановым [21] и развиты в дальнейшем в работах [22–25] применительно к задачам внешней акустики. При дискретизации возникали системы линейных уравнений с коэффициентами, выражающимися через интегралы с сильными особенностями по ячейкам разбиения поверхности. При этом указанные интегралы сводились к контурным интегралам и слабосингулярным поверхностным интегралам, вычисляемым численно на основе параметризации поверхности и в предположении, что поверхность аппроксимируется плоскими ячейками.

В настоящей статье предлагается численная схема решения граничного гиперсингулярного интегрального уравнения, возникающего в краевой задаче Неймана для уравнения Гельмгольца. Схема основана на выделении в явном виде главной особенности в ядре. При этом при дискретизации граничного интегрального уравнения возникает система линейных уравнений, коэффициенты которой представляются в виде суммы сильно сингулярных и слабо сингулярных интегралов. Указанные сильно сингулярные интегралы сводятся к контурным интегралам по краям ячеек и вычисляются аналитически в случае, когда поверхность аппроксимируется ячейками таким образом, что края всех ячеек имеют вид пространственных многоугольников (не обязательно плоских). Для слабо сингулярных интегралов предложены квадратурные формулы типа прямоугольников со сглаживанием особенности. Отметим, что когда решается краевая задача на плоском экране, возникает численная схема, для которой применим результат о равномерной сходимости численного решения граничного интегрального уравнения к точному на сетке, полученный в работе авторов [26].

Предложенная численная схема протестирована на следующих модельных примерах: при решении гиперсингулярного уравнения на сфере (осуществлялось сравнение численных решений с аналитическими решениями интегрального уравнения, получаемыми из спектральных соотношений); при решении задач дифракции акустической волны на жестких сфере и диске (осуществлялось сравнение характеристик акустического поля в дальней зоне, полученных на основе численного решения задачи, с известными теоретическими и численными данными, основанными на решениях, полученных в рамках осесимметричной постановки задачи).

**1. Постановка задачи.** Рассматривается внешняя краевая задача Неймана для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в области } \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \quad \text{на границе } \Sigma. \quad (2)$$

Здесь  $\Omega$  — некоторая область в трехмерном пространстве  $R^3$ , являющаяся внешней по отношению к своей границе  $\Sigma = \partial\Omega$ .

Будем считать, что граница области  $\Omega$  суть суммарная поверхность, которая представляет собой систему простых ориентируемых поверхностей (компонент). Каждая такая компонента может быть замкнутой (при этом  $\Omega$  является внешней областью по отношению к такой поверхности) либо ограниченной разомкнутой поверхностью с краем (в этом случае область  $\Omega$  имеет разрез по этой поверхности). Граничное условие (2) ставится в случае замкнутой поверхности на внешней стороне этой поверхности, а в

случае разомкнутой поверхности — на обеих сторонах этой поверхности (функция  $f$  полагается одинаковой на обеих сторонах поверхности);  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная в направлении вектора нормали  $\vec{n}$  к суммарной поверхности  $\Sigma$ . Предполагаем, что  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали, которая является внешней на замкнутых компонентах. На разомкнутых компонентах поверхности  $\Sigma$  вектор  $\vec{n}$  выбирается на одной из сторон поверхности. Ищется решение данной задачи — функция  $u(x)$  с комплексными значениями, определенная в области  $\Omega$ , такая, что она сама и ее градиент имеют краевые значения на поверхности  $\Sigma$  со стороны области  $\Omega$  во всех точках гладкости (за исключением краев разомкнутых компонент поверхности  $\Sigma$ ).

Ищется решение данной задачи, удовлетворяющее условию локальной интегрируемости градиента функции  $u$ :

$$|\text{grad } u|^2 \in L_1^{\text{loc}}(\Omega) \tag{3}$$

и условиям на бесконечности:

$$u(x) \rightarrow 0, \quad \frac{1}{|x|} (x, \text{grad } u(x)) + iku(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \tag{4}$$

Здесь и далее  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение,  $o(\cdot)$  — величина более высокого порядка малости.

Такая задача, например, возникает при моделировании дифракции монохроматической акустической волны на жестком теле, экране или системе жестких тел и экранов.

Пусть  $\tilde{u}_{\text{full}}(x, t) = u_{\text{full}}(x)e^{i\omega t}$  — полное поле звукового давления. Полагается, что это поле вызвано первичным полем (падающей волной)

$$\tilde{u}_0(x, t) = u_0(x)e^{i\omega t}, \tag{5}$$

где  $t$  — время. Тогда полное поле ищется в виде

$$\tilde{u}_{\text{full}} = \tilde{u}_0 + \tilde{u}, \tag{6}$$

где  $\tilde{u}(x, t) = u(x)e^{i\omega t}$  — неизвестное вторичное поле. Для полного поля ставится граничное условие  $\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial n} = 0$  на поверхности отражающих объектов  $\Sigma$ , компоненты которой суть замкнутые поверхности, ограничивающие твердые тела, или разомкнутые поверхности с краем, моделирующие экраны. Тогда для пространственной составляющей вторичного поля  $u(x)$  возникает краевая задача Неймана (1)–(4) с правой частью

$$f = -\frac{\partial u_0}{\partial n} \tag{7}$$

и с волновым числом  $k = \omega/c$ , где  $c$  — скорость звука в среде [8].

При этом условие (4) выражает условие излучения на бесконечности (условие Зоммерфельда), а условие (3) — это условие конечности энергии поля (условие Майкснера) [8].

**2. Сведение задачи к интегральному уравнению.** Будем искать решение задачи (1)–(4) в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = \int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y, \tag{8}$$

где  $F(x-y)$  — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, соответствующее условию (4) на бесконечности:

$$F(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad r = |x-y|.$$

Напомним [8], что если плотность потенциала двойного слоя суть достаточно гладкая функция (поверхностный градиент  $\text{Grad } g$  функции  $g$  удовлетворяет условию Гельдера на поверхности  $\Sigma$ ), то для ее градиента справедливо выражение

$$\text{grad } u(x) = k^2 \int_{\Sigma} g(y) F(x-y) \vec{n}(y) d\sigma_y - \int_{\Sigma} \text{grad}_x F(x-y) \times [\text{Grad } g(y) \times \vec{n}(y)] d\sigma_y. \tag{9}$$

При этом сам потенциал (функция  $u$ , определяемая выражением (8)) и ее градиент имеют краевые значения в точках гладкости поверхности  $\Sigma$  и справедливы формулы

$$u^{\pm} = u \pm \frac{1}{2} g, \quad (\text{grad } u)^{\pm} = \text{grad } u \pm \frac{1}{2} \text{Grad } g,$$

где  $u$  и  $\text{grad } u$  — значения функции  $u$  и ее градиента, получаемые из выражений (8) и (9) соответственно при  $x \in \Sigma$  (при этом второй интеграл в выражении (9) понимается в смысле главного значения по Коши).

Подставив выражение для функции  $u(x)$  в граничное условие (2), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y = f(x).$$

Частную производную  $\frac{\partial}{\partial n_x}$  можно внести под знак интеграла, если интеграл понимать в смысле конечного значения по Адамару [27]:

$$\int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} F(x-y) d\sigma_y = f(x). \quad (10)$$

В работах [21, 23] описан подход к численному решению интегрального уравнения (10), основанный на кусочно-постоянной аппроксимации неизвестной функции и методе коллокаций. При дискретизации данного уравнения возникает система линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой выражаются через интегралы с сильной особенностью по ячейкам разбиения. Эти интегралы преобразовывались интегрированием по частям к сумме контурного и поверхностного интегралов, понимаемых в обычном смысле (не сингулярных), и эти интегралы предлагалось вычислять численно.

В данной работе предлагается численная схема решения уравнения (10), основанная на выделении в явном виде главной особенности.

Для построения численной схемы решения уравнения (10) преобразуем его к виду

$$\int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} F_0(x-y) d\sigma_y + \int_{\Sigma} g(y) K_1(x,y) d\sigma_y = f(x), \quad (11)$$

где

$$F_0(x-y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad K_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta F(x-y), \quad \Delta F(x-y) = F(x-y) - F_0(x-y), \quad (12)$$

причем в формулах (12) функции  $F_0(x-y)$ ,  $F(x-y)$  и  $\Delta F(x-y)$  рассматриваются при всех  $x, y \in R^3$ ,  $x \neq y$ , а ядро  $K_1(x,y)$  — при  $x, y \in \Sigma$ ,  $x \neq y$ . При этом справедливо выражение

$$K_1(x,y) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{k^2 e^{-ikr}}{r^3} - \frac{3ike^{-ikr}}{r^4} - \frac{3e^{-ikr} - 3}{r^5} \right] [(x-y)\vec{n}_x] [(x-y)\vec{n}_y] + \\ + \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{e^{-ikr} + ikre^{-ikr} - 1}{r^3} \right] \vec{n}_x \vec{n}_y, \quad x, y \in \Sigma, \quad x \neq y, \quad r = |x-y|$$

и  $|K_1(x,y)| \leq O\left(\frac{1}{r}\right)$  при  $r = |x-y| \rightarrow 0$ , так как

$$(x-y)\vec{n}_x \leq O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (x-y)\vec{n}_y \leq O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad |e^{-ikr} + ikre^{-ikr} - 1| \leq O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$O\left(\frac{1}{r^\alpha}\right)$  — величина того же порядка, что и  $\frac{1}{r^\alpha}$  при  $r \rightarrow 0$ . Поэтому второй интеграл в уравнении (11) есть несобственный абсолютно сходящийся интеграл.

Такое интегральное уравнение для случая, когда поверхность  $\Sigma$  есть плоский экран, было рассмотрено в [26]. В этой статье было показано, что в указанном случае интегральное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{g(y)}{|x-y|^3} d\sigma_y + \int_{\Sigma} g(y) K_1(x,y) d\sigma_y = f(x), \quad x \in \Sigma,$$

где ядро  $K_1(x,y)$  представляется в виде  $K_1(x,y) = \frac{K^*(x,y)}{|x-y|}$ , где функция  $K^*(x,y)$  непрерывна по Гельдеру как функция двух аргументов на поверхности  $\Sigma$ . В указанной статье была исследована разрешимость

такого уравнения (доказана применимость к нему альтернативы Фредгольма), доказана равномерная сходимость на сетке численных решений, получаемых на основании методов кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокации, к точному решению в случае однозначной разрешимости интегрального уравнения.

Ниже мы распространяем указанную численную схему на случай системы замкнутых и разомкнутых поверхностей и применяем ее к численному решению краевой задачи (1)–(4). При этом при дискретизации интеграла с главной особенностью в левой части уравнения (11) возникает квадратурная формула, коэффициенты которой вычисляются аналитически.

**3. Численная схема.** Для нахождения приближенного решения интегрального уравнения (11) будем аппроксимировать поверхность  $\Sigma$  системой ячеек  $\sigma_i, i \in 1, \dots, n$ , так, что  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i$  и множество  $\sigma_i \cap \sigma_j$  при  $i \neq j$  имеет нулевую площадь. Приближенное решение уравнения ищем в виде кусочно-постоянной функции  $\tilde{g}(x)$ , принимающей постоянное значение  $g_i$  на каждой ячейке разбиения  $\sigma_i$  (почти всюду). На каждой ячейке  $\sigma_i, i \in 1, \dots, n$ , выбираем точку коллокации  $x_i \in \sigma_i$  и вектор нормали к поверхности ячейки  $\vec{n}_i$ . Пусть  $s_j$  — площадь ячейки  $\sigma_j$ . Ниже для аппроксимации гиперсингулярного интегрального оператора в уравнении (11) будем использовать квадратурные формулы типа метода прямоугольников. Такие методы нашли успешное применение при решении краевых задач аэродинамики панельными (вихревыми) методами [21]. Как указано в [21], при этом целесообразно осуществлять деление поверхности  $\Sigma$  на части, для каждой из которых осуществляется регулярное разбиение на ячейки, контуры которых суть пространственные четырехугольники. Точку коллокации  $x_i$  следует выбирать как центр тяжести вершин ячейки  $\sigma_i$ , а вектор нормали  $\vec{n}_i$  — как вектор, ортогональный плоскости, проведенной через середины сторон ячейки (точки, являющиеся серединами сторон ячейки, образуют параллелограмм). Площадь ячейки  $s_j$  определяется как модуль векторного произведения векторов, соединяющих середины противоположных сторон (рис. 1).

При таком подходе может появиться необходимость использования и треугольных ячеек, которые следует рассматривать как четырехугольник с двумя совпавшими вершинами.

Приближенное решение краевой задачи (1)–(4) будем искать в виде

$$u'(x) = \sum_{j=1}^n g_j u_j(x), \text{ где } u_j(x) = \int_{\sigma_j} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y.$$

Записав выражения для производной функции  $u'(x)$  в точках  $x_i, i \in 1, \dots, n$ , по направлению векторов  $\vec{n}_i$  и приравнявая полученные выражения значениям правой части  $f(x)$  рассматриваемой краевой задачи в указанных точках, получим систему линейных алгебраических уравнений, которая аппроксимирует интегральное уравнение (10):

$$\sum_{j=1}^n g_j a_{ij} = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{13}$$

где  $a_{ij} = (\text{grad } u_j(x_i), \vec{n}_i)$  и  $f_i = f_i(x_i)$ . Здесь следует заметить, что при аппроксимации поверхности четырехугольными ячейками построенные точки коллокации  $x_i, i \in 1, \dots, n$ , вообще говоря, не обязаны лежать точно на самой поверхности. В общем случае можно считать, что  $f_i = f_i(\tilde{x}_i)$ , где точка  $\tilde{x}_i \in \Sigma$  выбирается близкой к точке  $x_i$ . Однако при решении интегрального уравнения, возникающего из краевой задачи Гельмгольца (1)–(4) с правой частью (7), будем использовать формулу  $f_i = -(\vec{n}_i, \text{grad } u_0)$ , где градиент вычисляется в точке  $x_i$ .

Представим функции  $u_j(x)$  в виде

$$u_j(x) = u_j^0(x) + \tilde{u}_j(x), \quad u_j^0(x) = \int_{\sigma_j} \frac{\partial F_0(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y, \quad \tilde{u}_j(x) = \int_{\sigma_j} \frac{\partial \Delta F(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y.$$

Теперь выражение для коэффициентов системы уравнений (13) можем переписать в виде

$$a_{ij} = a_{ij}^0 + \tilde{a}_{ij}, \quad a_{ij}^0 = (\text{grad } u_j^0(x_i), \vec{n}_i), \quad \tilde{a}_{ij} = (\text{grad } \tilde{u}_j(x_i), \vec{n}_i).$$

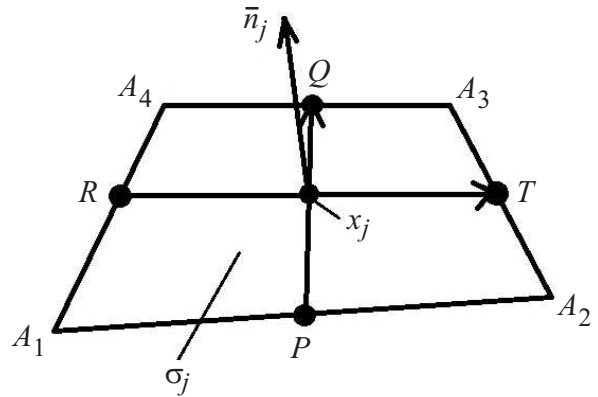


Рис. 1. Построение точки коллокации и орта нормали к ячейке

Градиент функции  $u_j^0(x)$  представляется в виде интеграла по контуру  $\partial\sigma_j$ , являющемуся краем ячейки  $\sigma_j$ , с использованием закона Био–Савара:

$$\text{grad } u_j^0(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\sigma_j} \frac{\vec{\tau}(y) \times (x - y)}{|x - y|^3} ds_y, \tag{14}$$

где  $\vec{\tau}(y)$  — орт вектора касательной к контуру  $\partial\sigma_j$  в точке  $y \in \partial\sigma_j$ , направление обхода контура  $\partial\sigma_j$  выбирается так, что если при движении вдоль контура вектор нормали направлен вверх, то поверхность ячейки остается слева. Интеграл в выражении (14) вычисляется аналитически, если контур ячейки  $\sigma_j$  является ломаной линией [21].

Для коэффициентов  $\tilde{a}_{ij}$  в силу формул (12) справедливо выражение

$$\tilde{a}_{ij} = \int_{\sigma_j} K_1(x_i, y) d\sigma_y. \tag{15}$$

Для вычисления интеграла в формуле (15) будем разбивать ячейку  $\sigma_j$  на более мелкие ячейки  $\sigma_j^m$ ,  $m = 1, \dots, N_j$ , выберем в каждой ячейке  $\sigma_j^m$  узел  $y_j^m$  и будем вычислять коэффициенты  $\tilde{a}_{ij}$  приближенно по формуле

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{m=1}^{N_j} K_1(x_i, y_j^m) \cdot \theta_\varepsilon(|x_i - y_j^m|) s_j^m, \tag{16}$$

где  $\theta_\varepsilon(r) = 3(r/\varepsilon)^2 - 2(r/\varepsilon)^3$  — сглаживающая функция, выбранная так, что  $\theta_\varepsilon(r) \in C^1 [0, \infty)$ ,  $\theta_\varepsilon(r) = 1$  при  $r \geq \varepsilon$  и  $0 \leq \theta_\varepsilon(r) \leq C_0 r/\varepsilon$  при  $0 \leq r \leq \varepsilon$ ,  $C_0$  — константа, не зависящая от  $r$  и  $\varepsilon$ . Число  $\varepsilon$  есть малый параметр, который выбирался в виде  $\varepsilon = 2h'$ ,  $h'$  — максимальный из диаметров ячеек мелкого разбиения  $\sigma_j^m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $m = 1, \dots, N_j$ .

Доразбивка ячейки  $\sigma_j$  на ячейки  $\sigma_j^m$  происходит следующим образом: каждая из сторон ячейки  $\sigma_j$  разбивается на отрезки равной длины, причем противоположные стороны разбиваются на одинаковое количество отрезков (рис. 2). Пусть  $A_1, A_2, A_3, A_4$  — вершины рассматриваемой ячейки  $\sigma_j$ , точки  $P_i$  и  $Q_i$ ,  $i = 0, \dots, n_0$ , — концы отрезков разбиения сторон  $A_1A_2$  и  $A_4A_3$ , а точки  $R_i$  и  $T_i$ ,  $i = 0, \dots, m_0$ , — концы отрезков разбиения сторон  $A_2A_3$  и  $A_1A_4$  соответственно. При этом ячейка  $\sigma_j$  будет разбита на  $N_j = m_0 n_0$  более мелких ячеек. Выбирая на противоположных сторонах точки с одинаковым индексом  $P_i$  и  $Q_i$ , а также соседние с ними точки  $P_{i+1}$  и  $Q_{i+1}$ , строим отрезки  $P_iQ_i$  и  $P_{i+1}Q_{i+1}$ . Аналогично, выбирая точки  $R_k, T_k$  и  $R_{k+1}, T_{k+1}$  на другой паре противоположных сторон, строим отрезки  $R_kT_k$  и  $R_{k+1}T_{k+1}$ . При пересечении построенных пар отрезков возникают вершины четырехугольника  $D_{i,k}D_{i+1,k}D_{i+1,k+1}D_{i,k+1}$  одной из ячеек  $\sigma_j^m$  доразбиения ячейки  $\sigma_j$ ,  $m = 1, \dots, N_j$ . Здесь заметим, что хотя вершины ячейки  $\sigma_j$  могут не лежать в одной плоскости, указанные пары отрезков пересекаются. Например, пересечение отрезков  $P_iQ_i$  и  $R_kT_k$  следует из следующего рассуждения. Разместим в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$  точечные массы  $(1-p)(1-q)$ ,  $p(1-q)$ ,  $pq$  и  $(1-p)q$  соответственно, где  $p = \frac{|A_1P_i|}{|A_1A_2|} = \frac{|A_4Q_i|}{|A_4A_3|}$ ,  $q = \frac{|A_1R_k|}{|A_1A_4|} = \frac{|A_2T_k|}{|A_2A_3|}$ . Тогда центр масс такой системы точек, с одной стороны, лежит на отрезке  $P_iQ_i$ , а с другой стороны, на отрезке  $R_kT_k$ , т.е. этот центр масс и есть искомая точка  $D_{i,k}$ . Для каждой такой построенной ячейки  $\sigma_j^m$  построим узел  $x_j^m$ , вектор нормали  $n_j^m$  и определим ее площадь  $s_j^m$  тем же способом, что и для основных ячеек разбиения.

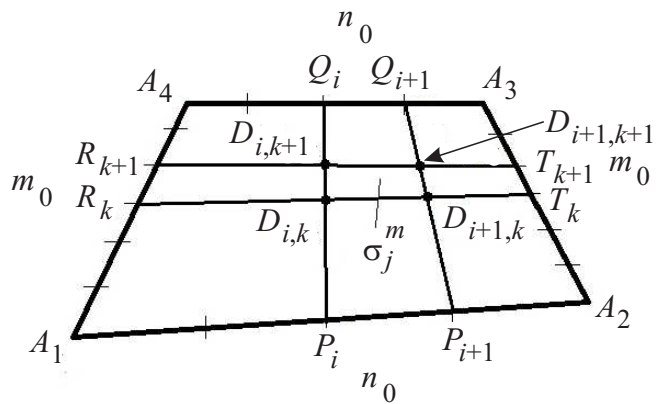


Рис. 2. Доразбиение ячеек

Отметим, что построенный алгоритм численного решения интегрального уравнения (10) требует для своей реализации (с точки зрения задания геометрии суммарной поверхности  $\Sigma$ ) знания только массива вершин ячеек разбиения  $\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**4. Численное решение интегрального уравнения на сфере.** В этом разделе приводятся результаты тестирования описанной численной схемы решения гиперсингулярного интегрального уравнения (10) на поверхности сферы на основе спектральных соотношений для интегрального оператора в левой части

этого уравнения. Пусть  $\Sigma$  — поверхность сферы радиуса  $a = 1$  с центром в начале координат. Известно [21], что собственными функциями указанного интегрального оператора являются функции  $g$  вида

$$g(x) = Y_n^m(\varphi, \Theta) = P_n^m(\cos \Theta) \cos(m\varphi), \quad P_n^m(\cos \Theta) = (1 - \cos^2 \Theta)^{m/2} \frac{d^m}{d(\cos \Theta)^m} P_n(\cos \Theta),$$

где  $P_n$  — полиномы Лежандра,  $x = x(\varphi, \theta) \in \Sigma$ ,  $\varphi$  и  $\Theta$  — сферические координаты точки  $x = (x_1, x_2, x_3)$ :  $x_1 = R \cos \Theta \cos \varphi$ ,  $x_2 = R \cos \Theta \sin \varphi$ ,  $x_3 = R \sin \Theta$ . При этом функция  $g = C_n^{-1} Y_n^m$  является решением уравнения (10) для правой части

$$f = Y_n^m(\varphi, \Theta), \tag{17}$$

где  $C_n$  — собственные значения, выражающиеся через специальные функции в виде

$$C_n = \frac{1}{k} \left[ \frac{\xi_n^{(2)}(k)}{\xi_n^{(2)}(k)'} - \frac{\eta_n(k)}{\eta_n(k)'} \right], \quad \xi_n^{(2)}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}} H_{n+1/2}(k), \quad \eta_n(k) = \frac{1}{\sqrt{k}} J_{n+1/2}(k),$$

где  $H_{n+1/2}(k)$  — функция Ханкеля второго рода и  $J_{n+1/2}$  — функция Бесселя.

Были получены численные решения уравнения (10) для правых частей вида (17) при различных значениях параметра  $k$  в уравнении (10) (волнового числа) и различных значениях параметров  $n$  и  $m$ . Для решения бралось разбиение сферы на 1500 ячеек (рис. 3), получаемое при равномерном разбиении по сферическим координатам (30 ячеек по координате  $\theta$ , 50 ячеек по координате  $\varphi$ ). Полученные численные решения сравнивались на сетке с узлами в центрах ячеек разбиения с соответствующими значениями функции  $g = C_n^{-1} Y_n^m$ , являющейся точным решением данного уравнения для правой части (17).

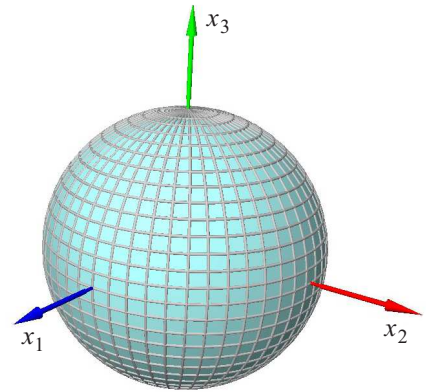


Рис. 3. Разбиение поверхности сферы

На рис. 4 и 5 приведены цветные диаграммы распределения модуля неизвестной функции  $g = C_n^{-1} Y_n^m$  по поверхности сферы, полученные при численном решении уравнения (10) для правой части (17) в сравнении с аналогичными диаграммами для точного решения для случаев  $k = 2, m = n = 3$  и  $k = 5, m = n = 5$ .

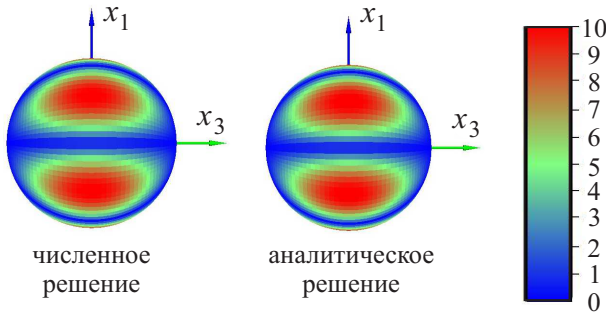


Рис. 4. Распределение модуля плотности потенциала двойного слоя  $g$  по поверхности сферы. Случай  $n = m = 3, k = 2$

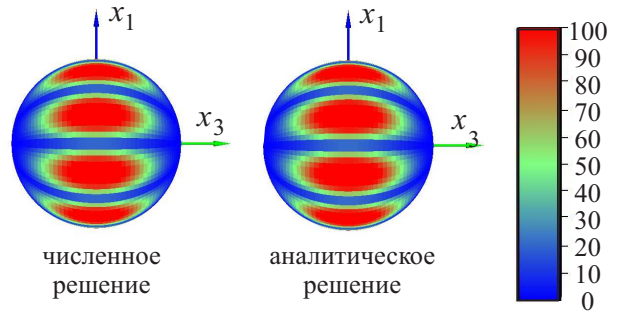


Рис. 5. Распределение модуля плотности потенциала двойного слоя  $g$  по поверхности сферы. Случай  $n = m = 5, k = 10$

В табл. 1 приведены собственные значения, соответствующие исследованным сочетаниям параметров  $k$  и  $n$  (при этом во всех случаях параметр  $m$  выбирался как  $m = n$ ), а в табл. 2 и 3 — значения средней ( $\bar{\varepsilon}$ ) и максимальной ( $\varepsilon_{\max}$ ) погрешностей численного решения интегрального уравнения, полученных для правых частей вида (17). Указанные погрешности определялись по формулам

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{j=1}^n |g_{\text{теор},j} - g_{\text{числ},j}| s_j}{\sum_{j=1}^n |g_{\text{теор},j}| s_j}, \quad \varepsilon_{\max} = \frac{\max_{j=1, \dots, n} |g_{\text{теор},j} - g_{\text{числ},j}|}{\frac{1}{S} \sum_{j=1}^n |g_{\text{теор},j}| s_j}, \quad S = \sum_{j=1}^n s_j.$$

Таблица 1

Собственные значения

$n$	$k = 0.1$	$k = 1$	$k = 10$
1	$-1.5045 + 0.0002 * i$	$-1.8594 + 0.2000 * i$	$0.1017 + 0.0999 * i$
2	$-0.8340$	$-0.9212 + 0.0112 * i$	$-0.1523 + 0.1019 * i$
3	$-0.5836$	$-0.6106 + 0.0002 * i$	$0.0302 + 0.1051 * i$
4	$-0.4501$	$-0.4619$	$0.7803 + 0.1098 * i$
5	$-0.3667$	$-0.3730$	$-0.0934 + 0.1165 * i$

Таблица 2

Средняя погрешность

$n$	$k = 0.1$	$k = 1$	$k = 10$
1	0.0056	0.0014	0.050
2	0.0036	0.0074	0.063
3	0.0021	0.0045	0.016
4	0.0019	0.0022	0.54
5	0.0027	0.0019	0.036

Таблица 3

Максимальная погрешность

$n$	$k = 0.1$	$k = 1$	$k = 10$
1	0.035	0.035	0.099
2	0.0084	0.013	0.14
3	0.0062	0.0090	0.047
4	0.0050	0.0063	1.59
5	0.011	0.0059	0.12

Здесь  $g_{\text{теор},j}$  и  $g_{\text{числ},j}$  — значения точного (теоретического) и приближенного (численного) решений, соответствующие узлу разбиения на ячейке  $\sigma_j$ .

Видно, что при  $k = 0.1$  и  $k = 1$  средняя и максимальная относительные погрешности решения интегрального уравнения составляют доли процента. При значении  $k = 10$  погрешности значительно выше. В данной задаче можно ввести аналог длины волны  $\lambda = 2\pi/k$  (указанное значение  $\lambda$  есть длина акустической волны для задачи (1)–(4), которая соответствует уравнению (10)). При значении волнового числа  $k = 10$  диаметр разбиения всего примерно в 5 раз меньше длины волны, что, по-видимому, недостаточно.

**5. Задача дифракции акустической волны на жестких диске и сфере.** Для тестирования построенного численного метода решения краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца (1)–(4) были получены решения такой задачи, возникающие при моделировании дифракции плоской монохроматической акустической волны на жестком круговом диске и на жесткой сфере. При этом искалось полное поле акустического давления вида (6), где первичное поле имеет вид (5) с пространственной составляющей

$$u_0(x) = e^{-i\vec{k}\vec{r}}, \quad (18)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор  $x$ ,  $\vec{k}$  — заданный волновой вектор, такой, что  $k = k$ . Для вторичного поля возникает краевая задача (1)–(4), в которой  $\Sigma$  есть поверхность облучаемого тела, с правой частью (7).

В задачах дифракции акустических волн представляют интерес характеристики отраженного поля в дальней зоне. Одной из таких характеристик является зависимость эффективной площади рассеяния отражающего тела от направления. Эффективная площадь рассеяния в направлении единичного вектора  $\vec{\tau}$  вводится по формуле

$$\vartheta(\vec{\tau}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi R^2 u^2(x)}{u_0^2(x)} \quad \text{при } x = R\vec{\tau}. \quad (19)$$

Найдем выражение для величины  $\vartheta(\vec{\tau})$  в случае, когда вторичное поле  $u(x)$  представляется в виде потенциала двойного слоя (8). Для ядра интегрального представления (8) справедливо выражение

$$\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} = \frac{1}{4\pi} \left( ik \frac{e^{-ikr}}{r^2} + \frac{e^{-ikr}}{r^3} \right) (x-y, \vec{n}_y). \quad (20)$$

Подставив в выражение (19) функцию  $u(x)$  в виде (8) и используя формулу (20), имеем

$$\vartheta(\vec{\tau}) = \frac{R^2}{u_0^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Sigma} g(y) \left( ik \frac{e^{-ikr}}{r^2} + \frac{e^{-ikr}}{r^3} \right) (x-y, \vec{n}_y) d\sigma_y \right]^2 \quad \text{при } r = |x-y|, \quad x = R \cdot \vec{\tau}.$$



Заметим, что  $x - y = R\vec{\tau} - y$ ; кроме того, следующие пределы существуют равномерно по  $y \in \Sigma$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{r}{R} = 1, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(x - y)\vec{n}_y}{R} = (\vec{\tau}, \vec{n}_y), \quad \lim_{R \rightarrow \infty} (r - R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(x - y)^2 - x^2}{|x - y| + |x|} = -(\vec{\tau}, y).$$

Тогда 
$$\vartheta(\vec{\tau}) = \frac{1}{u_0^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Sigma} g(y) \frac{R^2}{r^2} \left[ -ike^{-ikR} e^{ik(R-r)} (\vec{\tau}, \vec{n}_y) \right] d\sigma_y \right|^2.$$

Следовательно, 
$$\vartheta(\vec{\tau}) = \frac{k^2}{u_0^2} \left| \int_{\Sigma} g(y) \left[ e^{(y, \vec{\tau})ik} (\vec{n}_y, \vec{\tau}) \right] d\sigma_y \right|^2.$$

В вычислительном эксперименте данная величина вычислялась приближенно интегрированием по формуле прямоугольников на основании значений функции  $g$  в точках коллокации, найденных из (13):

$$\vartheta(\vec{\tau}) = \frac{k^2}{u_0^2} \left| \sum_{j=1}^n g_j e^{(x_j, \vec{\tau})ik} (\vec{n}_j, \vec{\tau}) s_j \right|^2, \quad s_j - \text{площадь ячейки } \sigma_j.$$

В задаче о дифракции акустической волны на жестком круговом диске рассмотрен случай, когда первичная плоская волна падает вдоль оси диска (вектор  $\vec{k}$  в формуле (18) сонаправлен с осью диска, рис. 6). Радиус диска полагался равным 1.

На примере этой задачи было исследовано влияние размера ячеек разбиения на получаемые диаграммы рассеяния. Кроме того, было проведено сравнение результатов, получаемых при вычислении интеграла в формуле (15) для коэффициентов  $\tilde{a}_{ij}$  по формуле (16), с результатами, когда эти интегралы вычисляются по упрощенным формулам:

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} K_1(x_i, y_j) s_j, & i \neq j, \\ 0, & i, j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (21)$$

Использовалось разбиение диска на ячейки  $\sigma_j$ , равномерное по полярным координатам на диске, со значениями числа ячеек разбиения  $n = 100 = 5 \times 20$ ,  $n = 400 = 10 \times 40$  и  $n = 1600 = 20 \times 80$  (здесь первый множитель — число ячеек разбиения по радиусу, второй — по дуге окружности на диске, рис. 6). На рис. 7–9 приведены диаграммы направленности, полученные для значений волнового числа  $k = 3, 10, 20$  соответственно, в виде зависимостей

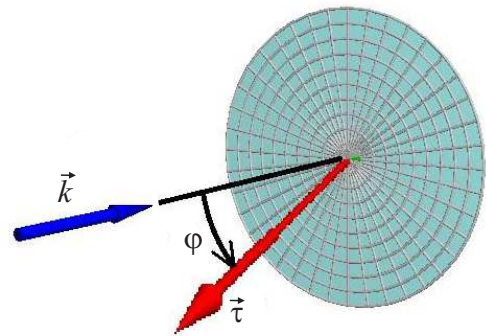


Рис. 6. Схема разбиения диска и построения диаграммы направленности

$$D(\varphi) = 10 \lg \frac{\vartheta(\vec{\tau})}{\vartheta(\vec{\tau}_0)}, \quad (22)$$

где  $\vec{\tau}$  — вектор, получаемый при повороте вектора  $-\vec{k}$ , противоположного вектору, задающему направление распространения падающей плоской волны, на угол  $\varphi$  в некоторой плоскости, проходящей через ось вращения диска;  $\vec{\tau}_0$  — единичный вектор, противоположно направленный вектору  $\vec{k}$ . На графиках слева приведены кривые, полученные при использовании для вычисления коэффициентов  $\tilde{a}_{ij}$  упрощенной формулы (21), а справа — формулы (16) с доразбивкой каждой ячейки разбиения  $\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , на  $N_j = 100$  ячеек ( $n_0 = m_0 = 10$ , см. рис. 2) и со сглаживаем особенностями в ядре. На каждом графике приведены кривые, соответствующие различным разбиениям диска на основные ячейки.

Видно, что при  $k = 3$  имеется практически полное совпадение результатов, полученных на различных сетках, даже при использовании упрощенной формулы (21). В то же время, при использовании упрощенной формулы (21) отличие значений величины  $D(\varphi)$  на кривой, соответствующей грубой сетке с  $n = 100$ , от значений на других кривых достигает в районах локальных максимумов 3 единиц для  $k = 10$ , 10 единиц для  $k = 20$ . При использовании более точной формулы (16) даже на грубой основной сетке с  $n = 100$  отличие от результатов, полученных на более мелких сетках, в районах локальных максимумов составляет десятые доли при  $k = 10$  и не превышает 1-2 единиц для  $k = 20$ .

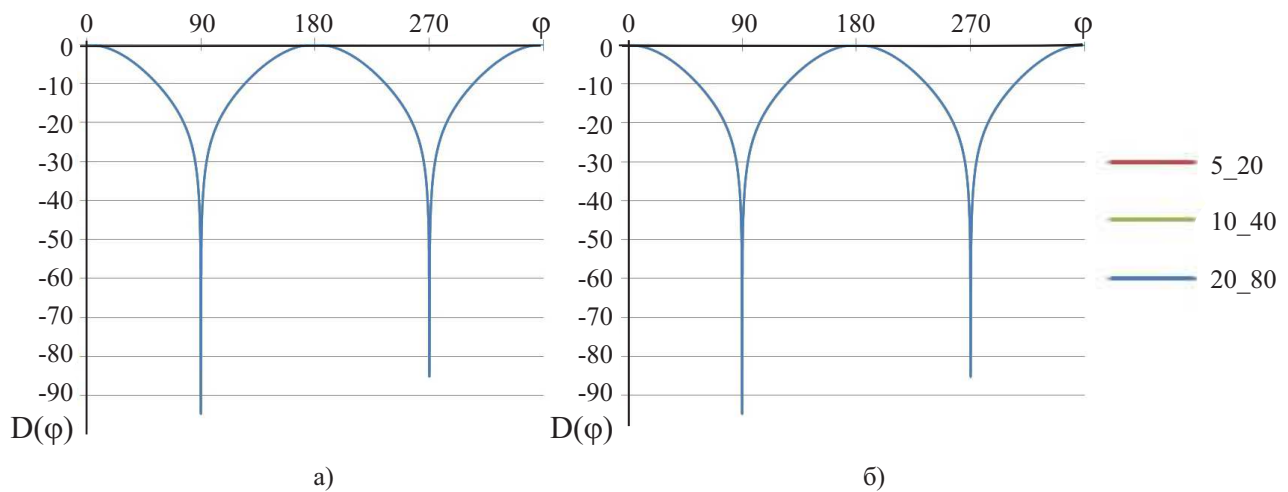


Рис. 7. Дифракция на диске. Диаграммы направленности для  $k = 3$ : а)  $N_j = 1$ , б)  $N_j = 100$

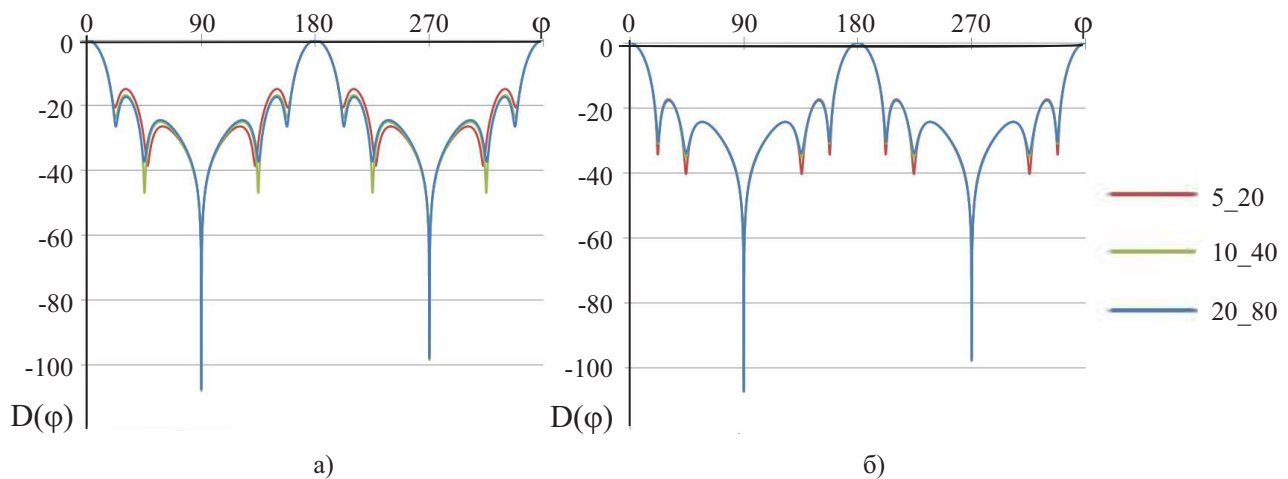


Рис. 8. Дифракция на диске. Диаграммы направленности для  $k = 10$ : а)  $N_j = 1$ , б)  $N_j = 100$

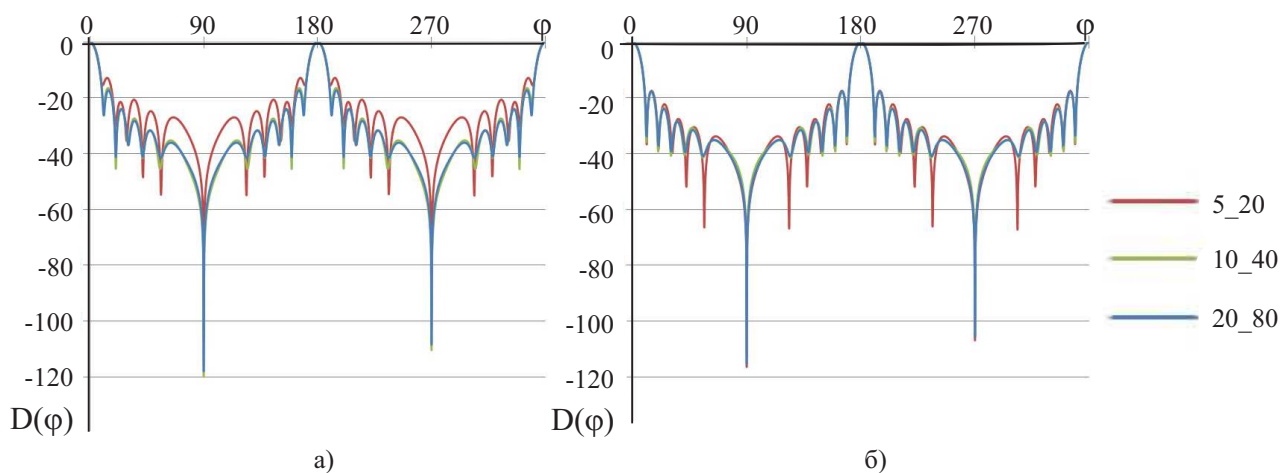


Рис. 9. Дифракция на диске. Диаграммы направленности для  $k = 20$ : а)  $N_j = 1$ , б)  $N_j = 100$

Приведенные результаты показывают, что точность расчетов при использовании неизменной сетки разбиения падает с увеличением волнового числа  $k$ , причем использование формул (16) для аппроксимации влияния слабосингулярной части ядра позволяет получать более точные результаты. Всюду далее приводятся результаты, полученные по схеме с использованием формулы (16).

На рис. 10 и 11 приведены результаты расчета характеристик поля в дальней зоне в сравнении с соот-

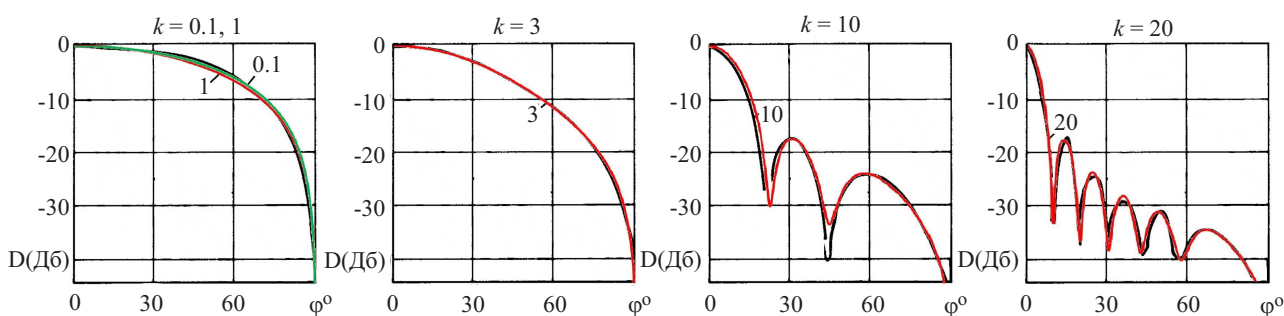


Рис. 10. Дифракция на диске. Диаграммы направленности для различных значений числа  $k$  (красные линии — расчет авторов, черные линии — расчет из [28])

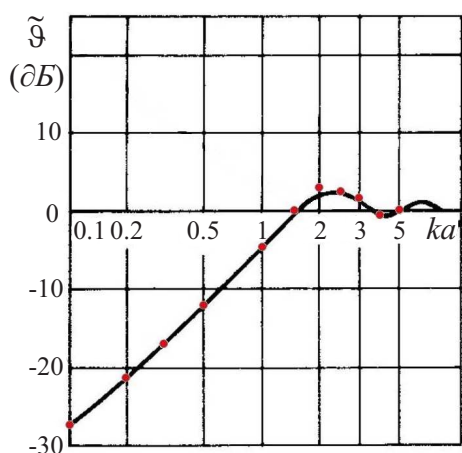


Рис. 11. Дифракция на диске. Зависимость интенсивности обратного рассеяния от числа  $k$  (красные точки — расчет авторов, черная линия — расчет из [28])

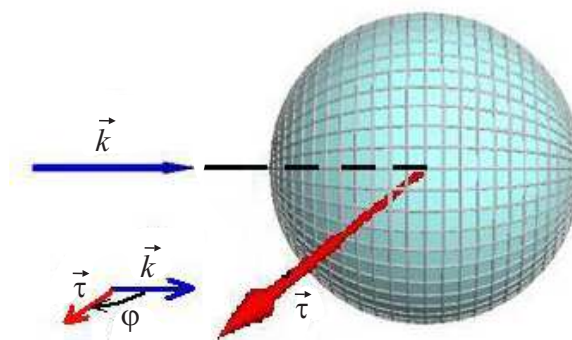


Рис. 12. Дифракция на сфере. Схема распространения падающей и отраженной волны

ветствующими численными характеристиками, взятыми из [28] (указанные результаты в монографии [28] получены на основе численного решения одномерного интегрального уравнения, возникающего при использовании свойства осесимметричности задачи). Использовалось разбиение на  $n = 1600 = 20 \times 80$  ячеек (при вычислении коэффициентов  $\tilde{a}_{ij}$  по формуле (16) осуществлялось дополнительное разбиение каждой ячейки на  $N_j = 100 = 10 \times 10$  более мелких ячеек). На рис. 10 приведены зависимости величины  $D(\varphi)$ , определяемой выражением (22), а на рис. 11 приведены зависимости интенсивности обратного рассеяния  $\tilde{\vartheta} = 10 \lg \left( \frac{\vartheta(\vec{\tau}_0)}{\pi a^2 k^2} \right)$  в децибелах (здесь  $\vec{\tau}_0$  — единичный вектор, противоположно направленный вектору  $\vec{k}$ ,  $a$  — радиус диска). Видно хорошее согласование результатов, полученных в рамках предлагаемой вычислительной модели, с известными результатами.

Кроме того, были получены решения краевой задачи (1)–(4), возникающей при моделировании дифракции плоской волны на жесткой сфере (рис. 12). Использовалось разбиение сферы на  $n = 1500$  ячеек (такое же, как и при решении интегрального уравнения на сфере в разделе 4). На рис. 13 приведены зависимости величины эффективной поверхности рассеяния сферы радиуса  $a$  (величины  $\vartheta$ , определяемой формулой (19)) от угла  $\varphi$  (см. рис. 12) для нескольких значений волнового числа  $k$ , определяемых равенствами  $ka = 0.1; 1; 3; 5$ . В данном случае угол  $\varphi$  выбирался так, что вектор  $\vec{\tau}$  получается поворотом вектора  $\vec{k}$  на угол  $\varphi$  в плоскости, проходящей через ось сферы, сонаправленную с вектором  $\vec{k}$ . На рис. 14 приведена зависимость от волнового числа  $k$  величины  $\sqrt{\vartheta/(\pi a^2)}$  для вектора  $\vec{\tau}_0$ , противоположно направленного вектору  $\vec{k}$ , характеризующая интенсивность обратного рассеяния. На рис. 13 и 14 зависимости, полученные в результате расчета по предложенной схеме, приведены в сравнении с соответствующими из-

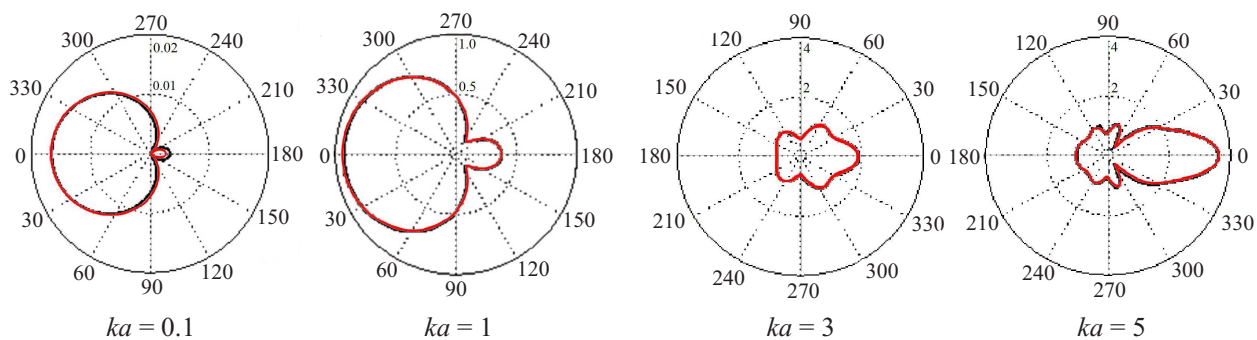


Рис. 13. Дифракция на сфере. Диаграмма направленности (красные линии — расчет авторов, черные линии — теоретическая зависимость из [29])

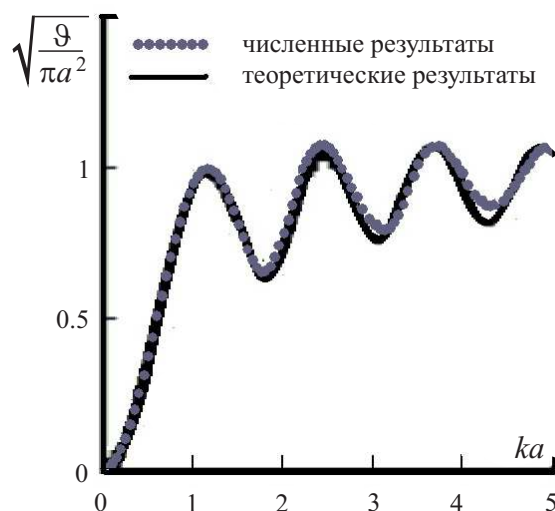


Рис. 14. Дифракция на сфере. Зависимость интенсивности обратного рассеяния от числа  $k = 3$  (серые точки — расчет авторов, черные линии — теоретическая зависимость из [29])

вестными теоретическими зависимостями, основанными на представлении решения краевой задачи в виде функциональных рядов [29]. Видно хорошее качественное (наличие максимумов и минимумов) и количественное совпадение представленных зависимостей во всем исследованном диапазоне значений волнового числа.

**Заключение.** Таким образом, в настоящей статье предложен вариант численной схемы решения краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца на основе сведения задачи к граничному интегральному уравнению с сильно сингулярными интегралами. Схема протестирована как на предмет точности получаемого решения интегрального уравнения, так и с точки зрения приложений к определению характеристик решения краевой задачи в дальней зоне на примере задач дифракции акустических волн. В тестовых примерах рассмотрены случаи как задачи вне замкнутой поверхности (сферы), так и задачи вне тонкого экрана (диска).

На примере решения интегрального уравнения на сфере отмечено, что предложенная численная схема обеспечивает хорошее совпадение с аналитическими решениями при разбиении поверхности тела с шагом  $h$ , удовлетворяющим условию  $h \leq \lambda/6$ , где  $\lambda = k/(2\pi)$  — параметр, имеющий физический смысл длины волны, что согласуется с общепринятыми оценками.

При определении характеристик акустического поля в дальней зоне приемлемые результаты могут быть получены даже на более грубой сетке  $h \leq 1/3, \dots, 1/2\lambda$ . При этом напомним, что особенностью предлагаемой численной схемы является разложение выражений для коэффициентов системы линейных уравнений, возникающей при использовании кусочно-постоянных аппроксимаций, на сумму двух слагаемых, одно из которых содержит интеграл с сильной особенностью и вычисляется аналитически. Численные расчеты показали, что для получения хороших результатов на грубой основной сетке необходимо аккуратное вычисление вторых слагаемых, содержащих слабо сингулярные интегралы. В данной работе

этого удалось добиться за счет дополнительного разбиения основных ячеек на более мелкие с применением для вычисления слабо сингулярных интегралов по поверхностям основных ячеек формул типа прямоугольников со сглаживанием особенности в подынтегральной функции. Заметим, что такой подход хотя и увеличивает вычислительные затраты на построение матрицы системы уравнений, но не изменяет размерность решаемой системы уравнений, а основные вычислительные затраты в данной задаче связаны именно с решением этой системы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00806).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уфимцев П.Я. Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. Введение в физическую теорию дифракции. М.: Бином, 2012.
2. Zouros G.P., Roumeliotis J.A. Scattering by an infinite dielectric cylinder having an elliptic metal core: asymptotic solutions // *Antennas and Propagation*. 2010. **58**, N 10. 3299–3309.
3. Meana J.G., Martinez-Lorenzo J.A., Las-Heras F., Rappaport C. Wave scattering by dielectric and lossy materials using the modified equivalent current approximation (MECA) // *Antennas and Propagation*. 2010. **58**, N 11. 3757–3761.
4. Peng Z., Wang X.-C., Lee J.-F. Integral equation based domain decomposition method for solving electromagnetic wave scattering from non-penetrable objects // *Antennas and Propagation*. 2011. **59**, N 9. 3328–3338.
5. Bonomo A.L., Isakson M.J., Chotiros N.P. A comparison of finite element and analytic models of acoustic scattering from rough poroelastic interfaces // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. **137**, N 4. EL235–EL240.
6. Rucz P., Augusztinovicz F., Angster J., Preukschat T., Miklos A. A finite element model of the tuning slot of labial organ pipes // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. **137**, N 3. 1226–1237.
7. Коняев Д.А., Делицын А.Л. Метод конечных элементов с учетом парциальных условий излучения для задачи дифракции на рассеивателях сложной структуры // *Математическое моделирование*. 2014. **28**, № 8. 48–64.
8. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
9. Rao S.M., Wilton D., Glisson A.W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // *Antennas and Propagation*. 1982. **30**, N 3. 409–418.
10. Смирнов Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза: Информационно издательский центр ПензГУ, 2009.
11. Mackenzie A.I., Rao S.M., Baginski M.E. Method of Moments solution of electromagnetic scattering problems involving arbitrarily-shaped conducting/dielectric bodies using triangular patches and pulse basis functions // *Antennas and Propagation*. 2010. **58**, N 2. 488–493.
12. Tong M.S., Chew W.C. Fast convergence of fast multipole acceleration using dual basis function in the method of moments for composite structures // *Antennas and Propagation*. 2011. **59**, N 7. 2741–2746.
13. Polimeridis A.G., Tamayo J.M., Rius J.M., Mosig J.R. Fast and accurate computation of hypersingular integrals in Galerkin surface integral equation formulations via the direct evaluation method // *Antennas and Propagation*. 2011. **59**, N 6. 2329–2340.
14. Dault D.L., Nair N.V., Li J., Shanker B. The Generalized Method of Moments for Electromagnetic Boundary Integral Equations // *Antennas and Propagation*. 2014. **62**, N 6. 3174–3188.
15. Valdes F., Andriulli F.P., Bagci H., Michielssen E. Time-domain single-source integral equations for analyzing scattering from homogeneous penetrable objects // *Antennas and Propagation*. 2013. **61**, N 3. 1239–1254.
16. Yan Z.Y., Hung K.C., Zheng H. Solving the hypersingular boundary integral equation in three-dimensional acoustics using a regularization relationship // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. **113**, N 5. 2674–2684.
17. Hwang W.S. Hypersingular boundary integral equations for exterior acoustic problems // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. **101**, N 6. 3336–3342.
18. Wu T.W., Wan G.C. Numerical modeling of acoustic radiation and scattering from thin bodies using a Cauchy principal integral equation // *J. Acoust. Soc. Am.* 1992. **92**, N 5. 2900–2908.
19. Jing Y.-F., Huang T.-Z., Duan Y., et al. A novel integration method for weak singularity arising in two-dimensional scattering problems // *Antennas and Propagation*. 2010. **58**, N 8. 2725–2731.
20. Tsukerman I. A singularity-free boundary equation method for wave scattering // *Antennas and Propagation*. 2011. **59**, N 2. 555–562.
21. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО “Янус”, 1995.
22. Лифанов И.К., Ставцев С.Л. Интегральные уравнения и распространение звука в мелком море // *Дифференциальные уравнения*. 2004. **40**, № 9. 1256–1270.
23. Гутников В.А., Киряжин В.Ю., Лифанов И.К. и др. О численном решении двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения и о распространении звука в городской застройке // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. **47**, № 12. 2088–2100.
24. Setukha A.V. The singular integral equation method in 3-D boundary value problems and its applications // *AIP Conf. Proc.* 2012. **1479**, N 1. 720–723.

25. *Daeva S.G., Setukha A.V.* Numerical simulation of scattering of acoustic waves by inelastic bodies using hypersingular boundary integral equation // AIP Conf. Proc. 2015. **1648**. doi: 10.1063/1.4912614.
26. *Лебедева С.Г., Сетуха А.В.* О численном решении полного двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения методом дискретных особенностей // Дифференциальные уравнения. 2012. **49**, № 2. 223–233.
27. *Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: ТОО “Янус”, 2001.
28. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989.
29. *Faran J.J.* Sound scattering by solid cylinders and spheres // Journal of the Acoustical Society of America. 1951. **23**. 405–418.

Поступила в редакцию  
07.06.2015

---

## On the Numerical Solution of the Neumann Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation Using the Method of Hypersingular Integral Equations

S. G. Daeva<sup>1</sup> and A. V. Setukha<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Vega Radio Engineering Corporation, Kutuzovsky prospect 34, Moscow, 121170, Russia; Scientist, e-mail: daeva.sg@yandex.ru*

<sup>2</sup> *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: setuhaav@rambler.ru*

Received June 7, 2015

**Abstract:** A numerical method for solving a boundary hypersingular integral equation arising from the Neumann boundary value problem for the Helmholtz equation is proposed. The proposed numerical method is based on the explicit separation of the hypersingular main part in the kernel of the integral equation. After discretization, this boundary integral equation is reduced to a system of linear algebraic equations. The coefficients of this system are represented as the sums of hypersingular and weakly singular integrals. The hypersingular integrals are understood in the sense of the finite Hadamard value and are calculated analytically. A number of quadrature formulas for the weakly singular integrals are developed using the smoothing procedures for singularity. The proposed numerical scheme is tested on the basis of the following model examples: a hypersingular integral equation on a sphere and the problems of diffraction of acoustic waves on inelastic spheres and discs. The numerical solutions obtained are compared with existing analytical and numerical data.

**Keywords:** boundary integral equations, hypersingular integrals, discrete singularity method, Helmholtz equation, diffraction of acoustic waves.

### References

1. P. Ya. Ufimtsev, *Theory of Edge Diffraction in Electromagnetics* (Tech. Science Press, Encino, 2003; Binom, Moscow, 2012).
2. G. P. Zouros and J. A. Roumeliotis, “Scattering by an Infinite Dielectric Cylinder Having an Elliptic Metal Core: Asymptotic Solutions,” *IEEE Trans. Antennas Propag.* **58** (10), 3299–3309 (2010).
3. J. G. Meana, J. A. Martinez-Lorenzo, F. Las-Heras, and C. Rappaport, “Wave Scattering by Dielectric and Lossy Materials Using the Modified Equivalent Current Approximation (MECA),” *IEEE Trans. Antennas Propag.* **58** (11), 3757–3761 (2010).
4. Z. Peng, X.-C. Wang, and J.-F. Lee, “Integral Equation Based Domain Decomposition Method for Solving Electromagnetic Wave Scattering from Non-Penetrable Objects,” *IEEE Trans. Antennas Propag.* **59** (9), 3328–3338 (2011).
5. A. L. Bonomo, M. J. Isakson, and N. P. Chotiros, “A Comparison of Finite Element and Analytic Models of Acoustic Scattering from Rough Poroelectric Interfaces,” *J. Acoust. Soc. Am.* **137** (4), EL235–EL240 (2015).
6. P. Rucz, F. Augusztinovicz, J. Angster, et al., “A Finite Element Model of the Tuning Slot of Labial Organ Pipes,” *J. Acoust. Soc. Am.* **137** (3), 1226–1237 (2015).
7. D. A. Konyaev and A. L. Delitsyn, “Finite Element Method with Partial Radiation Conditions for Diffraction Problem on Domains of Complex Structure,” *Mat. Model.* **28** (8), 48–64 (2014).

8. D. Colton and R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory* (Wiley, New York, 1983; Mir, Moscow, 1987).
9. S. M. Rao, D. Wilton, and A. W. Glisson, "Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape," *IEEE Trans. Antennas Propag.* **30** (3), 409–418 (1982).
10. Yu. G. Smirnov, *Mathematical Methods for Electrodynamical Problems* (Penza State Univ., Penza, 2009) [in Russian].
11. A. I. Mackenzie, S. M. Rao, and M. E. Baginski, "Method of Moments Solution of Electromagnetic Scattering Problems Involving Arbitrarily-Shaped Conducting/Dielectric Bodies Using Triangular Patches and Pulse Basis Functions," *IEEE Trans. Antennas Propag.* **58** (2), 488–493 (2010).
12. M. S. Tong and W. C. Chew, "Fast Convergence of Fast Multipole Acceleration Using Dual Basis Function in the Method of Moments for Composite Structures," *IEEE Trans. Antennas Propag.* **59** (7), 2741–2746 (2011).
13. A. G. Polimeridis, J. M. Tamayo, J. M. Rius, and J. R. Mosig, "Fast and Accurate Computation of Hypersingular Integrals in Galerkin Surface Integral Equation Formulations via the Direct Evaluation Method," *IEEE Trans. Antennas Propag.* **59** (6), 2329–2340 (2011).
14. D. L. Dault, N. V. Nair, J. Li, and B. Shanker, "The Generalized Method of Moments for Electromagnetic Boundary Integral Equations," *IEEE Trans. Antennas Propag.* **62** (6), 3174–3188 (2014).
15. F. Valdes, F. P. Andriulli, H. Bagci, and E. Michielssen, "Time-Domain Single-Source Integral Equations for Analyzing Scattering from Homogeneous Penetrable Objects," *IEEE Trans. Antennas Propag.* **61** (3), 1239–1254 (2013).
16. Z. Y. Yan, K. C. Hung, and H. Zheng, "Solving the Hypersingular Boundary Integral Equation in Three-Dimensional Acoustics Using a Regularization Relationship," *J. Acoust. Soc. Am.* **113** (5), 2674–2683 (2003).
17. W. S. Hwang, "Hypersingular Boundary Integral Equations for Exterior Acoustic Problems," *J. Acoust. Soc. Am.* **101** (6), 3336–3342 (1997).
18. T. W. Wu and G. C. Wan, "Numerical Modeling of Acoustic Radiation and Scattering from Thin Bodies Using a Cauchy Principal Integral Equation," *J. Acoust. Soc. Am.* **92** (5), 2900–2906 (1992).
19. Y.-F. Jing, T.-Z. Huang, Y. Duan, et al., "A Novel Integration Method for Weak Singularity Arising in Two-Dimensional Scattering Problems," *IEEE Trans. Antennas Propag.* **58** (8), 2725–2731 (2010).
20. I. Tsukerman, "A Singularity-Free Boundary Equation Method for Wave Scattering," *IEEE Trans. Antennas Propag.* **59** (2), 555–562 (2011).
21. I. K. Lifanov, *Singular Integral Equations and Discrete Vortices* (Yanus, Moscow, 1995; VSP, Utrecht, 1996).
22. I. K. Lifanov and S. L. Stavtsev, "Integral Equations and Sound Propagation in a Shallow Sea," *Differ. Uravn.* **40** (9), 1256–1270 (2004) [*Differ. Equ.* **40** (9), 1330–1344 (2004)].
23. V. A. Gutnikov, V. Yu. Kiryakin, I. K. Lifanov, et al., "Numerical Solution to a Two-Dimensional Hypersingular Integral Equation and Sound Propagation in Urban Areas," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **47** (12), 2088–2100 (2007) [*Comput. Math. Math. Phys.* **47** (12), 2002–2013 (2007)].
24. A. V. Setukha, "The Singular Integral Equation Method in 3-D Boundary Value Problems and Its Applications," *AIP Conf. Proc.* **1479** (1), 720–723 (2012).
25. S. G. Daeva and A. V. Setukha, "Numerical Simulation of Scattering of Acoustic Waves by Inelastic Bodies Using Hypersingular Boundary Integral Equation," *AIP Conf. Proc.* **1648** (2015). doi: 10.1063/1.4912614
26. S. G. Lebedeva and A. V. Setukha, "On the Numerical Solution of a Complete Two-Dimensional Hypersingular Integral Equation by the Method of Discrete Singularities," *Differ. Uravn.* **49** (2), 223–233 (2013) [*Differ. Equ.* **49** (2), 224–234 (2013)].
27. G. M. Vainikko, I. K. Lifanov, and L. N. Poltavskii, *Hypersingular Integral Equations and Their Applications* (Yanus, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2003).
28. E. L. Shenderov, *Radiation and Scattering of Sound* (Sudostroenie, Leningrad, 1989) [in Russian].
29. J. J. Faran, "Sound Scattering by Solid Cylinders and Spheres," *J. Acoust. Soc. Am.* **23**, 405–418 (1951).