

УДК 519.63:539.37

doi 10.26089/NumMet.v16r231

## АНАЛИЗ РЕЗОНАНСНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ СЛОИСТЫХ И БЛОЧНЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

В. М. Садовский<sup>1</sup>, Е. П. Ченцов<sup>2</sup>

В рамках дискретных моделей исследуются резонансные процессы в структурно неоднородных материалах со слоистой и блочной микроструктурой. Вычислены собственные частоты продольного движения частиц в линейной моноатомной цепочке, имитирующей слоистую среду, с различными типами граничных условий. Для анализа поведения цепочки в окрестности резонансных частот построены спектральные портреты матриц. Показано, что при предельном переходе от модели моноатомной цепочки с упругими связями, учитывающей сопротивление вращению частиц, к модели моментного континуума выделяется характерная резонансная частота вращательного движения, не зависящая от длины цепочки.

**Ключевые слова:** микроструктура, упругость, резонанс, дискретная цепочка, моментный континуум, блочная среда, вращательное движение.

**1. Введение.** К исследованию волновых движений в структурно неоднородных деформируемых средах применяются как дискретные, так и непрерывные математические модели. В простейшей дискретной модели многослойной среды с податливыми прослойками рассматривается линейная цепочка частиц (материальных точек), последовательно связанных между собой упругими пружинами. В моноатомной цепочке массы всех частиц и жесткости пружин одинаковы. Такое приближение возможно в случае тонких прослоек, массой которых можно пренебречь. В двухатомной цепочке чередуются две различные массы, которые рассматриваются как массы слоев и массы прослоек. Волновые процессы в цепочках, в частности резонансы, вызванные внешними периодическими возмущениями, изучались в линейном [1–3] и нелинейном [4–7] приближениях. Было показано, что при учете сил вязкости в решетке амплитуды резонансов становятся конечными [8] и что за счет дефектов связей весь спектр резонансных частот перестраивается [9, 10]. Моделированию волн в двумерных решетках (прямоугольных и треугольных) посвящены работы [11–13].

Простейшая непрерывная модель деформируемой среды с микроструктурой формулируется в терминах одномерного волнового уравнения, которое может быть получено из дискретной модели цепочки предельным переходом при стремлении к бесконечности числа частиц в предположении постоянной плотности и скорости упругих волн. Резонансные решения волнового уравнения для различных вариантов нелинейности получены в работах [14–16]. В [17, 18] исследованы модельные одномерные уравнения для описания резонанса.

Общие вопросы теории колебаний и резонансных явлений рассмотрены в монографиях [19–21]. Многими авторами исследовались прикладные задачи о резонансном возбуждении механических и физических систем. В работе [9] на основе дискретных моделей изучены резонансы в дискретных сетях и фотонных кристаллах. В [22] демонстрируются возможности резонансного метода разрушения ледяного покрова с помощью изгибно-гравитационных поверхностных волн [23].

В настоящей статье на основе дискретных моделей исследуются резонансы, связанные с продольными, поперечными и вращательными колебаниями в слоистых и блочных средах.

**2. Общая постановка.** Дискретное моделирование процессов распространения упругих волн бесконечно малой амплитуды приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A\ddot{U} + BU = F, \quad (1)$$

где  $U$  — вектор обобщенных координат,  $F$  — вектор внешних сил,  $A$  — симметричная положительно определенная матрица обобщенных масс,  $B$  — симметричная неотрицательно определенная матрица жесткости. Точками над символом обозначаются производные по времени.

<sup>1</sup> Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, 50/44, 660036, Красноярск; зам. директора, e-mail: sadov@icm.krasn.ru

<sup>2</sup> Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, 50/44, 660036, Красноярск; аспирант, e-mail: chencov. evg@gmail.com

Для системы (1) выполняется уравнение  $\dot{E} = F\dot{U}$ , характеризующее изменение полной энергии  $E = (\dot{U}A\dot{U} + UB\dot{U})/2$ . Если вектор  $F$  зависит от времени периодически  $F = \hat{F} e^{i\omega t}$  с частотой  $\omega$ , то вектор  $U = \hat{U} e^{i\omega t}$  тоже периодический, причем  $(B - \omega^2 A)\hat{U} = \hat{F}$ . Исключения составляют собственные (резонансные) частоты, для которых условие периодичности  $U$  нарушается. Квадраты частот  $\lambda = \omega^2$  являются корнями характеристического уравнения  $\det(B - \lambda A) = 0$ . В силу симметрии и знакоопределенности матриц  $A$  и  $B$  корни этого уравнения действительны и неотрицательны, причем их число с учетом кратности в точности равно размерности системы (1). Корням отвечают линейно независимые собственные векторы, каждый из которых является решением однородной системы  $(B - \lambda A)Z = 0$ .

Для нерезонансных частот имеем  $\hat{U} = -R(\omega^2) A^{-1} \hat{F}$ , где  $R(\lambda) = (\lambda E - A^{-1}B)^{-1}$  — резольвента,  $E$  — единичная матрица. При исследовании поведения системы в окрестности собственных частот строится спектральный портрет матрицы  $A^{-1}B$ . Одна из технологий построения спектральных портретов [24] состоит в прямом вычислении значений

$$s(\lambda) = \frac{1}{\|A^{-1}B\| \|R(\lambda)\|}$$

с использованием спектральной матричной нормы в узлах некоторой сетки на плоскости комплексной переменной  $\lambda$  и с последующим построением картины линий уровня для  $s(\lambda)$ . Спектральный портрет позволяет визуально отделить собственные частоты, а также проанализировать изменение амплитудного вектора  $\hat{U}$  в их окрестности. Быстрое уменьшение величины  $s(\lambda)$  при приближении к собственной частоте указывает на сильную чувствительность системы к возмущениям, что в точности соответствует общим представлениям о резонансе.

При учете вязкости система уравнений (1) дополняется слагаемыми, зависящими от  $\dot{U}$ :

$$A\ddot{U} + M\dot{U} + BU = F. \tag{2}$$

Здесь  $M$  — неотрицательно определенная (вообще говоря, несимметричная) матрица с малыми коэффициентами. В левой части уравнения изменения энергии появляется диссипативное слагаемое  $\dot{U}M\dot{U} \geq 0$ . Проблема определения собственных частот приводится к алгебраическому уравнению

$$\det(B + i\omega M - \omega^2 A) = 0,$$

которое указывает на то, что матричные портреты целесообразно изображать не на действительной прямой, а на комплексной плоскости. Для нелинейных моделей матрицы-коэффициенты системы (2) и вектор правой части могут зависеть от  $U$  и  $\dot{U}$ . В этом случае универсального алгоритма анализа резонансных процессов, по-видимому, не существует.

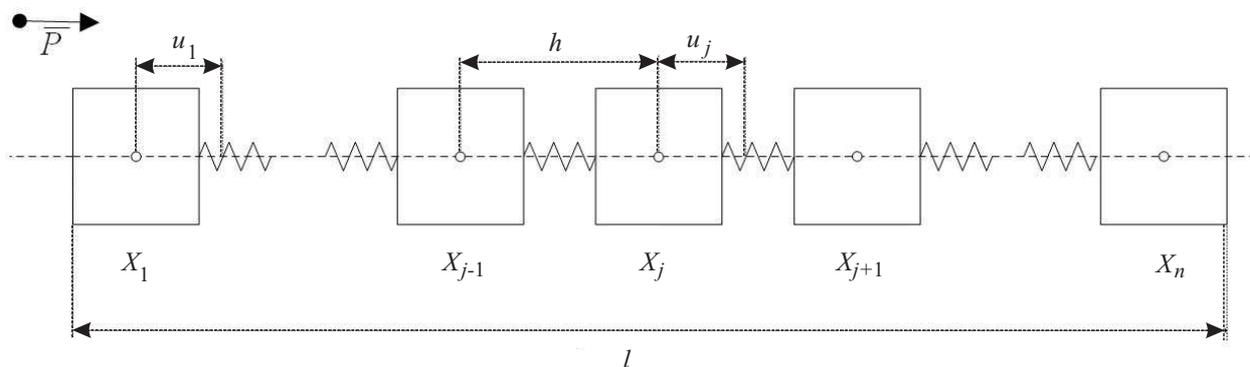


Рис. 1. Схема дискретной цепочки

**3. Продольные колебания.** Рассматривается линейная дискретная цепочка из  $n$  материальных точек массы  $m$ , соединенных между собой пружинами жесткости  $k$ . Расстояние между материальными точками равно  $h$ , длина цепочки в целом  $l = (n - 1)h$ . К массам цепочки в продольном направлении приложены возмущающие силы  $P_j$ ; в результате они получают перемещения  $u_j$ , зависящие от времени. Схема дискретной цепочки приведена на рис. 1.

Дискретная цепочка представляет собой механическую систему с  $n$  степенями свободы. Уравнения движения в форме Лагранжа принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial L}{\partial u_j} = P_j, \quad T = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^n \dot{u}_j^2, \quad \Pi = \frac{k}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (u_{j+1} - u_j)^2.$$

Здесь  $L = T - \Pi$  — функция действия,  $T$  — кинетическая энергия,  $\Pi$  — потенциальная энергия цепочки. В развернутой форме эти уравнения приводятся к системе

$$m \ddot{u}_1 - k(u_2 - u_1) = P_1, \quad m \ddot{u}_j - k(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) = P_j, \quad m \ddot{u}_n - k(u_n - u_{n-1}) = P_n, \quad (3)$$

а в матричной форме — к системе (1) с матрицами  $A = mE$ ,

$$B = \begin{pmatrix} -k & k & 0 & \dots & 0 \\ k & -2k & k & \dots & 0 \\ 0 & k & -2k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k \end{pmatrix}, \quad B - \lambda A = m \begin{pmatrix} \gamma - \lambda & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 2\gamma - \lambda & -\gamma & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma & 2\gamma - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma - \lambda \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{k}{m}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение решается в явном виде. Для этого строятся собственные векторы с компонентами  $Z_{j+1} = \sin(j\alpha + \beta)$ , которые выражаются через параметры  $\alpha$  и  $\beta$ . Система уравнений для собственных векторов автоматически выполняется, если

$$\lambda = 4\gamma \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 1}, \quad \alpha = \frac{\pi s}{n}, \quad s = 0, \dots, n-1.$$

Для примера на рис. 2 изображен спектральный портрет матрицы дискретной цепочки для  $n = 11$  на плоскости действительных и мнимых осей  $\lambda$ . Из рис. 2 видно, что резонансные частоты системы примерно эквивалентны в том смысле, что в окрестности каждой из них амплитуды колебаний растут в равной степени по мере приближения к соответствующей резонансной частоте. Исключениями являются пятна, находящиеся на границах диапазона. Спектральный портрет для системы большего порядка качественно практически не меняется.

Формально устремляя  $n$  к бесконечности так, чтобы выполнялось условие  $\gamma h^2 = c^2$ , где  $c$  — скорость распространения возмущений по цепочке, можно получить из (3) непрерывную модель бесконечной (плотной) цепочки со свободными концами:

$$u_x(0, t) = 0, \quad \ddot{u} - c^2 u_{xx} = p(x, t), \quad u_x(l, t) = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) описывают продольные волны в однородном упругом стержне. Известно [25], что собственные частоты в стержне при поставленных таким образом граничных условиях равны  $\pi c/l, 2\pi c/l, 3\pi c/l$  и т.д. Эти же частоты получаются по формулам для дискретной цепочки после предельного перехода при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda \approx \gamma \left( \frac{\pi s}{n} \right)^2 \approx \left( \frac{\pi c}{l} s \right)^2, \quad \omega = \sqrt{\lambda}. \quad (5)$$

Аналогичным способом можно исследовать резонансные частоты в цепочке с закрепленным левым концом, в которой первая материальная точка соединена пружиной жесткости  $k$  с неподвижной опорой. В этом случае

$$B - \lambda A = m \begin{pmatrix} 2\gamma - \lambda & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 2\gamma - \lambda & -\gamma & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma & 2\gamma - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma - \lambda \end{pmatrix}.$$

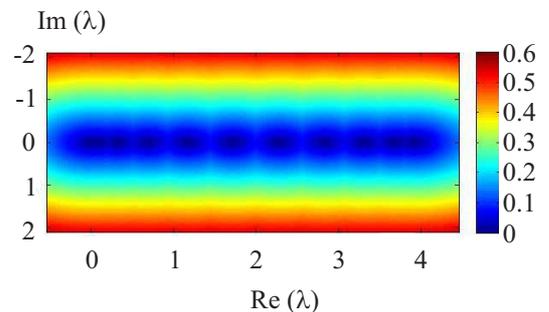


Рис. 2. Спектральный портрет матрицы ( $n = 11$ )

Компоненты собственных векторов выражаются по формуле  $Z_j = \sin j\alpha$  через параметр  $\alpha$ , пробегающий все корни нелинейного уравнения  $\chi(\alpha) = 0$  на интервале  $(0, \pi)$ , где  $\chi = (1 - \cos \alpha) \sin n\alpha - \cos n\alpha \sin \alpha$ . Анализируя поведение функции  $\chi(\alpha)$ , можно показать, что это уравнение имеет ровно  $n$  корней на данном интервале. Каждому из них соответствует собственное значение  $\lambda = 4\gamma \sin^2 \alpha/2$ . Типичные графики функции  $\chi$  для  $n = 5$  и  $n = 7$  представлены на рис. 3. На осях абсцисс отмечены точки  $\alpha = \pi s/n$  — границы интервалов перемены знака функции.

При достаточно малых  $\alpha$  справедливо представление  $2\chi(\alpha) \approx \alpha^2 \sin n\alpha - 2\alpha \cos n\alpha$ , поэтому уравнение для  $\alpha$  можно заменить уравнением  $\alpha = 2 \operatorname{ctg} n\alpha$ . Корень, лежащий на  $s$ -м интервале перемены знака, удовлетворяет неравенствам  $\pi(s - 1) < n\alpha < \pi s$ , поэтому при  $n \rightarrow \infty$  значение  $\alpha$  стремится к нулю, а значение  $n\alpha$  остается ограниченным. Предельный переход в уравнении  $\chi(\alpha) = 0$  показывает, что  $\operatorname{ctg} n\alpha \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ; следовательно,

$$n\alpha \rightarrow \frac{\pi(2s - 1)}{2}, \quad \lambda \approx \gamma \alpha^2 = \frac{c^2}{h^2} \alpha^2 \approx \frac{c^2}{l^2} (n\alpha)^2 \rightarrow \left(\frac{\pi c}{l}\right)^2 \left(s - \frac{1}{2}\right)^2. \quad (6)$$

Таким образом, при условии закрепления левого конца резонансные частоты  $\omega = \sqrt{\lambda}$  в бесконечной цепочке совпадают с собственными частотами продольных колебаний консольно закрепленного однородного упругого стержня.

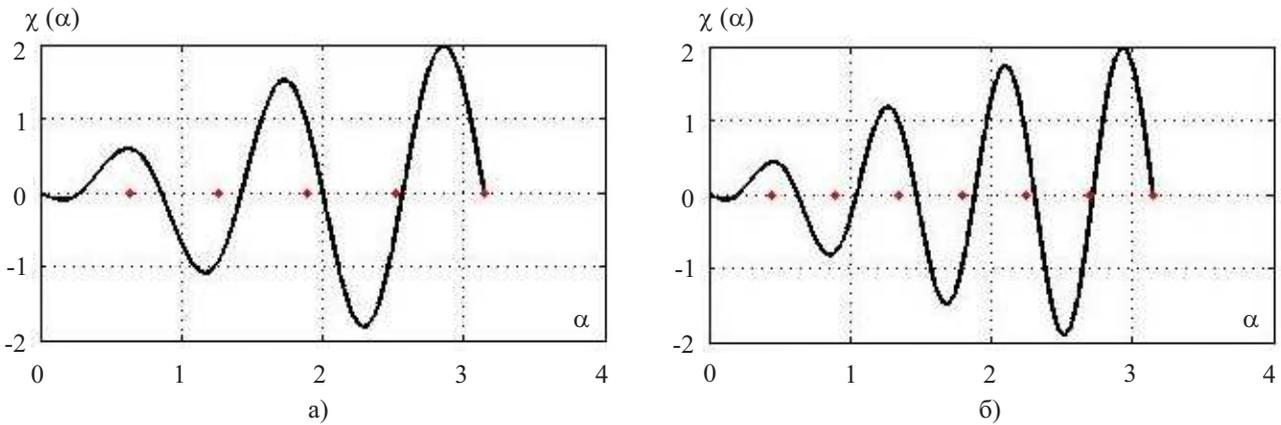


Рис. 3. Графики функции  $\chi(\alpha)$ : а)  $n = 5$ , б)  $n = 7$

В случае двух закрепленных концов линейной дискретной цепочки характеристическая матрица системы отличается от предыдущего варианта закрепления диагональным элементом  $2\gamma - \lambda$  в последней строке. Компоненты собственных векторов  $Z_j = \sin j\alpha$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) определяются через параметр  $\alpha = \pi s/(n + 1)$ . При больших  $n$  выполнены соотношения

$$\lambda = 4\gamma \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \gamma \alpha^2 = \left(\frac{\pi s}{n + 1}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{\pi c}{l} s\right)^2. \quad (7)$$

Резонансные частоты  $\omega = \sqrt{\lambda}$  в этом случае стремятся к собственным частотам однородного стержня с жестко заделанными концами.

В целом, по результатам анализа дискретной модели продольных колебаний на основании формул (5)–(7) можно сделать следующий вывод. При увеличении числа элементов в цепочке резонансные частоты стремятся к собственным частотам продольных колебаний однородного упругого стержня с граничными условиями, соответствующими способу закрепления концов цепочки. Эти частоты зависят не только от механических параметров системы (жесткости и массы), но и от размера цепочки.

**4. Поперечные и вращательные колебания.** Пусть теперь на элементы цепочки, представляющие собой материальные тела малого размера, действуют поперечные силы  $Q_j$  и вращательные моменты  $R_j$ , в результате чего элементы поворачиваются на малые углы  $\varphi_j$  и получают в поперечном направлении малые перемещения  $w_j$  (рис. 4). Предположим далее, что концы цепочки закреплены по перемещениям и свободны по вращениям, и сформулируем граничные условия в виде

$$w_1 + w_0 = 0, \quad w_{n+1} + w_n = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_0 = 0, \quad \varphi_{n+1} - \varphi_n = 0, \quad (8)$$

после введения двух дополнительных элементов с индексами  $j = 0$  и  $j = n + 1$ . Для таких граничных условий резонансные частоты легко получить в замкнутой форме.

Деформированное состояние цепочки описывается величинами

$$\Lambda_{j-1/2} = \frac{w_j - w_{j-1}}{h} - \frac{\varphi_j + \varphi_{j-1}}{2}, \quad M_{j-1/2} = \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{h}, \quad h = \frac{l}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n+1,$$

первая из которых характеризует деформацию сдвига, а вторая — кривизну. Выбор кинематических характеристик деформирования в таком виде объясняется тем, что обе они тождественно равны нулю при абсолютно жестком движении, когда вся цепочка со свободными концами поворачивается на произвольный бесконечно малый угол.

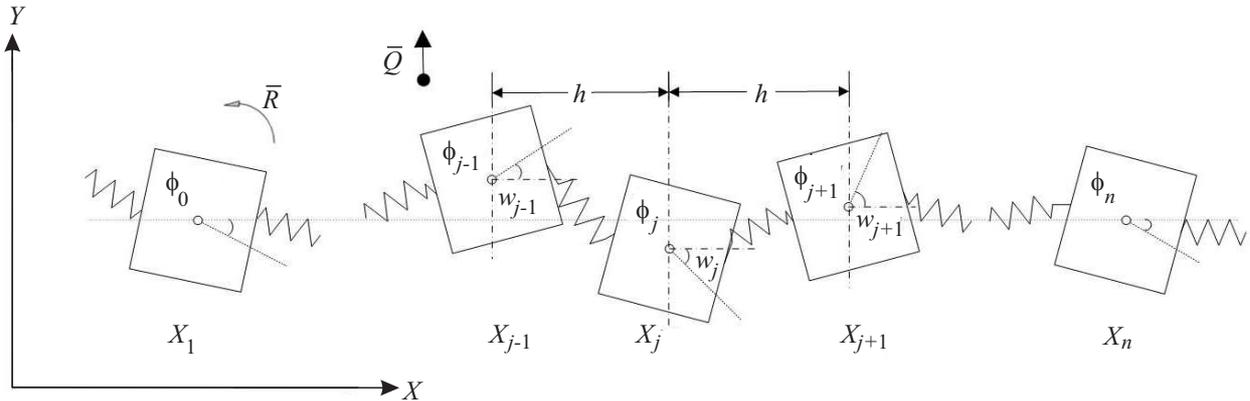


Рис. 4. Схема цепочки с вращательными степенями свободы

Упругое сопротивление пружин в цепочке моделируется с помощью уравнений:  $\tau_{j-1/2} = a \Lambda_{j-1/2}$ ,  $\mu_{j-1/2} = b M_{j-1/2}$ , связывающих перерезывающие силы  $\tau_{j-1/2}$  и вращательные моменты  $\mu_{j-1/2}$  с деформациями и кривизнами. Кинетическая и потенциальная энергии рассматриваемой механической системы вычисляются по формулам

$$T = \frac{m}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \dot{w}_j^2 + \frac{J}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \dot{\varphi}_j^2, \quad \Pi = \frac{a}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \Lambda_{j-1/2}^2 + \frac{b}{2} \sum_{j=1}^{n+1} M_{j-1/2}^2,$$

где  $J$  — момент инерции элементов. Уравнения Лагранжа принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} m \ddot{w}_j &= a \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} - a \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2h} + Q_j, \\ J \ddot{\varphi}_j &= a \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} - a \frac{\varphi_{j+1} + 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{4} + b \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} + R_j. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя формулы преобразования

$$w'_j = \frac{w_j}{l}, \quad \varphi'_j = \varphi_j, \quad t' = \frac{t}{l} \sqrt{\frac{a}{m}}, \quad h' = \frac{h}{l} = \frac{1}{n},$$

можно привести уравнения к безразмерной форме

$$\begin{aligned} \ddot{w}'_j &= n^2 (w'_{j+1} - 2w'_j + w'_{j-1}) - \frac{n}{2} (\varphi'_{j+1} - \varphi'_{j-1}) + Q'_j, \\ J' \ddot{\varphi}'_j &= \frac{n}{2} (w'_{j+1} - w'_{j-1}) - \frac{1}{4} (\varphi'_{j+1} + 2\varphi'_j + \varphi'_{j-1}) + n^2 b' (\varphi'_{j+1} - 2\varphi'_j + \varphi'_{j-1}) + R'_j, \end{aligned}$$

где  $J' = J/(ml^2)$ ,  $b' = b/(al^2)$ ,  $Q_j = lQ_j/a$ ,  $R'_j = R_j/a$ . В данном случае точки над символами обозначают производные по безразмерному времени  $t'$ . Такая форма уравнений, не требующая задания всех параметров, удобна при прямых численных расчетах движения цепочки под действием заданной системы сил и моментов.

Уравнения (9) тоже можно представить в виде системы (1) с симметричными и знакоопределенными матрицами. Подстановка в однородные уравнения выражений

$$w_j = \hat{w} e^{i\omega t} \sin\left(j - \frac{1}{2}\right)\alpha, \quad \varphi_j = \hat{\varphi} e^{i\omega t} \cos\left(j - \frac{1}{2}\right)\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi s}{n+1}, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (8), приводит к системе линейных уравнений для амплитуд  $\hat{w}$  и  $\hat{\varphi}$ . Условие равенства нулю определителя системы, представляющее собой условие существования нетривиальных решений, позволяет получить биквадратное уравнение для определения собственных частот цепочки:

$$m J \omega^4 - C \omega^2 + 16 \frac{ab}{h^4} \sin^4 \frac{\alpha}{2} = 0, \quad C = ma \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \frac{Ja + mb}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$\omega^2 = \frac{C \pm \sqrt{D}}{2 m J}, \quad D = (ma)^2 \cos^4 \frac{\alpha}{2} + 2 ma \frac{Ja + mb}{h^2} \sin^2 \alpha + 16 \frac{(Ja - mb)^2}{h^4} \sin^4 \frac{\alpha}{2}. \quad (10)$$

Анализ формул (10) показывает, что собственные частоты при естественных ограничениях на параметры цепочки ( $m, J, a, b > 0$ ) всегда действительны и различны для разных  $s = 1, 2, \dots, n$ . Кроме того, при увеличении длины цепочки выделяется характерная частота  $\omega_0$ . Ее можно обнаружить из рассмотрения рис. 5, на котором нанесены квадраты собственных частот цепочки из 10 элементов для различных длин  $l$  от 0.5 до 2.5 м. Масса элементов  $m = 112.5 \times 10^{-3}$  кг, момент инерции  $J = 46.68 \times 10^{-6}$  кг м<sup>2</sup> и параметры упругости  $a = 1300$  Н м,  $b = 3.3$  Н м<sup>3</sup> вычислены для блочной среды из ледяных кубиков с ребром  $h_0 = 0.05$  м, взаимодействующих через податливые прослойки разной толщины.

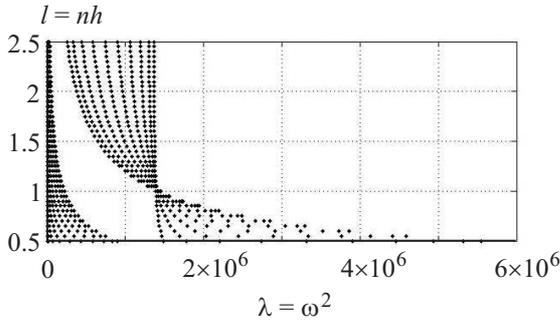


Рис. 5. Квадраты собственных частот для цепочек разной длины

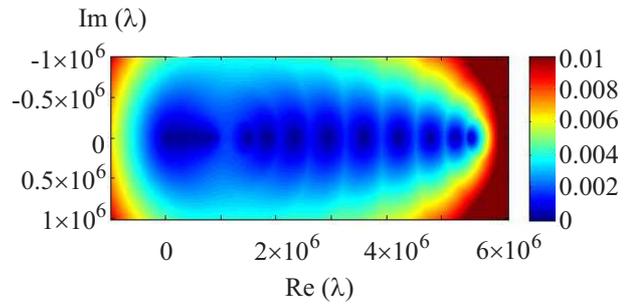


Рис. 6. Спектральный портрет матрицы ( $n = 9, l = 0.5$  м)

Если номер  $s$  зафиксировать, то при заданной длине  $l$  существуют конечные пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \nu, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha = \nu, \quad \nu = \frac{\pi^2 s^2}{l^2}.$$

С помощью этих пределов коэффициенты формулы (10) для квадрата частоты бесконечной цепочки упрощаются:

$$C = ma + (Ja + mb) \nu, \quad D = (ma)^2 + 2 ma (Ja + mb) \nu + (Ja - mb)^2 \nu^2.$$

Устремляя теперь  $l \rightarrow \infty$ , т.е.  $\nu \rightarrow 0$ , можно установить, что  $\omega_0 = \sqrt{a/J}$ . Это единственная собственная частота бесконечной цепочки бесконечной длины, которая связана с вращательным движением элементов. Других резонансных частот нет.

Можно определить  $\omega_0$  альтернативным способом, рассматривая модель из трех элементов (случай  $n = 1$ ). Тогда с учетом граничных условий (8) уравнения (9) при  $Q_1 = R_1 = 0$  приводятся к виду:

$$m \ddot{w}_1 = -\frac{4a}{h^2} w_1, \quad J \ddot{\varphi}_1 = -a \varphi_1.$$

Первое уравнение описывает поперечные колебания, а второе — независимые вращательные колебания элемента с частотой  $\omega_0$ .

На рис. 6 изображен спектральный портрет матрицы для дискретной цепочки из 9 элементов для  $l = 0.5$  м. Частоты разбились на две группы, что очевидным образом следует из формул (10). По размеру пятен на этом рисунке можно судить о том, что при приближении к частоте  $\omega_0$  амплитуды колебаний нарастают примерно в такой же степени, как и при приближении к остальным резонансным частотам. При увеличении длины цепочки до  $l = 1$  м частоты совмещаются в соответствии с рис. 5. На соответствующем спектральном портрете, который представлен на рис. 7, выделяется одна частота  $\omega_0$ . На ней сошлись

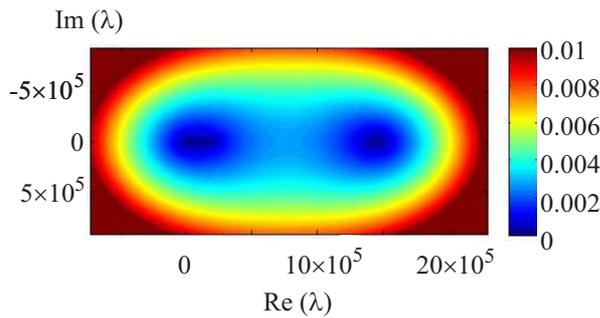


Рис. 7. Спектральный портрет матрицы  
( $n = 9, l = 1$  м)

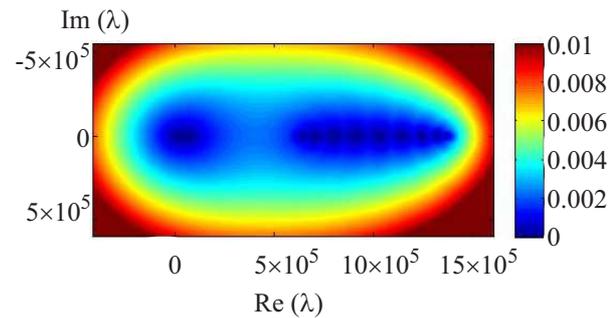


Рис. 8. Спектральный портрет матрицы  
( $n = 9, l = 1.5$  м)

остальные частоты группы. Размер пятен указывает на достижимость резонансной частоты. При дальнейшем увеличении длины до  $l = 1.5$  м частоты снова расходятся (рис. 8). Единственной неподвижной точкой при этом остается частота  $\omega_0$  при схожем по сравнению с другими пятнами размере.

Уравнения (9) в пределе для бесконечной (плотной) цепочки длины  $l$  переходят в одномерные дифференциальные уравнения континуума Коссера:

$$\rho_0 \ddot{w} = a_0 (w_{xx} - \varphi_x) + q(x, t), \quad J_0 \ddot{\varphi} = a_0 (w_x - \varphi) + b_0 \varphi_{xx} + r(x, t)$$

с граничными условиями  $w(0) = w(l) = 0, \varphi_x(0) = \varphi_x(l) = 0$ . Коэффициенты уравнений пересчитываются через механические параметры дискретной модели из соображений сохранения полной массы и суммарного момента инерции:

$$\rho_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{h}, \quad J_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J}{h}, \quad a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{h}, \quad b_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{h}.$$

Собственные частоты континуума вычисляются по формулам

$$\omega^2 = \frac{C_0 \pm \sqrt{D_0}}{2 \rho_0 J_0}, \quad C_0 = \rho_0 a_0 + (J_0 a_0 + \rho_0 b_0) \nu, \quad D_0 = (\rho_0 a_0)^2 + 2 \rho_0 a_0 (J_0 a_0 + \rho_0 b_0) \nu + (J_0 a_0 - \rho_0 b_0)^2 \nu^2,$$

которые могут быть получены предельным переходом в формулах для частот собственных колебаний конечной цепочки. Резонансные свойства континуума Коссера на основе модели пространственно-напряженно-деформированного состояния изучались в работах [26–28]. Было установлено, что в моментной среде существует резонансная частота, связанная с вращательным движением частиц, не зависящая от размеров области и от типа граничных условий на ее границе.

При поперечных и вращательных колебаниях дискретной цепочки возникает целая система резонансных частот, зависящих от числа элементов и длины цепочки. Наряду с ней существует единственная резонансная частота вращательного движения, которая определяется только значениями механических параметров модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14–01–00130).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kosevich A.M., Kovalev A.S. Self-localization of vibrations in a one-dimensional anharmonic chain // Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys. 1975. **40**, N 5. 891–896.
2. Grundmann M. The physics of semiconductors: an introduction including nanophysics and applications. Heidelberg: Springer, 2010.
3. Belbasi S., Fouladvand M.E., Joe Y.S. Anti-resonance in a one-dimensional chain of driven coupled oscillators // Am. J. Phys. 2014. **82**, N 1. 32–38.
4. Coste J., Peyraud J. Stationary waves in a nonlinear periodic medium: strong resonances and localized structures. I. The discrete model // Phys. Rev. B. 1989. **39**, N 18. 13086–13095.
5. Filip A.-M., Venakides S. Existence and modulation of traveling waves in particle chains // Comm. Pure Appl. Math. 1999. **52**, N 6. 693–735.
6. Georgieva A., Kriecherbauer T., Venakides S. Wave propagation and resonance in a one-dimensional nonlinear discrete periodic medium // SIAM J. Appl. Math. 1999. **60**, N 1. 272–294.

7. *Georgieva A., Venakides S., Kriecherbauer T.* 1:2 resonance mediated second harmonic generation in a 1-D nonlinear discrete periodic medium // *SIAM J. Appl. Math.* 2001. **61**, N 5. 1802–1815.
8. *Bonanomi L., Theocharis G., Daraio C.* Locally resonant granular chain. Ithaca: Cornell Univ. Library, 2014 (<http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1403/1403.1052.pdf>).
9. *Cun-Xi Z., Xiu-Huan D., Rui W., Yun-Qing Z., Ling-Min K.* Fano resonance and wave transmission through a chain structure with an isolated ring composed of defects // *Chin. Phys. B.* 2012. **21**. doi 10.1088/1674-1056/21/3/034202.
10. *Man Y., Boechler N., Theocharis G., Kevrekidis P.G., Daraio C.* Defect modes in one-dimensional granular crystals // *Phys. Rev. E.* 2012. **85**. doi 10.1103/PhysRevE.85.037601.
11. *Mishuris G.S., Movchan A.B., Slepyan L.I.* Waves and fracture in an inhomogeneous lattice structure // *Waves in Random and Complex Media.* 2007. **17**, N 4. 409–428.
12. *Feckan M., Rothos V.M.* Travelling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbor interactions // *Nonlinearity.* 2007. **20**, N 2. 319–341.
13. *Ayzenberg-Stepanenko M.V., Slepyan L.I.* Resonant-frequency primitive waveforms and star waves in lattices // *J. Sound Vib.* 2008. **313**, N 3–5. 812–821.
14. *Jeffrey A., Taniuti T.* Nonlinear wave propagation with applications to physics and magnetohydrodynamics. New York: Academic Press, 1964.
15. *Collins W.D.* Forced oscillations of systems governed by one-dimensional non-linear wave equations // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1971. **24**, N 2. 129–153.
16. *Manevich A.I., Manevich L.I.* The mechanics of nonlinear systems with internal resonances. London: Imperial College Press, 2005.
17. *Bretherton F.P.* Resonant interactions between waves. The case of discrete oscillations // *J. Fluid Mech.* 1964. **20**, N 3. 457–479.
18. *Shipman S.P., Venakides S.* An exactly solvable model for nonlinear resonant scattering // *Nonlinearity.* 2012. **25**, N 9. 2473–2501.
19. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1963.
20. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988.
21. *Карлов Н.В., Куриченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2003.
22. *Козин В.М.* Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М.: Академия естествознания, 2007.
23. *Milewski P.A., Wanf Z.* Three-dimensional flexural-gravity waves // *Stud. Appl. Math.* 2013. **131**, N 2. 135–148.
24. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
25. *Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986.
26. *Sadovskaya O.V., Sadovskii V.M.* Analysis of rotational motion of material microstructure particles by equations of the Cosserat elasticity theory // *Acoust. Phys.* 2010. **56**, N 6. 942–950.
27. *Sadovskii V., Sadovskaya O., Varygina M.* Numerical solution of dynamic problems in couple-stressed continuum on multiprocessor computer systems // *Int. J. Numer. Anal. Model. Ser. B.* 2011. **2**, N 2–3. 215–230.
28. *Sadovskaya O., Sadovskii V.* Mathematical modeling in mechanics of granular materials. Heidelberg: Springer, 2012.

Поступила в редакцию  
07.04.2015

---

## Analysis of Resonant Excitation of Layered and Block Media on the Basis of Discrete Models

V. M. Sadovskii<sup>1</sup> and E. P. Chentsov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institute of Computational Modeling, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Akademgorodok 50/44, Krasnoyarsk, 660036, Russia; Dr. Sci., Professor, Deputy Director, e-mail: sadov@icm.krasn.ru*

<sup>2</sup> *Institute of Computational Modeling, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Akademgorodok 50/44, Krasnoyarsk, 660036, Russia; Graduate Student, e-mail: chencov. evg@gmail.com*

Received April 7, 2015

**Abstract:** Resonant processes in structurally inhomogeneous materials of layered and block microstructure are studied in the framework of discrete models. Natural frequencies of longitudinal motion in a linear monatomic chain modeling a layered medium are determined for various boundary conditions. In order to analyze the behavior of the chain near resonant frequencies, the spectral portraits of the corresponding matrices are specified. It is shown that a special resonant frequency of rotational motion is observed when passing to the limit from a model of a monatomic chain with elastic connections to a moment continuum model. The particle

rotation resistance is taken into account in this passage to the limit. This special resonant frequency does not depend on the chain length.

**Keywords:** microstructure, elasticity, resonance, discrete chain, moment continuum, block medium, rotational motion.

### References

1. A. M. Kosevich and A. S. Kovalev, "Self-Localization of Vibrations in a One-Dimensional Anharmonic Chain," *Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys.* **40** (5), 891–896 (1975).
2. M. Grundmann, *The Physics of Semiconductors: An Introduction Including Nanophysics and Applications* (Springer, Heidelberg, 2010).
3. S. Belbasi, M. E. Fouladadvand, and Y. S. Joe, "Anti-Resonance in a One-Dimensional Chain of Driven Coupled Oscillators," *Am. J. Phys.* **82** (1), 32–38 (2014).
4. J. Coste and J. Peyraud, "Stationary Waves in a Nonlinear Periodic Medium: Strong Resonances and Localized Structures. I. The Discrete Model," *Phys. Rev. B* **39** (18), 13086–13095 (1989).
5. A.-M. Filip and S. Venakides, "Existence and Modulation of Traveling Waves in Particle Chains," *Comm. Pure Appl. Math.* **52** (6), 693–735 (1999).
6. A. Georgieva, T. Kriecherbauer, and S. Venakides, "Wave Propagation and Resonance in a One-Dimensional Nonlinear Discrete Periodic Medium," *SIAM J. Appl. Math.* **60** (1), 272–294 (1999).
7. A. Georgieva, S. Venakides, and T. Kriecherbauer, "1:2 Resonance Mediated Second Harmonic Generation in a 1-D Nonlinear Discrete Periodic Medium," *SIAM J. Appl. Math.* **61** (5), 1802–1815 (2001).
8. L. Bonanomi, G. Theocharis, and C. Daraio, *Locally Resonant Granular Chain*, arXiv preprint: arXiv:1403.1052v1 [cond-mat.mtrl-sci] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2014).  
<http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1403/1403.1052.pdf>. Cited May 31, 2015.
9. Z. Cun-Xi, D. Xiu-Huan, W. Rui, et al., "Fano Resonance and Wave Transmission through a Chain Structure with an Isolated Ring Composed of Defects," *Chin. Phys. B* **21** (2012).  
doi 10.1088/1674-1056/21/3/034202
10. Y. Man, N. Boechler, G. Theocharis, et al., "Defect Modes in One-Dimensional Granular Crystals," *Phys. Rev. E* **85** (2012). doi 10.1103/PhysRevE.85.037601
11. G. S. Mishuris, A. B. Movchan, and L. I. Slepyan, "Waves and Fracture in an Inhomogeneous Lattice Structure," *Waves Random Complex Media* **17** (4), 409–428 (2007).
12. M. Feckan and V. M. Rothos, "Travelling Waves in Hamiltonian Systems on 2D Lattices with Nearest Neighbor Interactions," *Nonlinearity* **20** (2), 319–341 (2007).
13. M. V. Ayzenberg-Stepanenko and L. I. Slepyan, "Resonant-Frequency Primitive Waveforms and Star Waves in Lattices," *J. Sound Vib.* **313** (3–5), 812–821 (2008).
14. A. Jeffrey and T. Taniuti, *Nonlinear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics* (Academic, New York, 1964).
15. W. D. Collins, "Forced Oscillations of Systems Governed by One-Dimensional Non-Linear Wave Equations," *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **24** (2), 129–153 (1971).
16. A. I. Manevich and L. I. Manevich, *The Mechanics of Nonlinear Systems with Internal Resonances* (Imperial College Press, London, 2005).
17. F. P. Bretherton, "Resonant Interactions between Waves. The Case of Discrete Oscillations," *J. Fluid Mech.* **20** (3), 457–479 (1964).
18. S. P. Shipman and S. Venakides, "An Exactly Solvable Model for Nonlinear Resonant Scattering," *Nonlinearity* **25** (9), 2473–2501 (2012).
19. N. N. Bogolyubov and Yu. A. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations* (Fizmatlit, Moscow, 1963; Gordon and Breach, New York, 1968).
20. V. F. Zhuravlev and D. M. Klimov, *Applied Methods in the Theory of Oscillations* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
21. N. V. Karlov and N. A. Kirichenko, *Oscillations, Waves, and Structures* (Fizmatlit, Moscow, 2003) [in Russian].
22. V. M. Kozin, *Resonant Method of Breaking Ice Cover: Inventions and Experiments* (Akad. Estestvoz., Moscow, 2007) [in Russian].
23. P. A. Milewski and Z. Wang, "Three-Dimensional Flexural-Gravity Waves," *Stud. Appl. Math.* **131** (2), 135–148 (2013).
24. S. K. Godunov, *Modern Aspects of Linear Algebra* (Nauchnaya Kniga, Novosibirsk, 1997; Amer. Math. Soc., Providence, 1998).

25. I. A. Birger and R. R. Mavlyutov, *Strength of Materials* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
26. O. V. Sadovskaya and V. M. Sadovskii, "Analysis of Rotational Motion of Material Microstructure Particles by Equations of the Cosserat Elasticity Theory," *Acoust. Phys.* **56** (6), 942–950 (2010).
27. V. Sadovskii, O. Sadovskaya, and M. Varygina, "Numerical Solution of Dynamic Problems in Couple-Stressed Continuum on Multiprocessor Computer Systems," *Int. J. Numer. Anal. Mod. B* **2** (2–3), 215–230 (2011).
28. O. Sadovskaya and V. Sadovskii, *Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials* (Springer, Heidelberg, 2012).