

УДК 519.6

doi 10.26089/NumMet.v16r332

СРАВНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭФФЕКТИВНОСТЕЙ ЯВНОЙ И НЕЯВНОЙ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА НАНОСОВ В ПРИБРЕЖНЫХ ВОДНЫХ СИСТЕМАХ

А. И. Сухинов¹, Е. А. Проценко², А. Е. Чистяков³, С. А. Шретер⁴

Рассмотрена нестационарная пространственно-двумерная модель транспорта наносов в прибрежной зоне водоемов, учитывающая следующие физические параметры и процессы: пористость грунта; критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов; турбулентный обмен; динамически изменяемую геометрию дна и функцию возвышения урвня; ветровые течения; трение о дно. Построены и программно реализованы на кластере распределенных вычислений пространственно-трехмерная модель гидродинамики в прибрежной зоне водоемов и модель транспорта взвешенных частиц. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: математическая модель, транспорт наносов, распределенные вычисления, параллельное программирование, динамика морских наносов, уравнения мелкой воды, уравнение диффузии–конвекции–реакции.

Введение. Среди разнообразия природных явлений особое место по сложности, многообразию и практической значимости принадлежит процессам, протекающим в прибрежных водных системах. В условиях возрастания антропогенной нагрузки на прибрежно-шельфовые зоны реализация концепции устойчивого развития возможна только с учетом всех факторов и процессов, определяющих состояние берегов. Динамика берегов и прибрежного рельефа дна во многом определяется характером перемещения наносов в береговой зоне под воздействием волн и течений. При конструктивном преобразовании рельефов необходимо учитывать динамику профиля дна в прибрежной зоне водоема под воздействием волновых процессов. Необходимы обоснованные методы расчета для достоверного прогноза динамических процессов береговой зоны. Одним из наиболее эффективных методов исследования реальных процессов гидродинамики в настоящее время становится численное моделирование.

Таким образом, тематика работы, а именно прогнозирование формирования профиля дна в прибрежной зоне водоема при образовании наносов средствами численного моделирования, является актуальной.

1. Основные уравнения модели. Для описания динамики морских наносов в настоящей статье применяются уравнения, которые описывают переформирование прибрежной зоны водоемов, где вода и твердые частицы перемещаются в одном направлении. Исходные уравнения процесса перемещения наносов [1–5] с учетом ограничений на касательные напряжения на дне расчетной области могут быть записаны в следующем виде [3–5]:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(k \tau_b) = \operatorname{div} \left(k \frac{\tau_{bc}}{\sin \phi_0} \operatorname{grad} H \right), \quad (1)$$

$$k = \frac{A \varpi d}{((\rho_1 - \rho_0) g d)^\beta} \left| \tau_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \phi_0} \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1} h \left(\left| \tau_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \phi_0} \operatorname{grad} H \right| - \tau_{bc} \right).$$

Здесь $h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ — функция Хевисайда. Обозначения, использованные в (1), приведены в [1–5].

Уравнение (1) дополняется начальным условием $H(x, y, 0) = H_0(x, y)$. На границе расчетной области отсутствует поток, вызванный влиянием гравитационных сил: $H'_0(x, y) = 0$.

¹ Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), факультет физики, математики, информатики, ул. Инициативная, 48, 347936, г. Таганрог; декан, профессор, e-mail: sukhinov@gmail.com

² Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), факультет физики, математики, информатики, ул. Инициативная, 48, 347936, г. Таганрог; доцент, e-mail: earpros@gambler.ru

³ НИИ Многопроцессорных вычислительных систем имени академика А. В. Каляева Южного федерального университета, ул. Чехова, 2, ГСП-284, 347928, г. Таганрог; доцент, e-mail: cheese_05@mail.ru

⁴ Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), факультет физики, математики, информатики, ул. Инициативная, 48, 347936, г. Таганрог; ст. преподаватель; e-mail: sergshre@yandex.ru

В модели транспорта взвешенных частиц использована декартова система координат в горизонтальной плоскости и σ -координатная система в вертикальном направлении [6–8]:

$$\sigma = \frac{z - \eta}{h + \eta}, \quad x_\sigma = x, \quad y_\sigma = y, \quad t_\sigma = t.$$

Здесь $\sigma = a = 0$ на свободной поверхности, $\sigma = b = -1$ на дне; $H = h + \eta$ — общая глубина до свободной поверхности, $h = h(x, y)$ — глубина водного объекта, $\eta = \eta(t, x, y)$ — возвышение свободной поверхности относительно геоида (уровня моря). Для описания транспорта взвешенных частиц использовано уравнение диффузии–конвекции, которое может быть записано в следующем виде [9–11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{a - b}{H} (w - w_s) \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \left(\frac{a - b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right] + F. \end{aligned} \quad (2)$$

Непрерывная модель гидродинамики жидкости водоема представлена [12–15] — уравнениями Навье–Стокса (Рейнольдса)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a - b}{H} w \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\frac{P'_x}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \left(\frac{a - b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a - b}{H} w \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{P'_y}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{a - b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[D_v \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right], \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{a - b}{H} w \frac{\partial w}{\partial \sigma} = -\frac{P'_\sigma}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{a - b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[D_v \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right], \end{aligned}$$

— уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a - b}{H} \frac{\partial w}{\partial \sigma} = 0.$$

Сеточные уравнения, полученные в результате неявных конечно-разностных аппроксимаций, решаются с помощью алгоритма адаптивного модифицированного попеременно-треугольного метода [17–22].

2. Дискретная модель транспорта взвешенных частиц. Расчетная область вписана в параллелепипед. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи гидродинамики вводится равномерная сетка

$$\begin{aligned} \overline{w}_h = \{ t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y, \sigma_k = kh_\sigma; n = \overline{0, N_t}, i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}, k = \overline{0, N_\sigma}; \\ N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y, N_\sigma h_\sigma = 1 \}, \end{aligned}$$

где τ — шаг по времени; N_σ, h_y, h_σ — шаги по пространству; N_t — количество временных слоев; T — верхняя граница по времени; N_x, N_y, N_σ — количество узлов по пространству; l_x, l_y — границы по пространству.

Через $o_{i,j,k}$ обозначена “заполненность” ячейки (i, j, k) . Вводятся коэффициенты $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$, характеризующие заполненность областей, находящихся в окрестности ячейки.

На основе метода баланса с учетом коэффициентов заполненности контрольных областей $q_m, m = \overline{0, 6}$, можно аппроксимировать систему уравнений (2), при этом дискретный аналог уравнения для расчета

транспорта взвеси примет вид

$$\begin{aligned}
& (q_0)_{i,j,k} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\tau} + (q_0)_{i,j,k} \frac{\tau^*}{2} \frac{C_{i,j,k}^{m+1} - 2C_{i,j,k}^m + C_{i,j,k}^{m-1}}{\tau^2} + \\
& + (q_1)_{i,j,k} u_{i+1/2,j,k} \frac{C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{2h_x} + (q_2)_{i,j,k} u_{i-1/2,j,k} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i-1,j,k}^n}{2h_x} + \\
& + (q_3)_{i,j,k} v_{i,j+1/2,k} \frac{C_{i,j+1,k}^n - C_{i,j,k}^n}{2h_y} + (q_4)_{i,j,k} v_{i,j-1/2,k} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j-1,k}^n}{2h_y} + \\
& + (q_5)_{i,j,k} \frac{a-b}{H} (w_{i,j,k+1/2} - w_s) \frac{C_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k}^n}{2h_\sigma} + (q_6)_{i,j,k} \frac{a-b}{H} (w_{i,j,k-1/2} - w_s) \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j,k-1}^n}{2h_\sigma} = \\
& = (q_1)_{i,j,k} D_{i+1/2,j,k} \frac{C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{h_x^2} - (q_2)_{i,j,k} D_{i-1/2,j,k} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i-1,j,k}^n}{h_x^2} + \\
& + (q_3)_{i,j,k} D_{i,j+1/2,k} \frac{C_{i,j+1,k}^n - C_{i,j,k}^n}{h_y^2} - (q_4)_{i,j,k} D_{i,j-1/2,k} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j-1,k}^n}{h_y^2} + \\
& + (q_5)_{i,j,k} \left(\frac{a-b}{H}\right)^2 D_{i,j,k+1/2} \frac{C_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k}^n}{h_\sigma^2} - (q_6)_{i,j,k} \left(\frac{a-b}{H}\right)^2 D_{i,j,k-1/2} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j,k-1}^n}{h_\sigma^2} + F_{i,j,k}^n.
\end{aligned}$$

Слагаемое $(q_0)_{i,j,k} \frac{\tau^*}{2} \frac{C_{i,j,k}^{m+1} - 2C_{i,j,k}^m + C_{i,j,k}^{m-1}}{\tau^2}$ выступает в качестве регуляризатора [16].

3. Сравнение трудоемкостей явной и неявной схем для задачи диффузии–конвекции.

Уравнение (2) описывает изменение концентрации частиц в условиях, учитывающих перенос вещества течениями, горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузией, а также физические характеристики частиц наносов.

В настоящей статье рассматривается трехмерная математическая модель транспорта взвеси. Для описания транспорта взвешенных частиц применяется уравнение диффузии–конвекции. Для решения задачи использовались как традиционные (неявные), так и явные дискретные модели с добавлением в явные модели регуляризованного слагаемого [16]. Неявная схема предназначена для решения уравнения

$$c'_t + uc'_x + vc'_y + wc'_z = (\mu c'_x)'_x + (\mu c'_y)'_y + (\nu c'_z)'_z + f.$$

Для явной схемы используется модифицированное уравнение, заключающееся во введении разностной производной по времени второго порядка с множителем τ^* :

$$c'_t + \frac{\tau^*}{2} c''_t + uc'_x + vc'_y + wc'_z = (\mu c'_x)'_x + (\mu c'_y)'_y + (\nu c'_z)'_z + f.$$

Время расчета $Q_{\text{неявн}}$ по неявной схеме модифицированным попеременно-треугольным итерационным методом (МПТМ) можно оценить следующим образом: $Q_{\text{неявн}} = n_{tn} n(\varepsilon) N^2 q_{PTM}$, где q_{PTM} — число итераций МПТМ ($q_{PTM} \sim 50$); N — число узлов по пространству: $N = \max\{Nx, Ny\}$, Nx , Ny — число шагов по координатным осям; $n(\varepsilon) = O(N)$; $n_{tn} = T/ht_n$, T — общее время счета, ht_n — шаг по времени для неявной схемы.

Для явной схемы такая оценка имеет вид $Q_{\text{явн}} = n_{tr} N^2 q_{\text{явн}}$, где $q_{\text{явн}}$ — число итераций МПТМ ($q_{\text{явн}} \sim 14$); $N = \max\{Nx, Ny\}$, Nx , Ny — число шагов по координатным осям; $n_{tr} = T/ht_r$, T — общее время счета, ht_r — шаг по времени для явной схемы с регуляризатором.

В табл. 1 размер расчетной сетки $kNx \times kNy \times Nz = 122 \times 102 \times 13$, где $k = 1, 2, 4$; $z(C)$ — относительная погрешность, $C_{0,01}$ — концентрация, посчитанная с шагом по времени 0.01:

$$z(C) = \frac{\max |C_{0,01} - C_{ht}|}{\max(C_{ht})} \times 100\%.$$

Из табл. 1 видно, что для увеличения числа ячеек расчетной области в 2 раза в целях сохранения относительной погрешности $\approx 1\%$ для неявной схемы, решаемой модифицированным попеременно-треугольным методом, необходимо дробить шаг по времени в 2 раза, для явной схемы в этом случае шаг по времени нужно уменьшать в $\frac{1}{\sqrt{2^3}} \approx 0.36$ раз [17]. По результатам численных экспериментов получаем следующую оценку, показывающую выигрыш во времени для явной схемы по отношению к неявной, в

Таблица 1

Сравнение точности расчетов концентрации наносов неявными, явными и явными с регуляризатором схемами

	<i>ht</i>							
	0.01	0.01296	0.025	0.036	0.05	0.075	0.1	0.2
Неявная схема $Nx \times Ny \times Nz$								
$\max(C), \text{г/л} \times 10^{-4}$	8.541		8.541	8.541	8.541	8.541	8.541	8.542
$z(C), \%$			0.065	0.113	0.174	0.282	0.390	0.824
Явная схема $Nx \times Ny \times Nz$ (с регуляризатором)								
$\max(C), \text{г/л} \times 10^{-4}$	8.539		8.536		8.531	8.525	8.52	8.497
$z(C), \%$			0.232		0.625	1.027	1.436	3.16
Явная схема $Nx \times Ny \times Nz$ (без регуляризатора, $\tau^* = 0$)								
$\max(C), \text{г/л} \times 10^{-4}$	8.539		8.536		8.531	8.526	8.521	8.501
$z(C), \%$			0.229		0.611	0.993	1.375	2.906
Неявная схема $2Nx \times 2Ny \times Nz$								
$\max(C), \text{г/л} \times 10^{-4}$	8.356		8.356	8.356	8.356	8.356	8.356	8.356
$z(C), \%$			0.131	0.227	0.350	0.568	0.786	1.658
Явная схема $2Nx \times 2Ny \times Nz$ (с регуляризатором)								
$\max(C), \text{г/л} \times 10^{-4}$	8.354		8.351	8.349	8.346	8.341	8.336	8.315
$z(C), \%$			0.465	0.795	1.251	2.054	2.872	6.313
Явная схема $2Nx \times 2Ny \times Nz$ (без регуляризатора, $\tau^* = 0$)								
$\max(C), \text{г/л} \times 10^{-4}$	8.354		8.351	8.349	8.347	8.342	8.337	8.319
$z(C), \%$			0.458	0.795	1.223	1.987	2.752	5.816
Неявная схема $4Nx \times 4Ny \times Nz$								
$\max(C), \text{г/л} \times 10^{-4}$	8.322		8.322		8.322	8.322	8.322	8.322
$z(C), \%$			0.262		0.699	1.136	1.573	3.319
Явная схема $4Nx \times 4Ny \times Nz$ (без регуляризатора, $\tau^* = 0$)								
$\max(C), \text{г/л} \times 10^{-4}$	8.32	8.32	8.317		8.312	8.307	8.302	8.281
$z(C), \%$		0.051	0.928		2.500	4.104	5.739	12.61

случае размеров сетки с $122 \times 102 \times 13$ (число итераций 8):

$$\frac{Q_{\text{neiavn}}}{Q_{\text{iavn}}} = \frac{n_{t_n} n(\varepsilon) N^2 q_{PTM}}{n_{t_r} N^2 q_{\text{iavn}}} = \frac{0.072 \times 8 \times 122^2 \times 50}{0.2 \times 122^2 \times 14} \approx 10.286;$$

в случае размеров сетки $244 \times 204 \times 13$ (число итераций 10):

$$\frac{Q_{\text{neiavn}}}{Q_{\text{iavn}}} = \frac{n_{t_n} n(\varepsilon) N^2 q_{PTM}}{n_{t_r} N^2 q_{\text{iavn}}} = \frac{0.036 \times 10 \times 244^2 \times 50}{0.1 \times 244^2 \times 14} \approx 12.857;$$

в случае размеров сетки $488 \times 404 \times 13$ (число итераций 12):

$$\frac{Q_{\text{neiavn}}}{Q_{\text{iavn}}} = \frac{n_{t_n} n(\varepsilon) N^2 q_{PTM}}{n_{t_r} N^2 q_{\text{iavn}}} = \frac{0.025 \times 12 \times 488^2 \times 50}{0.075 \times 488^2 \times 14} \approx 14.286.$$

На основе проведенного численного решения модельной задачи можно сделать вывод, что при решении задачи с увеличением размеров расчетной сетки выигрыш по времени счета явной схемы только увеличивается. Таким образом, явные модифицированные схемы имеют преимущества по реальным временным

затратам (в 10–14 раз и более) по сравнению с использовавшимися ранее неявными и нерегуляризованными явными схемами. Добавление в явную схему слагаемого с регуляризатором, т.е. второй разностной производной по времени с множителем τ^* , который имеет порядок $\sim ht^2$, превращает ее в трехслойную разностную схему, для устойчивости которой достаточно выполнения условия $ht = O(1/N^{3/2})$, что является менее жестким по сравнению с ограничением на временной шаг для явной нерегуляризованной схемы $ht = O(1/N^2)$ [16].

4. Метод решения сеточных уравнений. Сеточные уравнения, полученные в результате конечно-разностных аппроксимаций, можно записать в матричном виде [18]. Для нахождения решения задачи будем использовать неявный итерационный процесс [19]

$$B \frac{x^{m+1} - x^m}{\tau_{m+1}} + Ax^m = f, \quad (3)$$

где m — номер итерации, $\tau > 0$ — итерационный параметр и B — некоторый обратимый оператор, который называется предобусловливателем, или стабилизатором. Обращение оператора B в (3) должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора A . При построении B мы исходили из аддитивного представления оператора A_0 , представляющего собой симметричную часть оператора A :

$$A_0 = R_1 + R_2, \quad R_1 = R_2^*, \quad (4)$$

где $A = A_0 + A_1$, $A_0 = A_0^*$, $A_1 = -A_1^*$.

Оператор-предобусловливатель запишется в форме

$$B = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2), \quad D = D^* > 0, \quad \omega > 0, \quad (5)$$

где D — некоторый оператор.

Соотношения (3)–(5) задают модифицированный попеременно-треугольный метод решения задачи, если определены операторы R_1 , R_2 и указаны способы определения параметров τ_{m+1} , ω и оператора D . Оценка скорости сходимости разработанного алгоритма адаптивного модифицированного попеременно-треугольного метода минимальных поправок для расчета сеточных уравнений с несамосопряженным оператором [20–22] имеет вид

$$\rho \leq \frac{\nu^* - 1}{\nu^* + 1}, \quad \nu^* = \nu \left(\sqrt{1+k} + \sqrt{k} \right)^2, \quad k = \frac{(B^{-1}A_1\omega^m, A_1\omega^m)}{(B^{-1}A_0\omega^m, A_0\omega^m)},$$

где ν — число обусловленности оператора C_0 , $C_0 = B^{-1/2}A_0B^{-1/2}$.

5. Параллельный вариант метода решения сеточных уравнений. Идея параллельного алгоритма метода решения сеточных уравнений заключается в следующем [22]. После разбиения исходной расчетной области на части по двум координатным направлениям каждый процессор получает свою расчетную область, как показано на рис. 1, при этом смежные области перекрываются двумя слоями узлов по направлению, перпендикулярному плоскости разбиения.

После того как каждый процессор получит информацию для своей части области, рассчитывается вектор невязки и его равномерная норма. Затем каждый процессор определяет максимальный по модулю элемент вектора невязки и передает его значение всем оставшимся вычислителям. Теперь для вычисления равномерной нормы вектора невязки достаточно на каждом процессоре найти максимальный элемент.

Рассмотрим параллельный алгоритм расчета вектора поправки:

$$(D + \omega_m R_1)D^{-1}(D + \omega_m R_2)w^m = r^m,$$

где R_1 — нижнетреугольная матрица, а R_2 — верхнетреугольная матрица. Для вычисления вектора поправки нужно последовательно решить два уравнения:

$$(D + \omega_m R_1)y^m = r^m, \quad (D + \omega_m R_2)w^m = Dy^m.$$

Вначале вычисляется вектор y^m , при этом расчет начинается в левом нижнем углу. Затем из правого верхнего угла начинается вычисление вектора поправки w^m . Схема расчета вектора y^m изображена на рис. 2 (показана передача элементов после расчета двух слоев первым процессором).

На первом шаге вычислений первый процессор обрабатывает верхний слой. Затем осуществляется передача перекрывающихся элементов смежным процессорам. На следующем шаге первый процессор обрабатывает второй слой, а его соседи — первый. Передача элементов после расчета двух слоев первым

процессором показана на рис. 2. В схеме для расчета вектора y^m только первый процессор не требует дополнительной информации и может независимо от других процессоров вести обработку своей части области, остальные процессоры ждут результатов от предыдущего процессора, пока он не передаст вычисленные значения сеточных функций для узлов сетки, располагающихся в предшествующих позициях данной строки. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут рассчитаны все слои. Аналогичным образом можно решить линейную систему с верхнетреугольной матрицей для расчета вектора поправки. Далее вычисляются скалярные произведения [20–22] и выполняется переход на следующий итерационный слой.

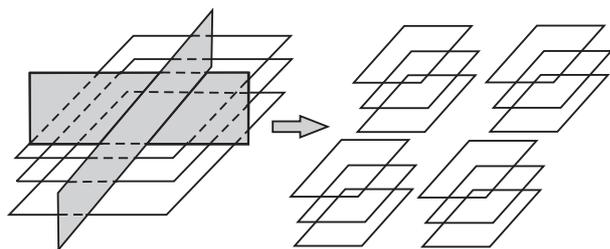


Рис. 1. Декомпозиция области

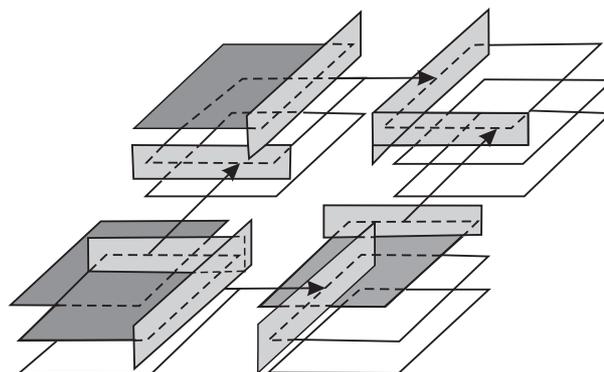


Рис. 2. Схема для расчета вектора y^m

Алгоритм адаптивного попеременно-треугольного метода реализован на многопроцессорной вычислительной системе (МВС), установленной в Южном Федеральном университете. Пиковая производительность МВС составляет 18.8 TFlops. МВС включает в себя 8 компьютерных стоек. Вычислительное поле МВС построено на базе инфраструктуры HP BladeSystem c-class с интегрированными коммуникационными модулями, системами электропитания и охлаждения. В качестве вычислительных узлов используется 128 однотипных 16-ядерных Blade-серверов HP ProLiant BL685c, каждый из которых оснащен четырьмя 4-ядерными процессорами AMD Opteron 8356 2.3 GHz и оперативной памятью в объеме 32 ГБ. Общее количество вычислительных ядер в комплексе — 2048, суммарный объем оперативной памяти — 4 ТБ. Результаты расчета ускорения и эффективности в зависимости от количества процессоров для параллельного варианта адаптивного попеременно-треугольного метода приведены в табл. 2.

Таблица 2
Зависимость ускорения и эффективности от количества процессоров

Количество процессоров	Время, с	Ускорение	Эффективность
1	7.490639	1	1
2	4.151767	1.804	0.902
4	2.549591	2.938	0.734
8	1.450203	5.165	0.646
16	0.882420	8.489	0.531
32	0.458085	16.351	0.511
64	0.265781	28.192	0.44
128	0.171535	43.668	0.341

6. Численные эксперименты по осаждению взвеси и переформированию дна с использованием трехмерной модели гидродинамики. На основе разработанного комплекса для МВС был выполнен расчет ущерба рыбному хозяйству за период ремонтного черпания Подходного судоходного канала к причалам Архангельского терминала. Производилось моделирование распространения взвешенных частиц при выгрузке трюма самоотвозного землесоса в отвал. Исходными данными являются: глубина водоема 10 м; объем загрузки 741 м³; скорость течения 0.2 м/с; скорость осаждения 2.042 мм/с; плотность грунта 1600 кг/м³; процентное содержание пылеватых частиц (d меньше 0.05 мм) в песчаных грунтах — 26.83%. Параметры расчетной области: длина 3 км; ширина 1.4 км; шаг по горизонтальной пространственной координате 20 м; шаг по вертикальной пространственной координате 1 м; расчетный интервал 2 часа.

На рис. 3–6 приведена динамика изменения концентрации взвешенных частиц с течением времени.

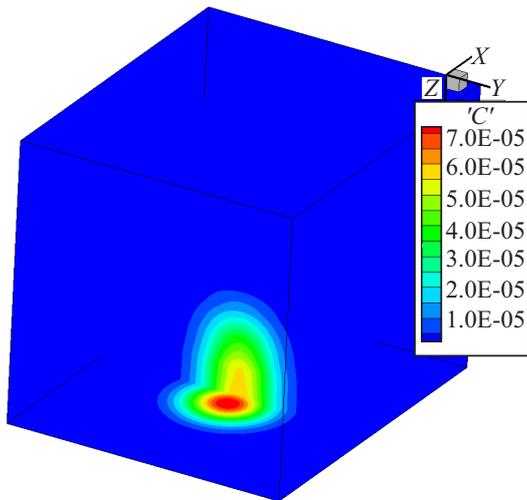


Рис. 3. Концентрация взвешенных частиц через 15 мин

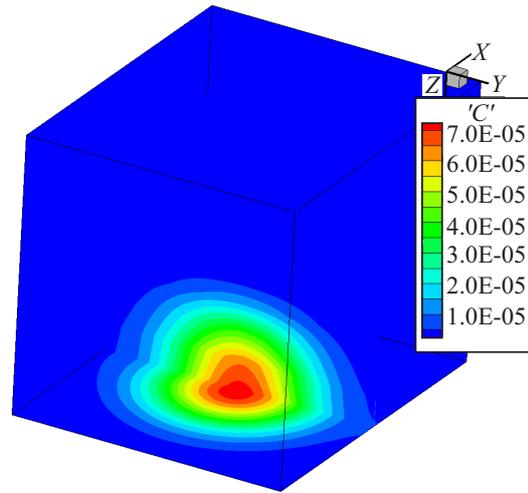


Рис. 4. Концентрация взвешенных частиц через 30 мин

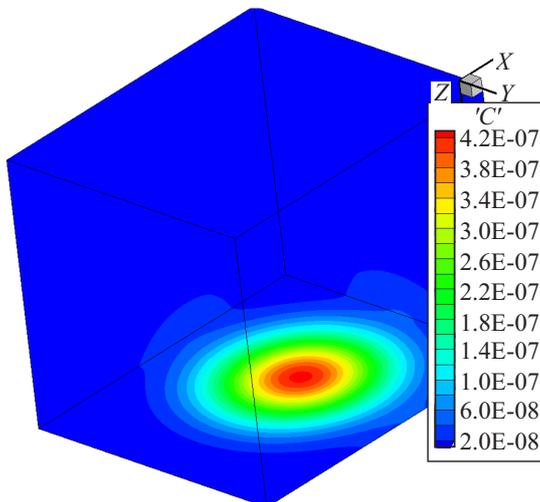


Рис. 5. Концентрация взвешенных частиц через 1 час

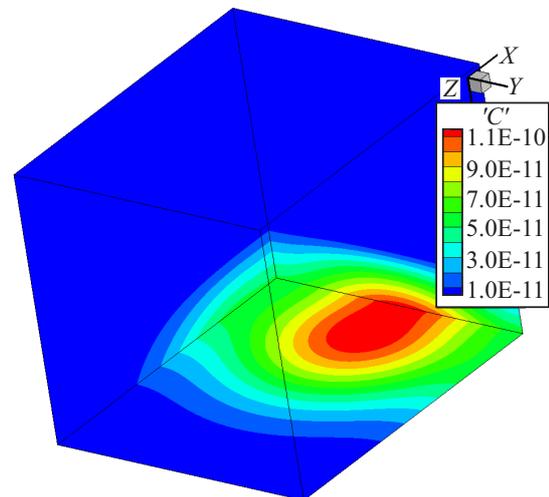


Рис. 6. Концентрация взвешенных частиц через 2 часа

Палитрой показано значение концентрации взвешенных частиц. Расчетный интервал составлял: 15 мин; 30 мин; 1 час; 2 часа соответственно. Направление течения вдоль оси OX .

В инженерных расчетах площадь заиления вычисляется по эмпирической формуле

$$F = \frac{B_1 + B_2}{2L}, \quad B_2 = B_1 + 2 \operatorname{tg} 13^\circ L. \quad (6)$$

На рис. 7 приведены зависимости ширины зоны смешения в метрах (влияние диффузионного перемешивания на картины распределения взвешенных частиц) от расстояния до створа в метрах (влияние конвективного переноса), рассчитанные на основе разработанного программного комплекса (на рис. 7 показаны кружками) и на основе формулы (6) (показаны сплошной линией).

Из результатов численных экспериментов видно, что в случае расстояния до створа 150 м и менее можно принять гипотезу о том, что интенсивность диффузионного перемешивания зависит линейно от ин-

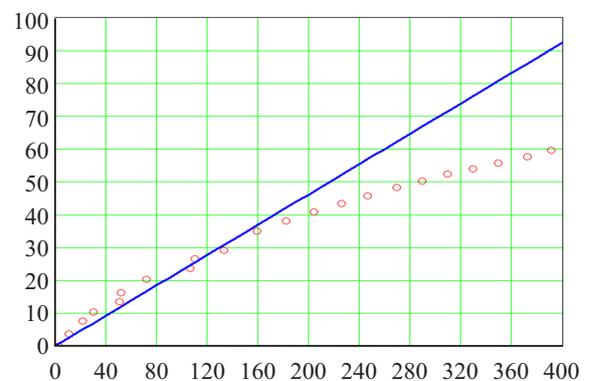


Рис. 7. Зависимости ширины зоны смешения от расстояния до створа

тенсивности конвективного переноса и составляет 23.1% ($\text{tg } 13^\circ$). При больших расстояниях преобладание конвективного переноса над диффузионными процессами усиливается.

На рис. 8 приведен результат расчета профиля горизонтальной составляющей вектора скорости движения водной среды. На рис. 9 приведены зависимости от времени (час) объемов воды (млн. м^3) с содержанием взвешенных частиц: 1) более 100 мг/л, 2) более 20 мг/л, 3) более 0.75 мг/л. Результаты эксперимента позволяют проанализировать динамику изменения геометрии дна, образования структур и наносов, переноса взвесей в акватории, а также уровень загрязнения вод.

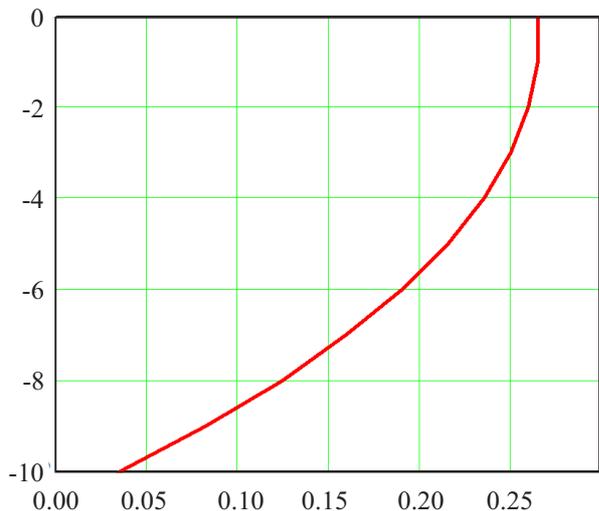


Рис. 8. Профиль вектора скорости движения водной среды

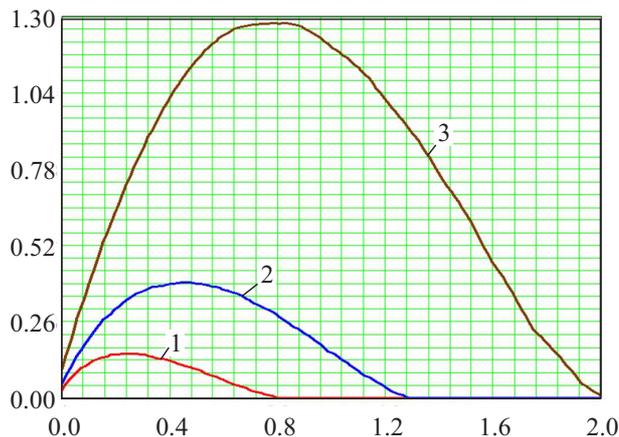


Рис. 9. Зависимости от времени объемов воды (млн. м^3) с содержанием взвешенных частиц: 1) более 100 мг/л, 2) более 20 мг/л, 3) 0.75 мг/л

7. Заключение. Построена двумерная математическая модель транспорта наносов в мелководных водоемах, удовлетворяющая основным законам сохранения. Модель учитывает две пространственные переменные и следующие физические параметры и процессы: пористость грунта; критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов; турбулентный обмен; динамически изменяемую геометрию дна и функцию возвышения уровня; ветровые течения и трение о дно. Описаны программные комплексы и результаты их применения, использующие модели транспорта наносов в прибрежных водных системах; для расчета скорости движения водной среды использованы двумерная и трехмерная модели гидродинамики.

Проведен анализ численного решения модельной задачи, показавший, что с увеличением размеров расчетной сетки временные затраты для явной схемы существенно уменьшаются. Модификация явной схемы — введение разностной производной второго порядка с множителем-регуляризатором — позволяет существенно ослабить ограничения на допустимую величину шага по времени. Кроме того, явные регуляризованные схемы показали преимущество по реальным временным затратам (10–15 раз и более) по сравнению с использовавшимися ранее традиционными неявными и нерегуляризованными явными схемами.

Рассмотренные модели и разработанный проблемно-ориентированный комплекс программ для МВС применимы для количественного прогноза процессов переформирования рельефа дна, береговой линии, переноса загрязнений и экологических изменений в прибрежных акваториях и могут быть полезны при строительстве и эксплуатации гидротехнических сооружений, создании проектов защиты берегов, обеспечении экологической безопасности и рекреационного режима пляжей.

Работа выполнена при частичной поддержке проектов Программы № 43 фундаментальных исследований Президиума РАН по стратегическим направлениям развития науки “Фундаментальные проблемы математического моделирования”.

Работа выполнена при частичной поддержке задания № 2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России, а также при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 15–01–08619 и 15–07–08626).

Статья рекомендована к публикации Программным комитетом Международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии 2015” (ПаВТ-2015; <http://agora.guru.ru/pavt2015>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев И.О.* Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. М.: ГЕОС, 2001.
2. *Проценко Е.А.* Модель и алгоритмы решения задачи о транспорте наносов // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2009. № 8. 71–75.
3. *Проценко Е.А.* Двумерная конечно-разностная модель формирования наносов в прибрежной зоне водоема и ее программная реализация // Инженерный вестник Дона. 2010. № 3. 23–31.
4. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов // Математическое моделирование. 2013. **25**, № 12. 65–82.
5. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 610–620.
6. *Ezer T., Mellor G.L.* Sensitivity studies with the North Atlantic sigma coordinate Princeton Ocean Model // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 2000. **32**, N 3–4. 155–208.
7. *Дегтярева Е.Е., Проценко Е.А., Чистяков А.Е.* Программная реализация трехмерной математической модели транспорта взвеси в мелководных акваториях // Инженерный вестник Дона. 2012. № 4. 30–32.
8. *Дегтярева Е.Е., Чистяков А.Е.* Моделирование транспорта наносов по данным экспериментальных исследований в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 2. 112–118.
9. *Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С.* Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 103–112.
10. *Сухинов А.И., Никитина А.В.* Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8. 62–73.
11. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А.* Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2013. № 4. 87–98.
12. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В.* Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. 2011. **23**, № 3. 3–21.
13. *Васильев В.С., Сухинов А.И.* Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование. 2003. **15**, № 10. 17–34.
14. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишениа А.В.* Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. 2012. **24**, № 8. 32–44.
15. *Чистяков А.Е.* Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6. 66–77.
16. *Четверушкин Б.Н.* Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Математическое моделирование. 2012. **24**, № 11. 33–52.
17. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишениа А.В.* Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Математическое моделирование. 2013. **25**, № 11. 53–64.
18. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
19. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
20. *Коновалов А.Н.* Метод скорейшего спуска с адаптивным попеременно-треугольным переобусловливателем // Дифференциальные уравнения. 2004. **40**, № 7. 953–963.
21. *Коновалов А.Н.* К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. 2002. **43**, № 3. 552–572.
22. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е.* Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. 2012. **24**, № 1. 3–20.
23. *Чистяков А.Е.* Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6. 237–249.

Поступила в редакцию
20.04.2015

Comparison of Computational Efficiency of Explicit and Implicit Schemes for the Sediment Transport Problem in Coastal Zones

A. I. Sukhinov¹, E. A. Protsenko², A. E. Chistyakov³, and S. A. Shreter⁴

¹ *Chekhov Taganrog State Pedagogical Institute, Faculty of Physics, Mathematics and Informatics;*

ulitsa Initsiativnaya 48, Taganrog, 347936, Russia; Dr. Sci., Professor, Dean of Faculty, e-mail: sukhinov@gmail.com

² *Chekhov Taganrog State Pedagogical Institute, Faculty of Physics, Mathematics and Informatics; ulitsa Initsiativnaya 48, Taganrog, 347936, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: eapros@rambler.ru*

³ *Southern Federal University, Kalyaev Scientific Research Institute of Multiprocessor Computing Systems; ulitsa Chekhova 2, Taganrog, 347922, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: cheese_05@mail.ru*

⁴ *Chekhov Taganrog State Pedagogical Institute, Faculty of Physics, Mathematics and Informatics; ulitsa Initsiativnaya 48, Taganrog, 347936, Russia; Senior Lecturer, e-mail: sergshre@yandex.ru*

Received April 20, 2015

Abstract: An unsteady spatial two-dimensional sediment transport model in coastal zones is considered. The model takes into account the following physical parameters and processes: the soil porosity; the critical shear stress at which the sediment displacement begins; the turbulent exchange; the dynamically variable geometry of the bottom and the level elevation function; the wind flows; and the bottom friction. A spatial three-dimensional hydrodynamic model for coastal zones and a transport model for suspended particles are proposed and implemented on a computing cluster. Some numerical results are discussed.

Keywords: mathematical model, sediment transport, distributed computing, parallel programming, dynamics of marine sediments, shallow water equations, diffusion–convection–reaction equation.

References

1. I. O. Leont'ev, *Coastal Dynamics: Waves, Currents, Deposit Fluxes* (GEOS, Moscow, 2001) [in Russian].
2. E. A. Protsenko, "Model and Algorithms of the Sediment Transport Problem Solution," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 8, 71–75 (2009).
3. E. A. Protsenko, "A Two-Dimensional Finite-Difference Model for the Formation of Sediments in a Coastal Zone and Its Software Implementation," *Inzh. Vestn. Dona*, No. 3, 23–31 (2010).
4. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and E. A. Protsenko, "Mathematical Modeling of Sediment Transport in the Coastal Zone of Shallow Reservoirs," *Mat. Model.* **25** (12), 65–82 (2013). [*Math. Models Comput. Simul.* **6** (4), 351–363 (2014)].
5. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and E. A. Protsenko, "Sediment Transport Mathematical Modeling in a Coastal Zone Using Multiprocessor Computing Systems," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 610–620 (2014).
6. T. Ezer and G. L. Mellor, "Sensitivity Studies with the North Atlantic Sigma Coordinate Princeton Ocean Model," *Dyn. Atmos. Oceans* **32** (3–4), 155–208 (2000).
7. E. E. Degtyareva, E. A. Protsenko, and A. E. Chistyakov, "Software Implementation of a Three-Dimensional Model of Sediment Transport in Shallow Waters," *Inzh. Vestn. Dona*, No. 4, 30–32 (2012).
8. E. E. Degtyareva and A. E. Chistyakov, "Modeling Sediment Transport Based on Experimental Studies in Azov Sea," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 2, 112–118 (2012).
9. A. I. Sukhinov, A. V. Nikitina, A. E. Chistyakov, and I. S. Semenov, "Mathematical Modeling of the Formation of Suffocation Conditions in Shallow Basins Using Multiprocessor Computing Systems," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 103–112 (2013).
10. A. I. Sukhinov and A. V. Nikitina, "Mathematical Modelling and Expeditional Investigations of Water Quality in Azov Sea," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 8, 62–73 (2011).
11. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and N. A. Fomenko, "Method of Construction of Difference Scheme for Problems of Diffusion–Convection–Reaction with Taking into Account the Degree of Filling the Control Volume," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 4, 87–98 (2013).
12. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and E. V. Alekseenko, "Numerical Realization of the Three-Dimensional Model of Hydrodynamics for Shallow Water Basins on a High-Performance System," *Mat. Model.* **23** (3), 3–21 (2011) [*Math. Models Comput. Simul.* **3** (5), 562–574 (2011)].
13. V. S. Vasil'ev and A. I. Sukhinov, "Precise Two-Dimensional Models for Shallow Water Basins," *Mat. Model.* **15** (10), 17–34 (2003).
14. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. F. Timofeeva, and A. V. Shishenya, "Mathematical Model for Calculating Coastal Wave Processes," *Mat. Model.* **24** (8), 32–44 (2012) [*Math. Models Comput. Simul.* **5** (2), 122–129 (2013)].
15. A. E. Chistyakov, "About Approximation of Boundary Conditions of a Three-Dimensional Model of Aquatic Environment Motion," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 6, 66–77 (2010).

16. B. N. Chetverushkin, "Resolution Limits of Continuous Media Models and Their Mathematical Formulations," *Mat. Model.* **24** (11), 33–52 (2012) [*Math. Models Comput. Simul.* **5** (3), 266–279 (2012)].
17. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and A. V. Shishenya, "Error Estimate for Diffusion Equations Solved by Schemes with Weights," *Mat. Model.* **25** (11), 53–64 (2013) [*Math. Models Comput. Simul.* **6** (3), 324–331 (2014)].
18. A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1989; Marcel Dekker, 2001).
19. A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev, *Numerical Methods for Grid Equations* (Nauka, Moscow, 1978; Birkhäuser, Basel, 1989).
20. A. N. Konovalov, "The Steepest Descent Method with an Adaptive Alternating-Triangular Preconditioner," *Differ. Uravn.* **40** (7), 953–963 (2004) [*Differ. Equ.* **40** (7), 1018–1028 (2004)].
21. A. N. Konovalov, "To the Theory of the Alternating Triangle Iteration Method," *Sib. Mat. Zh.* **43** (3), 552–572 (2002) [*Sib. Math. J.* **43** (3), 439–457 (2002)].
22. A. I. Sukhinov and A. E. Chistyakov, "Adaptive Modified Alternating Triangular Iterative Method for Solving Grid Equations with a Non-Self-Adjoint Operator," *Mat. Model.* **24** (1), 3–20 (2012) [*Math. Models Comput. Simul.* **4** (4), 398–409 (2012)].
23. A. E. Chistyakov, "Speedup and Efficiency Estimation of Parallel SSOR Algorithm," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 6, 237–249 (2010).