УДК 550.341

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА В ПРИМЕНЕНИИ К УРАВНЕНИЯМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В.В. Лисица¹

Приводится дисперсионный анализ разрывного метода Галеркина в применении к системе уравнений динамической теории упругости. В зависимости от степени базисных полиномов рассматриваются P1-, P2- и P3-формулировки метода при использовании регулярной треугольной сетки. Показано, что для задач сейсмического моделирования оптимальной является P2формулировка, поскольку сочетает в себе достаточную точность (численная дисперсия не выше 0.05%) и вычислительную эффективность. Использование P1-формулировки приводит к недопустимо высокой численной дисперсии, в то время как P3-формулировка является чрезвычайно ресурсоемкой при использовании дискретизаций от 3 до 20 ячеек сетки на длину волны, типичной для сейсмического моделирования.

Ключевые слова: численная дисперсия, разрывный метод Галеркина, конечно-разностные схемы, теория упругости.

1. Введение. Современное развитие вычислительных технологий и численных методов позволяет проводить моделирование волновых процессов в средах чрезвычайно сложного структурного строения, содержащих анизотропные включения [21, 31, 40], вязкоупругие пропластки [2, 15, 16, 18, 39], мелкомасштабные неоднородности [6, 14, 19, 28], резко контрастные границы [17, 24, 37, 38, 43], включая блочные среды [1, 8] и др. Более того, сейсмическое моделирования является неотъемлемой частью процедур восстановления внутреннего строения среды, таких как методы полного обращения волновых полей [3, 46, 47].

Наиболее распространенным численным методом при моделировании сейсмических волновых процессов является метод конечных разностей, сочетающий в себе высокую эффективность параллельной реализации, возможность описания модели практически любой сложности с приемлемой для сейсмического моделирования точностью [45]. Более того, в настоящее время существует ряд схем, разработанных специально для учета определенных свойств среды, например для изотропной среды применяются стандартные схемы на сдвинутых сетках [29, 44]. В случае анизотропии используются схемы на частично сдвинутых сетках, такие как схема Лебедева [7, 31] или схема на повернутых сетках [40]. Однако наличие резко контрастных границ в модели может существенно снизить скорость сходимости конечно-разностного решения [30, 42, 48] в силу "ступенчатой" (т.е. кусочно-постоянной) аппроксимации границы на регулярной прямоугольной сетке. Одним из способов повышения качества аппроксимации является использование криволинейных сеток, связанных с основными границами раздела с последующей аппроксимацией системы уравнений теории упругости в локальных криволинейных координатах [24, 37, 43].

Принципиально отличным является метод конечных элементов и его вариации, поскольку они дают возможность использовать нерегулярные треугольные (тетрагональные) сетки, которые легко позволяют аппроксимировать границы. Среди многообразия таких методов в применении к решению системы уравнений динамической теории упругости следует отметить разрывный метод Галеркина [13, 22, 23, 27, 49]. Его особенностью является использование базисных и тестовых функций, допускающих разрывы на границах ячеек сетки; в результате построение базиса происходит локально внутри каждой ячейки, что, в свою очередь, приводит к блочно-диагональной структуре матрицы масс. В результате матрица масс легкообратима, и алгоритм моделирования волновых процессов является "почти" явным. Более того, разрывный метод Галеркина позволяет использовать различные базисные функции в соседних ячейках сетки. По указанным причинам данный метод является чрезвычайно перспективным для расчета волновых полей в средах со сложными нерегулярными резко контрастными границами. Однако применение любого метода требует предварительного исследования его свойств и особенно численной дисперсии, позволяющей оценить численную ошибку на реалистичных дискретизациях.

¹Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; зав. лабораторией, e-mail: lisitsavv@ipgg.sbras.ru

[©] Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

В настоящей статье приводится детальный дисперсионный анализ разрывного метода Галеркина на треугольных сетках в применении к системе динамической теории упругости, записанной в терминах скоростей и напряжений. Следует выделить две особенности проводимого анализа. Во-первых, исследуются свойства разрывного метода Галеркина, определенного на регулярной треугольной сетке, что обусловлено спецификой моделирования сейсмических полей — типично в модели присутствует небольшое количество границ, учет которых необходим (свободная поверхность, морское дно, соляные тела); в большей части модели возможно использование регулярной сетки, что существенно упрощает ее построение. Во-вторых, в работе не проводится анализ асимптотического поведения метода, т.е. при шаге сетки, стремящемся к нулю, поскольку данный вопрос детально обсуждается в ряде работ [9–11, 35, 36, 51, 52]. Более того, вне рассмотрения остаются и высокочастотные режимы с дискретизацией менее 3-4 ячеек сетки на длину волны: данные вопросы обсуждаются в работах [12, 25, 26, 36, 41]. Целью данной работы является оценка численной дисперсии разрывного метода Галеркина в рабочем диапазоне дискретизаций от 3 (предел разрешающей способности волновых методов) до 100 (достаточная детализация для описания мелкомасштабных неоднородностей, таких как каверны и системы трещин) ячеек сетки на длину волны. Более того, в работе приводится сравнительный анализ дисперсионных свойств разрывного метода Галеркина с методом конечных разностей и, в частности, со стандартной схемой на сдвинутых сетках.

2. Дискретизация системы уравнений упругости разрывным методом Галеркина. Рассматривается система уравнений динамической теории упругости в двумерной постановке, записанная в декартовой системе координат в дивергентной форме [5]:

$$A_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \sum_{j=1}^2 B_j \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x_j} = 0, \quad A_2 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} - \sum_{j=1}^2 B_j^* \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j} = 0.$$
(1)

Здесь вектор $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ — скорость смещения, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^{\mathrm{T}}$ — тензор напряжений, записанный в векторной форме [50]; матрицы A_1 и A_2 — самосопряженные строго положительно определенные, а матрицы B_1 и B_2 не зависят от пространственных координат:

$$A_{1} = \begin{pmatrix} \rho \ 0 \\ 0 \ \rho \end{pmatrix}, \quad A_{2} = S = \begin{pmatrix} s_{11} \ s_{12} \ s_{13} \\ s_{12} \ s_{22} \ s_{23} \\ s_{13} \ s_{23} \ s_{33} \end{pmatrix}, \quad B_{1} = \begin{pmatrix} 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \end{pmatrix}, \quad B_{2} = \begin{pmatrix} 0 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 1 \ 0 \end{pmatrix},$$

где ρ — плотность, S — тензор податливости (обратный к тензору жесткости).

Для дискретизации системы (1) с применением разрывного метода Галеркина необходимо, прежде всего, ввести некую полигональную сетку \mathcal{T}_h и обозначить через \mathcal{C}_h , \mathcal{E}_h и \mathcal{N}_h множество ее ячеек (выпуклых многоугольников), границ и узлов соответственно. После этого необходимо определить скалярные базисные функции

$$\xi^k(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} P^r(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_h, \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin \mathcal{C}_h, \end{cases}$$

где P^r — алгебраический полином степени r. Такой выбор базисных функций является традиционным, хотя существуют и подходы, в которых в качестве базисных функций используются иные функциональные последовательности. После определения скалярных базисных функций векторные функции могут быть получены как прямое произведение скалярного базиса с базисом, в котором определено волновое поле. Ниже будет использоваться сокращенное обозначение для базисных и тестовых функций $\phi = (\varphi^{T}, \psi^{T})^{T}$. Умножая систему (1) на тестовые функции и интегрируя в \mathbb{R}^{2} , можно получить выражение

$$\sum_{V_{k}\in\mathcal{C}_{h}}\int_{V_{k}}\left(\begin{pmatrix}A_{1} & 0\\ 0 & A_{2}\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}\\\boldsymbol{\psi}\end{pmatrix}\right)dv + \sum_{V_{k}\in\mathcal{C}_{h}}\int_{V_{k}}\sum_{j=1}^{2}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & B_{j}\\B_{j}^{*} & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_{j}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}\\\boldsymbol{\psi}\end{pmatrix}\right)dv - \\ -\sum_{S_{km}\in\mathcal{E}_{h}}\int_{S_{km}}\left(\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\right\},\left[\begin{pmatrix}0 & B_{km}\\B_{km}^{*} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}\\\boldsymbol{\psi}\end{pmatrix}\right]\right)ds = 0,$$

$$(2)$$

где $V_k \in C_h$ — ячейка сетки с номером $k, S_{km} \in \mathcal{E}_h$ — граница между ячейками с номерами k и m. Обозначение (,) используется для скалярного произведения в \mathbb{R}^5 , обозначения [] и { } применяются для среднего значения и скачка векторных функций на границе:

$$[B_{km}\boldsymbol{u}] = \sum_{j=1}^{2} n_{j}^{km} B_{j} \boldsymbol{u}^{k} + \sum_{j=1}^{2} n_{j}^{mk} B_{j} \boldsymbol{u}^{m}, \quad \{\boldsymbol{u}\} = 0.5 (\boldsymbol{u}^{k} + \boldsymbol{u}^{m}),$$

где n^{km} — единичный вектор нормали к границе $S_{km} \in \mathcal{E}_h$, направленный из ячейки с номером k в ячейку с номером m.

Важно отметить, что полученная аппроксимация эллиптической части оператора является кососимметричной, т.е. $a(v, \phi) = -a(\phi, v)$, где a(,) — билинейная форма, составленная из двух последних слагаемых в формуле (2).

2.1. Разложение по базисным функциям. Приведенное выше выражение является достаточно общим, а при его построении не использовалось разложение решения по базисным функциям. Итак, пусть решение представимо в виде

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{r=1}^{2} \left(\sum_{k|V_{k}\in\mathcal{C}_{h}} \sum_{l=1}^{d} \left(U_{r}^{k} \right)_{l}(t) \xi_{l}^{k}(\boldsymbol{x}) \right) \boldsymbol{e}_{r}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{r=1}^{3} \left(\sum_{k|V_{k}\in\mathcal{C}_{h}} \sum_{l=1}^{d} \left(\Sigma_{r}^{k} \right)_{l}(t) \xi_{l}^{k}(\boldsymbol{x}) \right) \boldsymbol{e}_{r}, \quad (3)$$

где \boldsymbol{e}_r — вектор стандартного базиса в \mathbb{R}^2 , в котором записаны компоненты вектора скорости, либо в \mathbb{R}^3 для вектора, составленного из компонент тензора напряжений; d — число степеней свободы в ячейке. Скалярные функции ξ_l^k представимы в виде $\xi_l^k(\boldsymbol{x}) = \Xi_l^k(\boldsymbol{x})\chi_{V_k}(\boldsymbol{x})$, где $\Xi_l^k(\boldsymbol{x})$ — достаточно гладкая функция, а $\chi_{V_k}(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция ячейки $V_k \in C_h$. Для дальнейших рассуждений удобно ввести обозначения $\boldsymbol{U}^k = \left(\left(\boldsymbol{U}_1^k \right)^{\mathrm{T}}, \left(\boldsymbol{U}_2^k \right)^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{U}_r^k = \left(\left(U_r^k \right)_1, \ldots, \left(U_r^k \right)_d \right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\Sigma}^k = \left(\left(\boldsymbol{\Sigma}_1^k \right)^{\mathrm{T}}, \ldots, \left(\boldsymbol{\Sigma}_3^k \right)^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}},$ $\boldsymbol{\Sigma}_r^k = \left(\left(\Sigma_r^k \right)_1, \ldots, \left(\Sigma_r^k \right)_d \right)^{\mathrm{T}}$, где L_k — число степеней свободы в ячейке V_k .

Подставляя выражения для искомого решения (3) в (2) и требуя выполнения равенств для всех пробных функций, можно получить

$$M \otimes \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^k \\ \mathbf{\Sigma}^k \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^2 (K^j) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^k \\ \mathbf{\Sigma}^k \end{pmatrix} - \\ -\frac{1}{2} \sum_{m \mid V_m \in \mathcal{C}_h(V_k)} P_m^{km} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{km} \\ B_{km}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^m \\ \mathbf{\Sigma}^m \end{pmatrix} - \\ -\frac{1}{2} \sum_{m \mid V_m \in \mathcal{C}_h(V_k)} P_k^{km} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{km} \\ B_{km}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^k \\ \mathbf{\Sigma}^k \end{pmatrix} = 0,$$

$$(4)$$

где символ \otimes означает прямое произведение матриц. Матрица B_{km} определяется как $B_{km} = \sum_{j=1}^{2} B_j n_j^{km}$.

Матрицы M, K_j, P_m^{km} и P_k^{km} — матрицы масс, жесткости и потоков. Эти матрицы могут быть представлены в следующем виде:

$$(M^k)_{ln} = \int_{V_k} \xi_l^k \xi_n^k \, dv, \quad (K^{k,j})_{ln} = \int_{V_k} \frac{\partial \xi_l^k}{\partial x_j} \xi_n^k, \quad (P_p^{km})_{ln} = \int_{S_{km}} \xi_l^p \xi_n^k \, ds.$$

В этих обозначениях верхний индекс может принимать значения k или m.

Дискретизованная система (4) будет использована в дальнейшем как для проведения дисперсионного анализа, так и для разработки алгоритма, комбинирующего разрывный метод Галеркина с методом конечных разностей.

2.2. Аппроксимация производной по времени. Для аппроксимации производной по времени в полученной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (4) в рамках данной работы будет использоваться оператор центральных разностей на сдвинутых сетках, аналогичный тому, который применяется в стандартной схеме на сдвинутых сетках:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t^n} = \frac{f^{n+1/2} - f^{n-1/2}}{\tau} + O(\tau^2) = L_t[f]^n + O(\tau^2), \tag{5}$$

где τ — шаг сетки по времени.

Следует отметить, что при проведении дисперсионного анализа важное значение будет иметь преобразование Фурье от рассматриваемого оператора:

$$F\left[\frac{df(x)}{dt}\right] = i\omega\widehat{f}(\omega), \quad F\left[L_t\left[f(t)\right]\right] = \frac{2i\sin(\omega\tau/2)}{\tau}\,\widehat{f}(\omega) = i\widehat{\omega}\widehat{f}(\omega).$$

Из приведенного выражения видно, что образы преобразования Фурье для оператора производной и оператора центральных разностей отличаются сомножителем. По этой причине дисперсионный анализ будет проводиться для полудискретизованной системы, а соотношения для полностью дискретной постановки будут получены заменой частоты ω на $\hat{\omega}$.

3. Дисперсионный анализ разрывного метода Галеркина.

3.1. Барицентрические координаты. Для проведения дисперсионного анализа разрывного метода Галеркина необходимо ввести барицентрические координаты

$$\begin{pmatrix} 1\\x_1\\x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\x_1^1 & x_1^2 & x_1^3\\x_2^1 & x_2^2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3 \end{pmatrix}$$

где точки $(x_1^1, x_2^1), (x_1^2, x_2^2)$ и (x_1^3, x_2^3) — узлы рассматриваемой ячейки, образующие вершины треугольника.

В новых локальных переменных система уравнений (4) может быть записана в форме

$$\widehat{M} \otimes \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^k \\ \mathbf{\Sigma}^k \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^3 \frac{n_j^l L^l}{|J^k|} \widehat{K}_l \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^k \\ \mathbf{\Sigma}^k \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{n_j^l L^l}{|J^k|} \widehat{Q}_l \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^k \\ \mathbf{\Sigma}^k \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{n_j^l L^l}{|J^k|} \widehat{Q}_l \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{m(l)} \\ \mathbf{\Sigma}^{m(l)} \end{pmatrix} = 0.$$
(6)

В данных обозначениях l — номер грани ячейки V_k , $n_j^l - j$ -я компонента единичного вектора внешней нормали к l-й грани, L^l — длина этой грани, J^k — якобиан преобразования координат для ячейки V_k . Сложные индексы m(l) используются, чтобы подчеркнуть, что существует взаимно однозначное соответствие нумерации соседей ячейки V_k в глобальной и локальной системах координат. Важно отметить,

что
$$\frac{n_j^t L^t}{|J^k|} = -\frac{\partial y_l}{\partial x_j}$$
, следовательно
 $n_1^1 L^1 = x_2^3 - x_2^2$, $n_1^2 L^2 = x_2^1 - x_2^3$, $n_1^3 L^3 = x_2^2 - x_2^1$,
 $n_2^1 L^1 = x_1^2 - x_1^3$, $n_2^2 L^2 = x_1^3 - x_1^1$, $n_2^3 L^3 = x_1^1 - x_1^2$. (7)

Матрицы $\widehat{M}, \widehat{K}_{j}^{k}, \widehat{P}_{l,i(m)}$ и \widehat{Q}_{l} — матрицы масс, жесткости и потоков, записанные в локальных барицентрических координатах.

координатах. **3.2. Регулярная сетка.** Пусть в \mathbb{R}^2 задана регулярная сетка с узлами $((x_1)_{j_1+1/2}, (x_2)_{j_2+1/2})$, такими, что $(x_1)_{j_1+1/2} = (j_1 + 1/2)h_1$ и $(x_2)_{j_2+1/2} = (j_2 + 1/2)h_2$, где j_1 и j_2 — целые числа. Пусть триангуляция проведена так, что существуют два типа ячеек:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{1} &= \bigcup_{j_{1},j_{2}} V_{j_{1},j_{2}}^{1}, \quad \mathcal{C}^{2} &= \bigcup_{j_{1},j_{2}} V_{j_{1},j_{2}}^{2}, \\ \mathcal{N}_{h} \left(V_{j_{1},j_{2}}^{1} \right) &= \left\{ \left((x_{1})_{j_{1}+1/2}, (x_{2})_{j_{2}-1/2} \right), \left((x_{1})_{j_{1}+1/2}, (x_{2})_{j_{2}+1/2} \right), \left((x_{1})_{j_{1}-1/2}, (x_{2})_{j_{2}-1/2} \right) \right\}, \\ \mathcal{N}_{h} \left(V_{j_{1},j_{2}}^{2} \right) &= \left\{ \left((x_{1})_{j_{1}-1/2}, (x_{2})_{j_{2}+1/2} \right), \left((x_{1})_{j_{1}-1/2}, (x_{2})_{j_{2}-1/2} \right), \left((x_{1})_{j_{1}+1/2}, (x_{2})_{j_{2}+1/2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{N}_n(V_{j_1,j_2}^q)$ обозначает множество всех узлов ячейки V_{j_1,j_2}^q . В используемых обозначениях нижний индекс определяет положение ячейки в пространстве, а верхний — тип ячейки. Схематическое представление сетки приведено на рис. 1.



Рис. 1. Схематическое представление

В обозначениях компонент волнового поля (коэффициентов разложения компонент поля по базису) тоже удобно ввести двойную индексацию:

$$\boldsymbol{U}_{j_{1},j_{2}}^{q} = \left(\left(\boldsymbol{U}_{j_{1},j_{2}}^{q} \right)_{1}^{\mathrm{T}}, \left(\boldsymbol{U}_{j_{1},j_{2}}^{q} \right)_{2}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}}, \qquad \left(\boldsymbol{U}_{j_{1},j_{2}}^{q} \right)_{m} = \left(\left(\boldsymbol{U}_{j_{1},j_{2}}^{q} \right)_{m}^{1}, \dots, \left(\boldsymbol{U}_{j_{1},j_{2}}^{q} \right)_{m}^{d} \right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{j_{1},j_{2}}^{q} = \left(\left(\boldsymbol{\Sigma}_{j_{1},j_{2}}^{q} \right)_{1}^{\mathrm{T}}, \dots, \left(\boldsymbol{\Sigma}_{j_{1},j_{2}}^{q} \right)_{3}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}}, \qquad \left(\boldsymbol{\Sigma}_{j_{1},j_{2}}^{q} \right)_{m} = \left(\left(\boldsymbol{\Sigma}_{j_{1},j_{2}}^{q} \right)_{m}^{1}, \dots, \left(\boldsymbol{\Sigma}_{j_{1},j_{2}}^{q} \right)_{m}^{d} \right)^{\mathrm{T}},$$

Важно отметить, что все ячейки, соседние с ячейкой из множества $V_{ij}^1 \in \mathcal{C}^1$, принадлежат множеству \mathcal{C}^2 , и наоборот. Подобная регулярная структура сетки позволяет ввести нумерацию узлов в каждом треугольнике так, чтобы каждый треугольник являлся *m*-м соседом своего *m*-го соседа, как приведено на рис. 1. Данное предположение позволяет однозначно выбрать нумерацию базиса и зафиксировать порядок строк (столбцов) в матрицах потоков.

Подставляя введенные обозначения в формулу (6) и используя соотношения (7) для регулярной сетки, можно получить соотношения

$$\begin{split} \widehat{M} \otimes \begin{pmatrix} A_{1} & 0 \\ 0 & A_{2} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}}^{1} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}}^{1} \end{pmatrix} &- \frac{1}{h_{1}} \left(\widehat{K}_{3} - \widehat{K}_{1} - \frac{1}{2} \widehat{Q}_{1} + \frac{1}{2} \widehat{Q}_{3} \right) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{1} \\ B_{1}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}}^{1} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}}^{1} \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{h_{2}} \left(\widehat{K}_{1} - \widehat{K}_{2} + \frac{1}{2} \widehat{Q}_{1} - \frac{1}{2} \widehat{Q}_{2} \right) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{2} \\ B_{2}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}}^{1} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}}^{1} \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2h_{1}} \widehat{P}_{1,1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{1} \\ B_{1}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}}^{2} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}}^{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2h_{2}} \widehat{P}_{1,1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{2} \\ B_{2}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}}^{2} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}}^{2} \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2h_{2}} \widehat{P}_{2,2} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{2} \\ B_{2}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}-1}^{2} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}-1}^{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2h_{1}} \widehat{P}_{3,3} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{1} \\ B_{1}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1}+1,j_{2}}^{2} \\ \Sigma_{j_{1}+1,j_{2}}^{2} \end{pmatrix} = 0, \end{split}$$

$$\begin{split} \widehat{M} \otimes \begin{pmatrix} A_{1} & 0 \\ 0 & A_{2} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}}^{2} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}}^{2} \end{pmatrix} &- \frac{1}{h_{1}} \left(\widehat{K}_{3} - \widehat{K}_{1} - \frac{1}{2} \widehat{Q}_{1} + \frac{1}{2} \widehat{Q}_{3} \right) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{1} \\ B_{1}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}}^{2} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}}^{2} \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{h_{2}} \left(\widehat{K}_{1} - \widehat{K}_{2} + \frac{1}{2} \widehat{Q}_{1} - \frac{1}{2} \widehat{Q}_{2} \right) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{2} \\ B_{2}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}}^{2} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}}^{2} \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{2h_{1}} \widehat{P}_{1,1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{1} \\ B_{1}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}}^{1} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}}^{1} \end{pmatrix} - \frac{1}{2h_{2}} \widehat{P}_{1,1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{2} \\ B_{2}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}}^{1} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}}^{1} \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2h_{2}} \widehat{P}_{2,2} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{2} \\ B_{2}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1},j_{2}+1}^{1} \\ \Sigma_{j_{1},j_{2}+1}^{1} \end{pmatrix} - \frac{1}{2h_{1}} \widehat{P}_{3,3} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{1} \\ B_{1}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{j_{1}-1,j_{2}}^{1} \\ \Sigma_{j_{1}-1,j_{2}}^{1} \end{pmatrix} = 0. \end{split}$$

3.3. Решение в виде плоских волн. Решение в виде плоской волны — это решение вида

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{j_{1},j_{2}}^{1} \\ \boldsymbol{U}_{j_{1},j_{2}}^{2} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{j_{1},j_{2}}^{1} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{j_{1},j_{2}}^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{0}^{1} \\ \boldsymbol{U}_{0}^{2} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{0}^{1} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{0}^{1} \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_{1}h_{1}j_{1} + k_{2}h_{2}j_{2})}$$

Подставляя данное выражение в систему (8), (9), можно получить следующую систему линейных

алгебраических уравнений:

$$\begin{split} i\omega\widehat{M}\otimes \begin{pmatrix} A_{1} & 0\\ 0 & A_{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0}^{1}\\ \Sigma_{0}^{1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{h_{1}} \left(\widehat{K}_{3} - \widehat{K}_{1} - \frac{1}{2}\widehat{Q}_{1} + \frac{1}{2}\widehat{Q}_{3}\right) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{1}\\ B_{1}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0}^{1}\\ \Sigma_{0}^{1} \end{pmatrix} &= \\ &- \frac{1}{h_{2}} \left(\widehat{K}_{1} - \widehat{K}_{2} + \frac{1}{2}\widehat{Q}_{1} - \frac{1}{2}\widehat{Q}_{2}\right) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{2}\\ B_{2}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0}^{1}\\ \Sigma_{0}^{1} \end{pmatrix} &= \\ &- \frac{1}{h_{2}} \left(e^{ih_{1}k_{1}}\widehat{P}_{3,3} - \widehat{P}_{1,1}\right) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{1}\\ B_{1}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0}^{2}\\ \Sigma_{0}^{2} \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{2h_{2}} \left(\widehat{P}_{1,1} - e^{-ih_{2}k_{2}}\widehat{P}_{2,2}\right) \begin{pmatrix} 0 & B_{2}\\ B_{2}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0}^{2}\\ \Sigma_{0}^{2} \end{pmatrix} &= 0, \end{split}$$
(10)
$$&i\omega\widehat{M}\otimes \begin{pmatrix} A_{1} & 0\\ 0 & A_{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0}^{2}\\ \Sigma_{0}^{2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{h_{1}} \left(\widehat{K}_{3} - \widehat{K}_{1} - \frac{1}{2}\widehat{Q}_{1} + \frac{1}{2}\widehat{Q}_{3}\right) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{1}\\ B_{1}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0}^{2}\\ \Sigma_{0}^{2} \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{h_{2}} \left(\widehat{K}_{1} - \widehat{K}_{2} + \frac{1}{2}\widehat{Q}_{1} - \frac{1}{2}\widehat{Q}_{2}\right) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{2}\\ B_{2}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0}^{2}\\ \Sigma_{0}^{2} \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{h_{2}} \left(\widehat{K}_{1} - e^{-ih_{1}k_{1}}\widehat{P}_{3,3}\right) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{1}\\ B_{1}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0}^{2}\\ \Sigma_{0}^{2} \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{2h_{2}} \left(e^{ih_{2}k_{2}}\widehat{P}_{2,2} - \widehat{P}_{1,1}\right) \begin{pmatrix} 0 & B_{2}\\ B_{2}^{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0}^{1}\\ \Sigma_{0}^{1} \end{pmatrix} = 0. \end{split}$$

Для того чтобы упростить полученное выражение, удобно ввести следующие обозначения:

$$\mathbf{K}_{1} = \left(\widehat{K}_{3} - \widehat{K}_{1} + \frac{1}{2}\widehat{Q}_{3} - \frac{1}{2}\widehat{Q}_{1}\right), \quad \mathbf{K}_{2} = \beta \left(\widehat{K}_{2} - \widehat{K}_{1} + \frac{1}{2}\widehat{Q}_{2} - \frac{1}{2}\widehat{Q}_{1}\right),$$
$$\mathbf{P}_{1} = \frac{1}{2}\left(\widehat{P}_{1,1} - e^{-ik_{1}h_{1}}\widehat{P}_{3,3}\right), \qquad \mathbf{P}_{2} = \frac{\beta}{2}\left(\widehat{P}_{1,1} - e^{-ik_{2}h_{2}}\widehat{P}_{2,2}\right),$$

где $\beta = \frac{h_1}{h_2}$. Если обозначить при этом $h = h_1$, то уравнения (10), (11) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{split} &i\omega h\widehat{M}\otimes A_{1}\boldsymbol{U}_{0}^{1}-\mathbf{K}_{1}\otimes B_{1}\boldsymbol{\Sigma}_{0}^{1}+\mathbf{K}_{2}\otimes B_{2}\boldsymbol{\Sigma}_{0}^{1}+\overline{\mathbf{P}}_{1}\otimes B_{1}\boldsymbol{\Sigma}_{0}^{2}-\mathbf{P}_{2}\otimes B_{2}\boldsymbol{\Sigma}_{0}^{2}=0,\\ &i\omega h\widehat{M}\otimes A_{1}\boldsymbol{U}_{0}^{2}+\mathbf{K}_{1}\otimes B_{1}\boldsymbol{\Sigma}_{0}^{2}-\mathbf{K}_{2}\otimes B_{2}\boldsymbol{\Sigma}_{0}^{2}-\mathbf{P}_{1}\otimes B_{1}\boldsymbol{\Sigma}_{0}^{1}+\overline{\mathbf{P}}_{2}\otimes B_{2}\boldsymbol{\Sigma}_{0}^{1}=0,\\ &i\omega h\widehat{M}\otimes A_{2}\boldsymbol{\Sigma}_{0}^{1}-\mathbf{K}_{1}\otimes B_{1}^{*}\boldsymbol{U}_{0}^{1}+\mathbf{K}_{2}\otimes B_{2}^{*}\boldsymbol{U}_{0}^{1}+\overline{\mathbf{P}}_{1}\otimes B_{1}^{*}\boldsymbol{U}_{0}^{2}-\mathbf{P}_{2}\otimes B_{2}^{*}\boldsymbol{U}_{0}^{2}=0,\\ &i\omega h\widehat{M}\otimes A_{1}\boldsymbol{\Sigma}_{0}^{2}+\mathbf{K}_{1}\otimes B_{1}^{*}\boldsymbol{U}_{0}^{2}-\mathbf{K}_{2}\otimes B_{2}^{*}\boldsymbol{U}_{0}^{2}-\mathbf{P}_{1}\otimes B_{1}^{*}\boldsymbol{U}_{0}^{1}+\overline{\mathbf{P}}_{2}\otimes B_{2}^{*}\boldsymbol{U}_{0}^{1}=0. \end{split}$$

Матрицы \widehat{M} и A_j самосопряженные и строго положительно определенные, поэтому для них определены $\widehat{M}^{\pm 1/2}$ и $A_j^{\pm 1/2}$. Применяя замену переменных $\boldsymbol{W}^m = \widehat{M}^{1/2} \otimes A_1^{1/2} \boldsymbol{u}_0^m$ и $\boldsymbol{\phi}^m = \widehat{M}^{1/2} \otimes A_2^{1/2} \boldsymbol{\sigma}_0^m$, эту систему можно переписать в виде

$$i\omega h \mathbf{W}^{1} - \mathbf{R}_{1} \otimes C_{1} \Phi^{1} + \mathbf{R}_{2} \otimes C_{2} \Phi^{1} + \overline{\mathbf{T}}_{1} \otimes C_{1} \Phi^{2} - \mathbf{T}_{2} \otimes C_{2} \Phi^{2} = 0,$$

$$i\omega h \mathbf{W}^{2} + \mathbf{R}_{1} \otimes C_{1} \Phi^{2} - \mathbf{R}_{2} \otimes C_{2} \Phi^{2} - \mathbf{T}_{1} \otimes C_{1} \Phi^{1} + \overline{\mathbf{T}}_{2} \otimes C_{2} \Phi^{1} = 0,$$

$$i\omega h \Phi^{1} - \mathbf{R}_{1} \otimes C_{1}^{*} \mathbf{V}^{1} + \mathbf{R}_{2} \otimes C_{2}^{*} \mathbf{V}^{1} + \overline{\mathbf{T}}_{1} \otimes C_{1}^{*} \mathbf{V}^{2} - \mathbf{T}_{2} \otimes C_{2}^{*} \mathbf{V}^{2} = 0,$$

$$i\omega h \Phi^{2} + \mathbf{R}_{1} \otimes C_{1}^{*} \mathbf{V}^{2} - \mathbf{R}_{2} \otimes C_{2}^{*} \mathbf{V}^{2} - \mathbf{T}_{1} \otimes C_{1}^{*} \mathbf{V}^{1} + \overline{\mathbf{T}}_{2} \otimes C_{2}^{*} \mathbf{V}^{1} = 0,$$

(12)

где $\mathbf{R}_m = M^{-1/2} [\mathbf{K}_m] M^{-1/2}, \ \mathbf{T}_m = M^{-1/2} \mathbf{P}_m M^{-1/2}, \ C_m = A_1^{-1/2} \tilde{B}_m A_2^{-1/2}.$

Фазовые скорости плоских волн, являющихся решениями рассматриваемой системы, являются собственными значениями полученной матрицы. Для решения задачи на собственные значения следует провести дальнейшие упрощения матрицы:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_1 \otimes C_1 + \mathbf{R}_2 \otimes C_2 & \overline{\mathbf{T}}_1 \otimes C_1 - \mathbf{T}_2 \otimes C_2 \\ -\mathbf{T}_1 \otimes C_1 + \overline{\mathbf{T}}_2 \otimes C_2 & \mathbf{R}_1 \otimes C_1 - \mathbf{R}_2 \otimes C_2 \end{pmatrix}.$$

Сопряженная к ней матрица представляется в виде

$$\mathbf{L}^* = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_1^* \otimes C_1^* + \mathbf{R}_2^* \otimes C_2^* & -\mathbf{T}_1^* \otimes C_1^* + \overline{\mathbf{T}}_2^* \otimes C_2^* \\ \overline{\mathbf{T}}_1^* \otimes C_1^* - \mathbf{T}_2^* \otimes C_2^* & \mathbf{R}_1^* \otimes C_1^* - \mathbf{R}_2^* \otimes C_2^* \end{pmatrix}.$$

В силу того, что билинейная форма, полученная в результате дискретизации эллиптической части системы уравнений, является кососимметричной, матрицы \mathbf{R}_m также являются кососимметричными, т.е. $\mathbf{R}_m^* = -\mathbf{R}_m$. Матрицы $P_{m,m}$, из которых формируются матрицы \mathbf{T}_j , — вещественные симметричные; следовательно, $\mathbf{T}_j^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}_j$ или $\mathbf{T}_j^* = \overline{\mathbf{T}}_j^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{T}}_j$. С учетом этих соотношений можно получить

$$\mathbf{L}^* = - \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_1 \otimes C_1^* + \mathbf{R}_2 \otimes C_2^* & \overline{\mathbf{T}}_1 \otimes C_1^* - \mathbf{T}_2 \otimes C_2^* \\ -\mathbf{T}_1 \otimes C_1^* + \overline{\mathbf{T}}_2 \otimes C_2^* & \mathbf{R}_1 \otimes C_1^* - \mathbf{R}_2 \otimes C_2^* \end{pmatrix}.$$

В результате рассматриваемая система (12) может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} i\omega hI & \mathbf{L} \\ -\mathbf{L}^* & i\omega hI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^1 \\ \mathbf{W}^2 \\ \mathbf{\Phi}^1 \\ \mathbf{\Phi}^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Несложно понять, что для построения частоты как функции волнового вектора достаточно построить сингулярное разложение матрицы L, при этом верно следующее соотношение:

$$\prod_{m} \left(\omega^2 h^2 - s_m^2(\boldsymbol{k}) \right) = 0, \tag{13}$$

где s_m — сингулярные числа матрицы **L**. Детали построения этого соотношения представлены в [4].

3.4. Безразмерные переменные. Дисперсионный анализ проводится с использованием следующих безразмерных переменных [20]:

$$k_1 = |\mathbf{k}| \cos(\alpha), \quad N = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|h}, \quad k_2 = |\mathbf{k}| \sin(\alpha), \quad \chi = \frac{V_P \tau}{h}, \quad \gamma = V_P / V_S > 1,$$

где N — число точек (ячеек) сетки на длину волны, χ — число Куранта, используемое для дискретизованной по времени задачи, α — направление распространения волны. С учетом связи частоты с сингулярными числами матрицы \mathbf{T}_{j} и воспользовавшись определением фазовой скорости, можно построить выражения для фазовых скоростей решений, допускаемых разрывным методом Галеркина:

• полудискретизованная система:

$$V_m^{sd}(N,\alpha,\gamma) = \frac{\omega(s_m)}{|\mathbf{k}|} = \pm \frac{1}{|\mathbf{k}|h} s_m(N,\alpha,\gamma) = \pm \frac{N}{2\pi} s_m(N,\alpha,\gamma); \tag{14}$$

• схема с дискретизацией по времени, где $\hat{\omega} = \frac{2}{\tau} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$:

$$V_m^{lf}(N,\alpha,\chi,\gamma) = \pm \frac{NV_P}{\pi\chi} \arcsin\left(\frac{\chi}{2V_P}s_m(N,\alpha,\gamma)\right).$$
(15)

Задачей дисперсионного анализа является построение оценок ошибок численной фазовой скорости по сравнению со скоростью решения дифференциальной задачи, при этом основной интерес представляет диапазон "средних" частот, т.е. частот/длин волн, при которых дискретизация составляет от двух до 100 ячеек сетки на длину волны.

4. Численное исследование дисперсии. Прежде чем переходить к классическому исследованию зависимости численной ошибки от направления распространения и дискретизации, следует отметить, что размерности матриц L и S равны удвоенному числу степеней свободы в одной ячейке сетки для каждой компоненты вектора скорости. Если в качестве базисных функций используются линейные функции — полиномы первой степени (P1-формулировка), то число степеней свободы (количество базисных функции) в ячейке равно трем; в результате число сингулярных чисел рассматриваемой матрицы равно 12. При использовании полиномов второй степени (P2-формулировка) число независимых сингулярных чисел равно 24, в случае P3-формулировки это число равно 40. Это означает, что наряду с модами, близкими к физическим, т.е. теми, которые асимптотически сходятся к решению дифференциальной задачи, присутствует большое количество нефизичных решений, которые, как показано ниже, во многом определяют жесткость условия устойчивости разрывного метода Галеркина.

Анализ численной дисперсии разрывного метода Галеркина удобно проводить в сравнении с аналогичным анализом для конечно-разностных схем и, в частности, для схем второго и четвертого порядков аппроксимации. Для этих двух схем параметры, аналогичные сингулярным числам в анализе разрывного метода Галеркина, имеют следующий вид:

- для схемы второго порядка [20, 31, 34, 44]: $s^{fd2} = 2V\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi\cos(\alpha)}{N}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi\sin(\alpha)}{N}\right)}$,
- для схемы четвертого порядка [29, 33, 34]: $s^{fd4} = 2V\sqrt{\hat{k}_1^2 + \hat{k}_2^2}$,

$$\widehat{k}_1 = \frac{9}{8} \sin\left(\frac{\pi \cos(\alpha)}{N}\right) - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{3\pi \cos(\alpha)}{N}\right), \quad \widehat{k}_2 = \frac{9}{8} \sin\left(\frac{\pi \sin(\alpha)}{N}\right) - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{3\pi \sin(\alpha)}{N}\right)$$

В этих обозначениях V используется как для скорости продольной волны, т.е. V_P , так и для обозначения скорости поперечной волны, т.е. V_S , поскольку фазовые скорости плоских волн для схем на сдвинутых сетках вычисляются независимо.

4.1. Полудискретизованная постановка. Исследование численной дисперсии удобно начать с задач, в которых производные по времени не аппроксимированы конечно-разностными операторами. В этом случае ошибка фазовой скорости зависит от числа ячеек сетки на длину волны, направления распространения и отношения скоростей волн в дифференциальной задаче и не зависит от дополнительного параметра — числа Куранта.

4.1.1. Численная анизотропия. Традиционно первым шагом в исследовании численной дисперсии является определение зависимости ошибки от направления распространения. Это дает возможность ограничить дальнейшие исследования только экстремальными направлениями — теми, вдоль которых ошибка максимальна для всех значений прочих параметров. На рис. 2 и 3 приведены нормализованные на себя относительные ошибки фазовых скоростей

relative error for finite-diffrence schemes



--- 2-nd order --- 4-th order

Рис. 2. Относительная ошибка фазовых скоростей, нормированная на себя, для стандартной схемы на сдвинутых сетках второго (сплошная линия) и четвертого порядка (пунктирная линия) аппроксимации по пространству

при N = 7 и $\gamma = \sqrt{2}$

$$\varepsilon^{\text{norm}}(\alpha, N_0, \gamma_0) = \left| \frac{\varepsilon(\alpha, N_0, \gamma_0)}{\max_{\alpha \in [0, 2\pi)} \left| \varepsilon(\alpha, N_0, \gamma_0) \right|} \right|, \quad \text{где} \quad \varepsilon = 1 - \frac{V_j^{sd}(\alpha, N_0, \gamma_0)}{V_j}$$

для конечно-разностных схем и разрывного метода Галеркина различного порядка точности соответственно. В данных обозначениях индекс j определяет тип рассматриваемой волны и может принимать значения P или S.

В случае конечно-разностных схем приводится ошибка только для одной из волн, поскольку для второй волны она абсолютно аналогична в силу того, что конечно-разностные продольные и поперечные волны разделяются в точности так же, как и решения дифференциальной задачи [31]. Более того, можно легко показать аналитически, что экстремальными направлениями, вдоль которых достигается максимум ошибки фазовой скорости для конечно-разностных схем, являются направления вдоль осей координат, т.е. $\alpha = n\pi/2$, где n — целое, что подтверждается рис. 2. При рассмотрении дисперсионной ошибки в разрывном методе Галеркина необходимо учитывать как ошибку продольных, так и поперечных волн, поскольку в дискретизованной задаче они уже не разделяются, и, как следствие, задача не может быть сведена к скалярной. Из рис. 3 следует, что максимум ошибки фазовой скорости достигается в направлениях $\alpha = \pi/4 + n\pi$, что обусловлено геометрией используемой сетки (рис. 1).



Рис. 3. Относительная ошибка фазовых скоростей, нормированная на себя, для разрывного метода Галеркина различного порядка. Сплошные синие линии соответствуют ошибке для Р-волны, пунктирные — S-волне, N = 7 и γ = √2

4.1.2. Зависимость от отношения V_P/V_S . Как уже отмечалось выше, в случае использования конечно-разностных схем на сдвинутых сетках для аппроксимации системы уравнений динамической теории упругости в случае изотропной среды дисперсионное соотношение распадается на абсолютно независимые сомножители, отвечающие различным типам волн. В случае применения разрывного метода Галеркина такого разделения не происходит и фазовые скорости численных решений, т.е. плоских волн, зависят от отношения скоростей $\gamma = V_P/V_S$ дифференциальной задачи. В данном разделе приводится численное исследование зависимости опшбки фазовых скоростей от γ для фиксированного направления $\alpha = \pi/4$ и шага сетки. Фиксация шага сетки означает, что для одной из рассматриваемых волн дискретизация в терминах числа ячеек сетки на длину волны фиксируется, для волны второго типа дискретизация меняется в зависимости от изменения параметра γ . Из физических соображений [32] интервал, в котором изменяется отношение продольной и поперечной скоростей в среде, достаточно ограничить следующими значениями: $\gamma \in [\sqrt{3}, 10]$.

В зависимости от того, для какой из волн дискретизация фиксировалась, рассматривались две различные ситуации для каждой из формулировок (P1–P3) разрывного метода Галеркина. В одном случае предполагалось, что число ячеек сетки на длину волны фиксировано для S-волны: $N_s = 5$, а для P-волны это число возрастает с ростом параметра γ , т.е. $N_p \in [8.66; 50]$. В этом случае ошибка для S-волны зависит исключительно от параметра γ , в то время как для P-волны — от параметра γ и дискретизации. Во втором случае фиксировалась дискретизация для Р-волны на уровне $N_p = 50$, а дискретизация для S-волны уменьшалась с ростом параметра γ так, что $N_s \in [28.87; 10]$. Зависимость ошибки фазовых скоростей от параметра $\gamma = V_P/V_S$ для разрывного метода Галеркина с использованием полиномов различной степени в качестве базисных функций приведена на рис. 4–6. Из приведенных графиков следует, что ошибка фазовой скорости P-волны практически не зависит от рассматриваемого параметра $\gamma = V_P/V_S$. Для S-волны ошибка достаточно быстро нарастает при росте γ в окрестности $\gamma = \sqrt{3}$, но потом выходит на асимптотику.



Рис. 4. Относительная ошибка фазовых скоростей в зависимости от отношения γ = V_P/V_S для P1-формулировки метода Галеркина: а) график для случая фиксированной дискретизации для S-волны, б) для P-волны



Рис. 5. Относительная ошибка фазовых скоростей в зависимости от отношения $\gamma = V_P/V_S$ для Р2-формулировки метода Галеркина: а) график для случая фиксированной дискретизации для S-волны, б) для P-волны

4.1.3. Численная дисперсия. Как уже отмечалось выше, численная дисперсия — это опибка фазовой скорости в зависимости от дискретизации (числа точек, ячеек или степеней свободы на длину волны). В предыдущем разделе было показано, что для разрывного метода Галеркина максимальная опибка фазовой скорости достигается при распространении волны в направлении $\alpha = \pi/4$, именно для этого направления будут проводиться дальнейшие исследования численной дисперсии. Для корректного сравнения полученных результатов с численной дисперсией, характерной для конечно-разностных аппроксимаций, опибка для схем второго и четвертого порядков приводится в направлении $\alpha = 0$ — экстремальном для рассматриваемых конечно-разностных схем. Отношение скоростей V_P к V_S было выбрано равным $\sqrt{3}$. Учитывая результаты, представленные в предыдущем разделе, зависимость от отношения скоростей не ярко выражена, поэтому результаты можно считать достаточно общими. Согласно графикам зависимости численной дисперсии от числа ячеек сетки на длину волны, приведенным на рис. 7а–9а, все три рассматриваемые формулировки метода Галеркина допускают более низкий уровень численной дисперсии, чем схема второго порядка аппроксимации. Однако в сравнении со схемой четвертого порядка метод

Галеркина, основанный на полиномах первой степени, допускает более высокий уровень ошибки.

Важным отличием метода Галеркина от метода конечных разностей является наличие более чем одной степени свободы на ячейку сетки, что приводит к необходимости хранения большего объема данных и выполнения большего числа арифметических операций. По этой причине корректным является сравнение численной дисперсии не по отношению к числу ячеек сетки на длину волны, а по отношению к числу степеней свободы на длину волны. Для рассматриваемой регулярной (квадратной) сетки каждая ее ячейка сформирована из двух прямоугольных треугольников, в каждом из которых число степеней свободы определяется по формуле r = (p+1)(p+2), где p — порядок полиномов, используемых в качестве базисных функций.



Рис. 6. Относительная ошибка фазовых скоростей в зависимости от отношения γ = V_P/V_S для Р3-формулировки метода Галеркина: а) график для случая фиксированной дискретизации для S-волны, б) для P-волны



Рис. 7. Модуль относительной ошибки фазовой скорости для метода Галеркина первого порядка (сплошная линия соответствует Р-волне, пунктирная — S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (а) и от числа степеней свободы на длину волны (б)

В результате для полиномов первого порядка число степеней свободы (dof — от английского degrees of freedom) составляет 6, для второго порядка 12, для третьего порядка 20. Учитывая, что приведенные значения относятся к квадратной ячейке, а дисперсия измеряется по отношению к линейным размерам, для дальнейшего анализа достаточно предположить, что связь между линейным размером ячейки — шагом сетки, и числом степеней свободы для рассматриваемых формулировок метода Галеркина определяется как корень квадратный из приведенных значений, т.е. $N_d = N\sqrt{d}$, где N — число ячеек на длину волны, d — число степеней свободы в ячейке сетки, N_d — число степеней свободы на длину волны.

Зависимость численной дисперсии от числа степеней свободы на длину волны можно увидеть на рис. 76–96. Видно, что метод Галеркина, использующий полиномы первого порядка, допускает самый высокий уровень численной дисперсии — выше, чем схема второго порядка аппроксимации. Повышение порядка полиномов в методе Галеркина до второго существенно снижает численную ошибку, хотя она все еще выше, чем для схемы четвертого порядка. Метод Галеркина, основанный на полиномах третьего порядка, является наименее дисперсионным, как и ожидалось, однако эффективность его применения, с учетом жесткого условия устойчивости и объема вычислений, обсуждается ниже.



Рис. 8. Модуль относительной ошибки фазовой скорости для метода Галеркина второго порядка (сплошная линия соответствует Р-волне, пунктирная — S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (а) и от числа степеней свободы на длину волны (б)



Рис. 9. Модуль относительной ошибки фазовой скорости для метода Галеркина третьего порядка (сплошная линия соответствует Р-волне, пунктирная — S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (а) и от числа степеней свободы на длину волны (б)

4.2. Явная по времени схема. Выше рассматривалась полудискретная постановка, или аппроксимация методом прямых; такая формулировка позволяет исследовать свойства пространственной дискретизации без учета эффектов, оказываемых конкретной аппроксимацией производных по времени. Такое изучение позволяет выявить основные качественные характеристики численной схемы, характерные для большинства дискретизаций по времени. Однако для получения точных количественных оценок подобный анализ следует проводить для конкретной используемой схемы по времени. В рамках данной работы предполагается использование только явных схем на сдвинутых сетках, т.е. для аппроксимации производных по времени используется оператор (5). Как уже отмечалось выше, в этом случае отличие от предыдущего случая будет в том, что в выражении для фазовой скорости (15) возникает arcsin, в котором направление распространения волны является одним из аргументов. При этом arcsin является функцией монотонной; как следствие, направления, в которых достигается максимальная ошибка фазовой скорости для полудискретной постановки и для явной схемы по времени, совпадают. По этой причине ниже приводится только исследование численной дисперсии в зависимости от числа Куранта и числа точек (степеней свободы на длину волны).



Рис. 10. Нормализованная ошибка фазовой скорости в зависимости от числа Куранта для конечно-разностных схем (а), для метода Галеркина с полиномами первого порядка (б), второго порядка (в) и третьего порядка (г). Сплошная линия соответствует Р-волне, пунктирная — S-волне, точки соответствуют схеме второго порядка, точечно-пунктирная линия соответствует схеме четвертого порядка

4.2.1. Зависимость от числа Куранта. Прежде чем переходить к численному исследованию дисперсии для дискретизованной по времени задачи, следует отметить, что соотношение (15) может быть использовано для построения необходимого условия устойчивости. Для устойчивости необходимо, чтобы значения arcsin были вещественными, в противном случае система будет допускать решения в виде плоских волн с двумя комплексными фазовыми скоростями с заведомо различными знаками мнимых частей, в результате одна из мод всегда будет неустойчивой. Учитывая данное требование, можно сформулировать необходимое условие устойчивости $\chi = \frac{\tau}{h} \leq \frac{2V_P}{\max s_m(N, \alpha, \gamma)}$, где максимум берется по всем

сингулярным значениям, включая нефизичные моды, по всем направлениям и всем пространственным дискретизациям. Для конечно-разностных схем данное соотношение может быть построено аналитически и задается такими формулами: для схемы второго порядка $\chi \leq \chi_0^{fd2} = 1/\sqrt{2}$, для схемы четвертого порядка $\chi \leq \chi_0^{fd4} = \frac{6}{7\sqrt{2}}$. Для разрывного метода Галеркина оценки получены численно: для полиномов

первой степени $\chi \leq \chi_0^{P1} \approx 0.2582$, для полиномов второй степени $\chi \leq \chi_0^{P2} \approx 0.144$, для полиномов третьей степени $\chi \leq \chi_0^{P3} \approx 0.093$.

Следует заметить, что данные соотношения верны для сеток с одинаковыми шагами по двум пространственным направлениям. Данные соотношения подтверждают тот факт, что разрывный метод Галеркина требует выполнения чрезвычайно жесткого условия устойчивости [9, 20], что необходимо учитывать при проведении как дисперсионного анализа, так и анализа вычислительной сложности алгоритма.

Для дальнейшего проведения исследования зависимости дисперсионной опибки от числа Куранта для различных пространственных дискретизаций удобно ввести нормализованное число Куранта $\hat{\chi} = \chi/\chi_0^*$, где звездочка может обозначать любой из пяти рассматриваемых методов. Нормализованное число Куранта изменяется в пределах от ноля до единицы. На рис. 10 приведены нормированные на единицу значения ошибки фазовой скорости в зависимости от нормализованного числа Куранта $\hat{\chi} \in [0, 1]$ для всех рассматриваемых подходов. Как и ожидалось, для схемы второго порядка аппроксимации наибольшее значение ошибки достигается при $\hat{\chi}$, близких к нулю, а при увеличении $\hat{\chi}$ ошибка падает. В случае схем более высокого порядка пространственной аппроксимации (включая рассматриваемые вариации метода Галеркина) зависимость противоположная. Такое поведение является нормальным для схем, у которых порядок пространственной аппроксимации превосходит порядок аппроксимации по времени.



Рис. 11. Модуль относительной ошибки фазовой скорости для метода Галеркина первого порядка (сплошная линия соответствует Р-волне, пунктирная — S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (а) и от числа степеней свободы на длину волны (б). Явная по времени схема

4.2.2. Численная дисперсия. В данном разделе приводится анализ численной дисперсии для рассматриваемых подходов в зависимости от пространственной дискретизации (число ячеек сетки на длину волны и число степеней свободы на длину волны). Формально следует рассмотреть два случая — малые значения чисел Куранта и значения, близкие к единице, поскольку поведение у изучаемых алгоритмов в зависимости от значения числа Куранта существенно различное. Однако, с одной стороны, случай малых чисел Куранта близок к изучению дисперсионных свойств метода прямых; с другой стороны, в реальных вычислениях обычно используются как можно бо́льшие значения чисел Куранта для того, чтобы уменьшить вычислительную сложность алгоритма. По этой причине в данном разделе приводится анализ численной дисперсии при фиксированном числе Куранта, равном 0.7. Остальные параметры — такие же, как и в анализе метода прямых: направления распространения $\alpha = \pi/4$ для разрывного метода Галеркина и $\alpha = 0$ для конечно-разностных схем; отношение скоростей V_P к V_S равно $\sqrt{3}$. Модули относительных ошибок фазовых скоростей для конечно-разностных схем и для метода Галеркина в зависимости от числа ячеек на длину волны и от числа степеней свободы на длину волны приведены на рис. 11–13.

Результаты, полученные для дискретизованной по времени постановки, согласуются с результатами, соответствующими методу прямых: численная дисперсия в зависимости от числа ячеек сетки на длину волны для разрывного метода Галеркина ниже, чем для стандартных конечно-разностных схем второго и четвертого порядков аппроксимации, при этом если рассматривается ошибка в зависимости от числа степеней свободы на длину волны, то оказывается, что дисперсия для метода Галеркина с полиномами первого порядка выше, чем у любой из двух конечно-разностных схем. Повышение порядка базисных полиномов до второго в разрывном методе Галеркина приводит к существенному снижению уровня численной дисперсии. Дальнейшее повышение порядка ожидаемо понижает дисперсию, однако несущественно. При этом происходит квадратичный рост числа операций на одну степень свободы и существенное усиление необходимого условия устойчивости, что, в свою очередь, приводит к увеличению числа временных слоев и к увеличению вычислительной сложности алгоритма. Более того, как следует из графиков численной дисперсии для метода Галеркина на полиномах третьей степени, их применение является обоснованным на сетках менее 5 точек на длину волны, в противном случае избыточная точность алгоритма обеспечивается его чрезвычайно высокой вычислительной сложностью и низкой эффективностью. Однако использование столь грубых сеток в геофизике необоснованно, поскольку это является занижением дискретизации модели упругой среды.



Рис. 12. Модуль относительной ошибки фазовой скорости для метода Галеркина второго порядка (сплошная линия соответствует Р-волне, пунктирная — S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (а) и от числа степеней свободы на длину волны (б). Явная по времени схема



Рис. 13. Модуль относительной опибки фазовой скорости для метода Галеркина третьего порядка (сплошная линия соответствует Р-волне, пунктирная — S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (а) и от числа степеней свободы на длину волны (б). Явная по времени схема

5. Заключение. В работе приведен дисперсионный анализ разрывного метода Галеркина на треугольных сетках в применении к системе уравнений динамической теории упругости. Исследование проводилось для дискретизаций среднего диапазона — от 3 до 100 ячеек на длину волны. Использование дискретизаций ниже указанного диапазона нецелесообразно, поскольку это приводит к недостаточной детализации описания модели. При дискретизациях выше этого диапазона асимптотические оценки выполняются с достаточной точностью; как следствие, анализа численной дисперсии здесь не требуется. Анализ проводился для трех формулировок разрывного метода Галеркина, отличающихся набором используемых базисных функций: P1 — полиномы первой степени, P2 — полиномы второй степени и P3 — полиномы третьей степени. Более того, дисперсионные свойства метода Галеркина сравнивались со свойствами стандартных схем на сдвинутых сетках второго и четвертого порядков. Показано, что в рабочем диапазоне дискретизаций разрывный метод Галеркина с полиномами первой степени в качестве базисных функций является наименее точным из рассматриваемых подходов. Дисперсионная ошибка P2-формулировки метода Галеркина сравнима с ошибкой конечно-разностной схемы четвертого порядка, если рассматривается по отношению к числу степеней свободы на длину волны. Использование P3-формулировки позволяет существенно снизить численную дисперсию до уровня 0.001% для рассматриваемых дискретизаций (3–100 ячеек сетки на длину волны), что зачастую является избыточным для сейсмического моделирования.

Отдельно следует отметить, что с увеличением порядка полиномов в разрывном методе Галеркина происходит квадратичный рост числа степеней свободы при фиксированной сетке. При этом необходимый для проведения моделирования объем оперативной памяти растет пропорционально числу степеней свободы, в то время как число операций с плавающей точкой растет квадратично по отношению к числу степеней свободы на ячейку сетки. В результате можно утверждать, что для типичных задач сейсмического моделирования с дискретизацией порядка 3–20 ячеек сетки на длину волны и с требованием, чтобы численная дисперсия не превосходила 0.05%, оптимальным является разрывный метод Галеркина с полиномами второй степени в качестве базисных функций. Формулировка Р1 не обеспечивает достаточной точности расчетов, в то время как Р3-формулировка является чрезвычайно ресурсоемкой с вычислительной точки зрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 13-05-00076, 13-05-12051, 14-05-00049, 14-05-93090, 15-35-20022, 15-05-01310).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Варыгина М.П., Похабова М.А., Садовская О.В., Садовский В.М. Вычислительные алгоритмы для анализа упругих волн в блочных средах с тонкими прослойками // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 435–442.
- 2. Вишневский Д.М., Лисица В.В., Решетова Г.В. Численное моделирование распространения сейсмических волн в средах с вязкоупругими включениями // Вычислительные методы и программирование. 2013. 14. 155–165.
- 3. Гадыльшин К.Г., Чеверда В.А. Обращение полных волновых полей нелинейным методом наименьших квадратов: SVD анализ // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 499–513.
- 4. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
- 5. *Годунов С.К., Роменский Е.И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1998.
- 6. Костин В.И., Лисица В.В., Решетова Г.В., Чеверда В.А. Конечно-разностный метод численного моделирования распространения сейсмических волн в трехмерно-неоднородных разномасштабных средах // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 321–329.
- 7. Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов для некоторых краевых задач математической физики. І. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. 4, № 3. 449–465.
- Садовский В.М., Садовская О.В. Вычислительный алгоритм для расчета вязкоупругих волн в среде Кельвина– Фойхта // Вычислительные методы и программирование. 2014. 15. 98–108.
- 9. Ainsworth M., Monk P., Muniz W. Dispersive and dissipative properties of discontinuous Galerkin finite element methods for the second-order wave equation // Journal of Scientific Computing. 2006. 27, N 1–3. 5–40.
- 10. Ainsworth M. Dispersive and dissipative behaviour of high order discontinuous Galerkin finite element methods // Journal of Computational Physics. 2004. 198, N 1. 106–130.
- 11. Ainsworth M., Wajid H.A. Dispersive and dissipative behavior of the spectral element method // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2009. 47, N 5. 3910–3937.
- Babuška I., Strouboulis T., Gangaraj S.K., Upadhyay C.S. Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of the recovered derivatives // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1997.
 140, N 1–2. 1–37.
- 13. De Basabe J.D., Sen M.K., Wheeler M.F. Seismic wave propagation in fractured media: a discontinuous Galerkin approach // SEG Technical Program Expanded Abstracts. 2011. **30**, N 1. 2920–2924. doi: 10.1190/1.3627801.
- 14. Bérenger J.-P. The Huygens subgridding for the numerical solution of the Maxwell equations // Journal of Computational Physics. 2011. 230, N 14. 5635–5659.
- 15. Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Symes W.W. Modeling of a constant Q: Methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique // Geophysics. 1995. **60**, N 1. 176–184.

- Bohlen T. Parallel 3-D viscoelastic finite difference seismic modelling // Computers and Geosciences. 2002. 28, N 8. 887–899.
- 17. Bohlen T., Saenger E.H. Accuracy of heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of Rayleigh waves // Geophysics. 2006. 71, N 4. T109–T115.
- Carcione J.M., Kosloff D., Kosloff R. Wave propagation simulation in a linear viscoacoustic medium // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1988. 93, N 2. 393–401.
- Carcione J.M., Picotti S., Santos J.E. Numerical experiments of fracture-induced velocity and attenuation anisotropy // Geophysical Journal International. 2012. 191, N 3. 1179–1191.
- 20. Cohen G. Higher-order numerical methods for transient wave equations. Berlin: Springer, 2002.
- Davydycheva S., Druskin V., Habashy T. An efficient finite-difference scheme for electromagnetic logging in 3D anisotropic inhomogeneous media // Geophysics. 2003. 68, N 5. 1525–1535.
- 22. Dumbser M., Käser M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes II. The three-dimensional isotropic case // Geophysical Journal International. 2006. 167, N 1. 319–336.
- Etienne V., Chaljub E., Virieux J., Glinsky N. An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3-D elastic wave modelling // Geophysical Journal International. 2010. 183. 941–962.
- Hestholm S., Ruud B. 3D free-boundary conditions for coordinate-transform finite-difference seismic modelling // Geophysical Prospecting. 2002. 50, N 5. 463–474.
- Hu F.Q., Hussaini M.Y., Rasetarinera P. An analysis of the discontinuous Galerkin method for wave propagation problems // Journal of Computational Physics. 1999. 151, N 2. 921–946.
- 26. Hu F.Q., Atkins H.L. Eigensolution analysis of the discontinuous Galerkin method with nonuniform grids: I. One space dimension // Journal of Computational Physics. 2002. 182, N 2. 516–545.
- 27. Käser M., Dumbser M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes — I. The two-dimensional isotropic case with external source terms // Geophysical Journal International. 2006. 166, N 2. 855–877.
- 28. Kostin V., Lisitsa V., Reshetova G., Tcheverda V. Simulation of Seismic Waves Propagation in Multiscale Media: Impact of Cavernous/Fractured Reservoirs // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 7133. Heidelberg: Springer, 2012. 54–64.
- 29. Levander A.R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms // Geophysics. 1988. 53, N 11. 1425–1436.
- 30. Lisitsa V., Podgornova O., Tcheverda V. On the interface error analysis for finite difference wave simulation // Computational Geosciences. 2010. 14, N 4. 769–778.
- 31. Lisitsa V., Vishnevskiy D. Lebedev scheme for the numerical simulation of wave propagation in 3D anisotropic elasticity // Geophysical Prospecting. 2010. 58, N 4. 619–635.
- 32. Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J. The rock physics handbook: tools for seismic analysis of porous media. New-York: Cambridge University Press, 2009.
- 33. Moczo P., Kristek J., Gális M., Pazak P. On accuracy of the finite-difference and finite-element schemes with respect to P-wave to S-wave speed ratio // Geophysical Journal International. 2010. 182, N 1. 493–510.
- 34. Moczo P., Kristek J., Gális M. The finite-difference modelling of earthquake motions: waves and ruptures. New York: Cambridge University Press, 2014.
- 35. Monk P.B., Parrott A.K. A dispersion analysis of finite element methods for Maxwell's equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 1994. 15, N 4. 916–937.
- 36. Mulder W.A. Spurious modes in finite-element discretizations of the wave equation may not be all that bad // Applied Numerical Mathematics. 1999. **30**, N 4. 425–445.
- 37. Pissarenko D., Reshetova G.V., Tcheverda V.A. 3D finite-difference synthetic acoustic logging in cylindrical coordinates // Geophysical Prospecting. 2009. 57, N 3. 367–377.
- 38. Rojas O., Otero B., Castillo J.E., Day S.M. Low dispersive modeling of Rayleigh waves on partly staggered grids // Computational Geosciences. 2014. 18, N 1. 29–43.
- 39. Saenger E.H., Bohlen T. Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid // Geophysics. 2004. 69, N 2. 583–591.
- 40. Saenger E.H., Gold N., Shapiro S.A. Modeling the propagation of the elastic waves using a modified finite-difference grid // Wave Motion. 2000. **31**. 77–92.
- 41. Seriani G., Oliveira S.P. Dispersion analysis of spectral element methods for elastic wave propagation // Wave Motion. 2008. 45, N 6. 729–744.
- 42. Symes W.W., Vdovina T. Interface error analysis for numerical wave propagation // Computational Geosciences. 2009. 13, N 3. 363–371.
- 43. Tarrass I., Giraud L., Thore P. New curvilinear scheme for elastic wave propagation in presence of curved topography // Geophysical Prospecting. 2011. 59, N 5. 889–906.
- 44. Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method // Geophysics. 1986. **51**, N 4. 889–901.
- Virieux J., Calandra H., Plessix R.-É. A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging // Geophysical Prospecting. 2011. 59, N 5. 794–813.
- 46. Virieux J., Operto S. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics // Geophysics. 2009. 74, N 6.

WCC1–WCC26.

- 47. Virieux J., Operto S., Ben-Hadj-Ali H., Brossier R., Etienne V., Sourbier F., Giraud L., Haidar A. Seismic wave modeling for seismic imaging // The Leading Edge. 2009. 28, N 5. 538–544.
- Vishnevsky D., Lisitsa V., Tcheverda V., Reshetova G. Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves // Geophysics. 2014. 79, N 4. T219–T232.
- 49. Wilcox L.C., Stadler G., Burstedde C., Ghattas O. A high-order discontinuous Galerkin method for wave propagation through coupled elastic-acoustic media // Journal of Computational Physics. 2010. 229, N 24. 9373–9396.
- 50. Winterstein D.F. Velocity anisotropy terminology for geophysicists // Geophysics. 1990. 55, N 8. 1070–1088.
- 51. Yang H., Li F., Qiu J. Dispersion and dissipation errors of two fully discrete discontinuous Galerkin methods // Journal of Scientific Computing. 2013. 55, N 3. 552–574.
- 52. Zyserman F.I., Gauzellino P.M., Santos J.E. Dispersion analysis of a non-conforming finite element method for the Helmholtz and elastodynamic equations // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2003. 58, N 9. 1381–1395.

Поступила в редакцию 30.05.2015

Dispersion Analysis of the Discontinuous Galerkin Method as Applied to the Equations of Dynamic Elasticity Theory

V. V. Lisitsa¹

¹ Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Head of Laboratory, e-mail: lisitsavv@ipgg.sbras.ru

Received May 30, 2015

Abstract: The dispersion analysis of the discontinuous Galerkin method as applied to the equations of dynamic elasticity theory is performed. Depending on the degrees of basis polynomials, we consider the P1, P2, and P3 formulations of this method in the case of regular triangular meshes. It is shown that, for the problems of seismic modeling, the P2 formulation is optimal, since a sufficient accuracy (the numerical dispersion does not exceed 0.05%) and the computational efficiency are achieved. The application of the P1 formulation leads to an undesirably high numerical dispersion. The P3 formulation allows one to obtain accurate results, but its computational cost is very high when the number of grid cells per wavelength belongs to range between 3 and 20, which is typical for the seismic modeling.

Keywords: numerical dispersion, discontinuous Galerkin method, finite difference schemes, theory of elasticity.

References

1. M. P. Varygina, M. A. Pokhabova, O. V. Sadovskaya, and V. M. Sadovskii, "Numerical Algorithms for the Analysis of Elastic Waves in Block Media with Thin Interlayers," Vychisl. Metody Programm. **12**, 435–442 (2011).

2. D. M. Vishnevsky, V. V. Lisitsa, and G. V. Reshetova, "Numerical Simulation of Seismic Wave Propagation in Media with Viscoelastic Intrusions," Vychisl. Metody Programm. **14**, 155–165 (2013).

3. K. G. Gadylshin and V. A. Tcheverda, "Nonlinear Least-Squares Full Waveform Inversion: SVD Analysis," Vychisl. Metody Programm. 15, 499–513 (2014).

4. S. K. Godunov, *Modern Aspects of Linear Algebra* (Nauchnaya Kniga, Novosibirsk, 1997; Amer. Math. Soc., Providence, 1998).

5. S. K. Godunov and E. I. Romenskii, *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws* (Nauchnaya Kniga, Novosibirsk, 1998; Kluwer, New York, 2003).

6. V. I. Kostin, V. V. Lisitsa, G. V. Reshetova, and V. A. Tcheverda, "A Finite-Difference Method for the Numerical Simulation of Seismic Wave Propagation through Multiscale Media," Vychisl. Metody Programm. **12**, 321–329 (2011).

7. V. I. Lebedev, "Difference Analogues of Orthogonal Decompositions, Basic Differential Operators and Some Boundary Problems of Mathematical Physics. I," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **4** (3), 449–465 (1964) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **4** (3), 69–92 (1964)].

8. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, "A Numerical Algorithm for the Analysis of Viscoelastic Waves in the Kelvin–Voigt Medium," Vychisl. Metody Programm. **15**, 98–108 (2014).

9. M. Ainsworth, P. Monk, and W. Muniz, "Dispersive and Dissipative Properties of Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for the Second-Order Wave Equation," J. Sci. Comput. **27** (1–3), 5–40 (2006).

10. M. Ainsworth, "Dispersive and Dissipative Behavior of High Order Discontinuous Galerkin Finite Element Methods," J. Comput. Phys. **198** (1), 106–130 (2004).

11. M. Ainsworth and H. A. Wajid, "Dispersive and Dissipative Behavior of the Spectral Element Method," SIAM J. Numer. Anal. 47 (5), 3910–3937 (2009).

12. I. Babuška, T. Strouboulis, S. K. Gangaraj, and C. S. Upadhyay, "Pollution Error in the *h*-Version of the Finite Element Method and the Local Quality of the Recovered Derivatives," Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. **140** (1–2), 1–37 (1997).

13. J. D. De Basabe, M. K. Sen, and M. F. Wheeler, "Seismic Wave Propagation in Fractured Media: A Discontinuous Galerkin Approach," SEG Tech. Program Expanded Abstr. **30**, 2920–2924 (2011). doi: 10.1190/1.3627801

14. J.-P. Bérenger, "The Huygens Subgridding for the Numerical Solution of the Maxwell Equations," J. Comput. Phys. **230** (14), 5635–5659 (2011).

15. J. O. Blanch, J. O. A. Robertsson, and W. W. Symes, "Modeling of a Constant Q: Methodology and Algorithm for an Efficient and Optimally Inexpensive Viscoelastic Technique," Geophysics **60** (1), 176–184 (1995).

16. T. Bohlen, "Parallel 3-D Viscoelastic Finite Difference Seismic Modelling," Comput. Geosci. 28 (8), 887–899 (2002).

17. T. Bohlen and E. H. Saenger, "Accuracy of Heterogeneous Staggered-Grid Finite-Difference Modeling of Rayleigh Waves," Geophysics **71** (4), T109–T115 (2006).

18. J. M. Carcione, D. Kosloff, and R. Kosloff, "Wave Propagation Simulation in a Linear Viscoacoustic Medium," Geophys. J. Roy. Astr. Soc. **93** (2), 393–401 (1988).

19. J. M. Carcione, S. Picotti, and J. E. Santos, "Numerical Experiments of Fracture-Induced Velocity and Attenuation Anisotropy," Geophys. J. Int. **191** (3), 1179–1191 (2012).

20. G. Cohen, Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations (Springer, Berlin, 2002).

21. S. Davydycheva, V. Druskin, and T. Habashy, "An Efficient Finite-Difference Scheme for Electromagnetic Logging in 3D Anisotropic Inhomogeneous Media," Geophysics **68** (5), 1525–1535 (2003).

22. K. Dumbser and M. Käser, "An Arbitrary High-Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes – II. The Three-Dimensional Isotropic Case," Geophys. J. Int. **167** (1), 319–336 (2006).

23. V. Etienne, E. Chaljub, J. Virieux, and N. Glinsky, "An *hp*-Adaptive Discontinuous Galerkin Finite-Element Method for 3-D Elastic Wave Modelling," Geophys. J. Int. **183** (2), 941–962 (2010).

24. S. Hestholm and B. Ruud, "3D Free-Boundary Conditions for Coordinate-Transform Finite-Difference Seismic Modelling," Geophys. Prospect. **50** (5), 463–474 (2002).

25. F. Q. Hu, M. Y. Hussaini, and P. Rasetarinera, "An Analysis of the Discontinuous Galerkin Method for Wave Propagation Problems," J. Comput. Phys. **151** (2), 921–946 (1999).

26. F. Q. Hu and H. L. Atkins, "Eigensolution Analysis of the Discontinuous Galerkin Method with Nonuniform Grids: I. One Space Dimension," J. Comput. Phys. **182** (2), 516–545 (2002).

27. M. Käser and M. Dumbser, "An Arbitrary High-Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes — I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms," Geophys. J. Int. **166** (2), 855–877 (2006).

28. V. Kostin, V. Lisitsa, G. Reshetova, and V. Tcheverda, "Simulation of Seismic Waves Propagation in Multiscale Media: Impact of Cavernous/Fractured Reservoirs," in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2012), Vol. 7133, pp. 54–64.

29. A. R. Levander, "Fourth-Order Finite-Difference *P-SV* Seismograms," Geophysics **53** (11), 1425–1436 (1988).

30. V. Lisitsa, O. Podgornova, and V. Tcheverda, "On the Interface Error Analysis for Finite Difference Wave Simulation," Comput. Geosci. 14 (4), 769–778 (2010).

31. V. Lisitsa and D. Vishnevskiy, "Lebedev Scheme for the Numerical Simulation of Wave Propagation in 3D Anisotropic Elasticity," Geophys. Prospect. 58 (4), 619–635 (2010).

32. G. Mavko, T. Mukerji, and J. Dvorkin, The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis of

Porous Media (Cambridge Univ. Press, New York, 2009).

- 33. P. Moczo, J. Kristek, M. Gális, and P. Pazak, "On Accuracy of the Finite-Difference and Finite-Element Schemes with Respect to *P*-Wave to *S*-Wave Speed Ratio," Geophys. J. Int. **182** (1), 493–510 (2010).
- 34. P. Moczo, J. Kristek, and M. Gális, *The Finite-Difference Modelling of Earthquake Motions: Waves and Ruptures* (Cambridge Univ. Press, New York, 2014).
- 35. P. B. Monk and A. K. Parrott, "A Dispersion Analysis of Finite Element Methods for Maxwell's Equations," SIAM J. Sci. Comput. **15** (4), 916–937 (1994).
- 36. W. A. Mulder, "Spurious Modes in Finite-Element Discretizations of the Wave Equation May Not Be All That Bad," Appl. Numer. Math. **30** (4), 425–445 (1999).
- 37. D. Pissarenko, G. V. Reshetova, and V. A. Tcheverda, "3D Finite-Difference Synthetic Acoustic Logging in Cylindrical Coordinates," Geophys. Prospect. 57 (3), 367–377 (2009).
- 38. O. Rojas, B. Otero, J. E. Castillo, and S. M. Day, "Low Dispersive Modeling of Rayleigh Waves on Partly Staggered Grids," Comput. Geosci. 18 (1), 29–43 (2014).
- 39. E. H. Saenger and T. Bohlen, "Finite-Difference Modeling of Viscoelastic and Anisotropic Wave Propagation Using the Rotated Staggered Grid," Geophysics **69** (2), 583–591 (2004).
- 40. E. H. Saenger, N. Gold, and S. A. Shapiro, "Modeling the Propagation of the Elastic Waves Using a Modified Finite-Difference Grid," Wave Motion **31** (1), 77–92 (2000).
- 41. G. Seriani and S. P. Oliveira, "Dispersion Analysis of Spectral Element Methods for Elastic Wave Propagation," Wave Motion **45** (6), 729–744 (2008).
- 42. W. W. Symes and T. Vdovina, "Interface Error Analysis for Numerical Wave Propagation," Comput. Geosci. **13** (3), 363–371 (2009).
- 43. I. Tarrass, L. Giraud, and P. Thore, "New Curvilinear Scheme for Elastic Wave Propagation in Presence of Curved Topography," Geophys. Prospect. **59** (5), 889–906 (2011).
- 44. J. Virieux, "*P-SV* Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity–Stress Finite-Difference Method," Geophysics **51** (4), 889–901 (1986).
- 45. J. Virieux, H. Calandra, and R.-É. Plessix, "A Review of the Spectral, Pseudo-Spectral, Finite-Difference and Finite-Element Modelling Techniques for Geophysical Imaging," Geophys. Prospect. **59** (5), 794–813 (2011).
- 46. J. Virieux and S. Operto, "An Overview of Full-Waveform Inversion in Exploration Geophysics," Geophysics **74** (6), WCC1–WCC26 (2009).
- 47. J. Virieux, S. Operto, H. Ben-Hadj-Ali, et al., "Seismic Wave Modeling for Seismic Imaging," The Leading Edge 28 (5), 538–544 (2009).
- 48. D. Vishnevsky, V. Lisitsa, V. Tcheverda, and G. Reshetova, "Numerical Study of the Interface Errors of Finite-Difference Simulations of Seismic Waves," Geophysics **79** (4), T219–T232 (2014).
- 49. L. C. Wilcox, G. Stadler, C. Burstedde, and O. Ghattas, "A High-Order Discontinuous Galerkin Method for Wave Propagation through Coupled Elastic-Acoustic Media," J. Comput. Phys. **229** (24), 9373–9396 (2010).
- 50. D. F. Winterstein, "Velocity Anisotropy Terminology for Geophysicists," Geophysics **55** (8), 1070–1088 (1990).
- 51. H. Yang, F. Li, and J. Qiu, "Dispersion and Dissipation Errors of Two Fully Discrete Discontinuous Galerkin Methods," J. Sci. Comput. 55 (3), 552–574 (2013).
- 52. F. I. Zyserman, P. M. Gauzellino, and J. E. Santos, "Dispersion Analysis of a Non-Conforming Finite Element Method for the Helmholtz and Elastodynamic Equations," Int. J. Numer. Meth. Eng. **58** (9), 1381–1395 (2003).