

УДК 519.6; 517.958:5

doi 10.26089/NumMet.v16r228

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА НАНООПТИЧЕСКИХ ЗАЩИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. А. Гончарский<sup>1</sup>, С. Р. Дурлевич<sup>2</sup>

Рассматривается проблема математического моделирования и синтеза нанооптических элементов, формирующих двумерные изображения для автоматического контроля их подлинности. Обратная задача синтеза ставится в скалярном волновом приближении Френеля. Задача сводится к решению нелинейного операторного уравнения Фредгольма первого рода, для решения которого предлагаются эффективные численные методы. Разработанные нанооптические элементы при их освещении когерентным излучением формируют двумерные изображения, используемые для автоматизированной идентификации. Предложенная процедура идентификации инвариантна относительно поворота и сдвига изображения. С использованием электронно-лучевой литографии изготовлены образцы нанооптических элементов для излучения с длиной волны 650 нанометров. Технология нанолитографии позволяет формировать микрорельеф с точностью до 20 нанометров. Разработанные оптические элементы устойчивы к частичному повреждению микрорельефа и могут быть использованы для идентификации банкнот, документов и др.

---

**Ключевые слова:** нанооптические элементы, плоская компьютерная оптика, электронно-лучевая литография, обратные задачи, компьютерно-синтезированные голограммы, защита от подделок, распознавание образов.

Настоящая статья посвящена задачам синтеза защитных плоских нанооптических элементов для формирования 2D-изображений. Задачи синтеза плоских оптических элементов включают в себя как расчет, так и прецизионное формирование их микрорельефа. В последнее время появилось большое количество публикаций, посвященных синтезу дифракционных оптических элементов. Плоские дифракционные оптические элементы используются как корректоры фазы в оптических системах [1]. Элементы плоской оптики используются в нанотехнологиях для манипуляций положением наночастиц [2]. Дифракционные оптические элементы позволяют осуществлять мониторинг технологических лазеров, фокусировать лазерное излучение, корректировать форму пучка и др. [3, 4]. Элементы плоской оптики используются для задач фокусировки рентгеновского излучения [5]. Дифракционные элементы применяются для эффективного сбора лучистой энергии, например с биочипов [6].

Перспективным направлением использования дифракционной оптики является интерференционная литография. В этой технологии для формирования микрорельефа используются ультрафиолетовые лазеры. Дифракционные оптические элементы позволяют сформировать массивы повторяющихся наноструктур для современных микросхем без использования сложных литографических масок [7, 8]. Можно сказать, что дифракционные оптические элементы в настоящее время работают в диапазоне, включающем в себя рентгеновское излучение, ультрафиолетовое излучение, видимый спектр и инфракрасное излучение.

Во всех перечисленных выше работах решаются две задачи. Первая представляет собой расчет микрорельефа плоского дифракционного оптического элемента, формирующего заданное изображение. Вторая задача связана с технологией формирования рассчитанного микрорельефа.

В настоящей статье исследуются проблемы синтеза плоских оптических элементов для защиты от подделки документов, банкнот или брендов. Хорошо известны голографические защитные элементы. Одним из первых проектов, в которых были использованы голографические элементы, был проект по защите карт VISA, осуществленный более 25 лет назад. Все пластиковые карты VISA до сих пор защищены с помощью этого оптически записанного защитного элемента. Все голографические защитные элементы используют оптическое излучение для записи оригиналов, с которых осуществляется тиражирование. Голографические защитные элементы позволяют формировать признаки для визуального и инструментального контроля их подлинности. Инструментальный контроль предполагает использование специальных

---

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; науч. сотр., e-mail: gonchar@srcc.msu.ru

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. программист, e-mail: sdurlevich@yandex.ru

приборов и квалифицированных экспертов. Результат, а именно идентификация подлинности, в значительной степени зависит от квалификации эксперта. Одним из основных требований, предъявляемых к автоматизированному контролю, является высокий уровень достоверности распознавания. Средства автоматизированного контроля голографических защитных элементов в настоящее время отсутствуют.

В последние 10 лет интенсивно развивается новое направление защитных оптических технологий — нанооптические защитные элементы [9–11]. Для изготовления оригинала нанооптических защитных элементов используется электронно-лучевая литография. Эта технология является наукоемкой и мало распространена. Оборудование для электронно-лучевой литографии очень дорого. Все это позволяет надежно защитить нанооптические элементы от подделки. Нанооптические технологии позволяют предложить большое количество защитных признаков для визуального и инструментального контроля. Использование нанооптических элементов позволяет разрабатывать и автоматизированные системы контроля подлинности защитных элементов. Именно этой задаче и посвящена настоящая публикация.

Для формирования изображения, используемого для автоматизированного контроля подлинности, предлагается использовать лазерное излучение. Существуют компактные лазерные диоды, излучающие как в оптическом диапазоне, так и в ближнем ИК-диапазоне. Оптический элемент формирует 2D-изображение в фокальной плоскости, параллельной плоскости оптического элемента. В системе автоматизированного контроля это изображение регистрируется и анализируется микроконтроллером. В результате анализа зарегистрированного изображения микроконтроллер должен принять решение о принадлежности изображения определенному классу. В простейшем случае это могут быть всего два класса: класс  $K_1$  — “свой” и класс  $K_2$  — “чужой”.

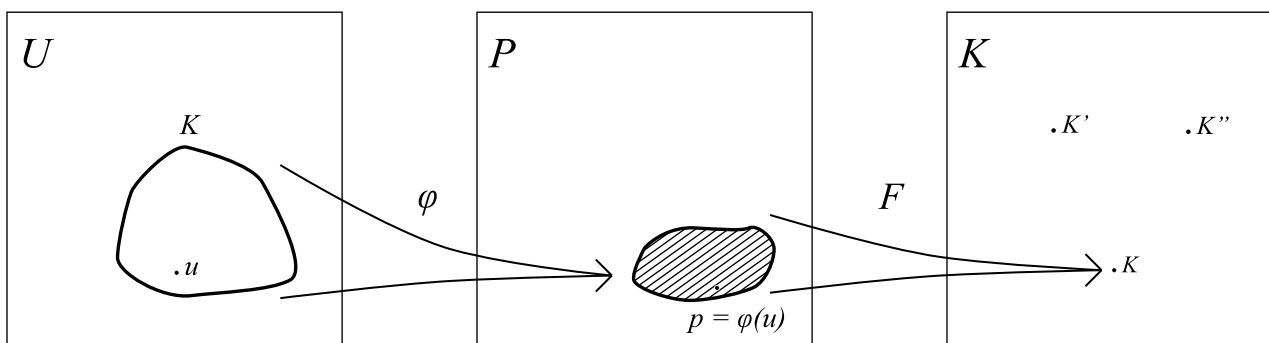


Рис. 1

Таким образом, мы приходим к стандартной задаче распознавания образов, которую можно представить на рис. 1. На вход системы распознавания образов поступают растровые изображения  $u$ , каждое из которых принадлежит классам  $K_1, K_2, \dots, K_M$ . С помощью вычисления числовых или логических функций от изображения определяются признаки  $p = \varphi(u)$ . На основе полученных признаков осуществляется классификация, т.е. определяется принадлежность исходного изображения заданному классу. С математической точки зрения процедуру классификации можно описать как вычисление функции  $F(p)$ , такой, что  $F(\varphi(u)) = i$ , если  $u \in K_i$  [12].

Сформированное для распознавания изображение может быть сдвинуто или повернуто. Распознавание сдвинутых изображений обычно не представляет проблемы. Хорошо известно, например, что модуль преобразования Фурье от функции  $u(x + \Delta x, y + \Delta y)$  и модуль преобразования Фурье функции  $u(x, y)$  совпадают. Корреляционные методы, широко используемые для распознавания образов, используют именно это свойство преобразования Фурье. Наибольшую проблему представляет собой распознавание повернутых изображений. Эта проблема автоматически решается, если выделенные признаки  $p = \varphi(u)$  являются инвариантными относительно поворота изображения  $u$ .

Представим себе, что изображение  $u$  представляет собой яркие точки, расположенные на окружности, как это показано на рис. 2 и 3. В качестве инвариантного признака можно использовать угловые расстояния между точками изображения. Если изображение содержит  $n$  точек, то в качестве инвариантного признака выступает вектор из  $n$  компонент  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Для первого изображения признак представляет собой вектор с четырьмя компонентами  $(90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$ , а для второго — с восемью компонентами  $(45^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ . Таким образом, контролируя выделенный признак для изображений, приведенных на рис. 2 и 3, мы будем осуществлять распознавание изображения, инвариантное относительно поворота изображения на любой угол.

На рис. 4 приведена схема формирования 2D-изображения плоским оптическим элементом. Оптиче-

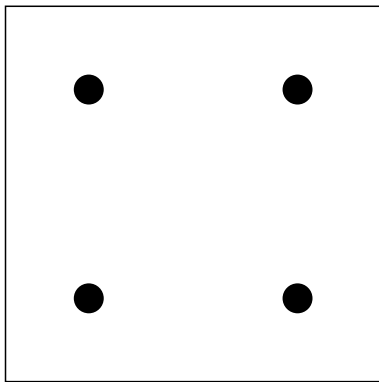


Рис. 2

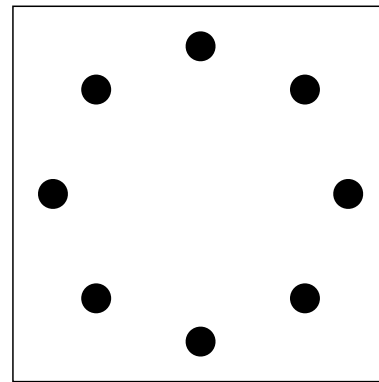


Рис. 3

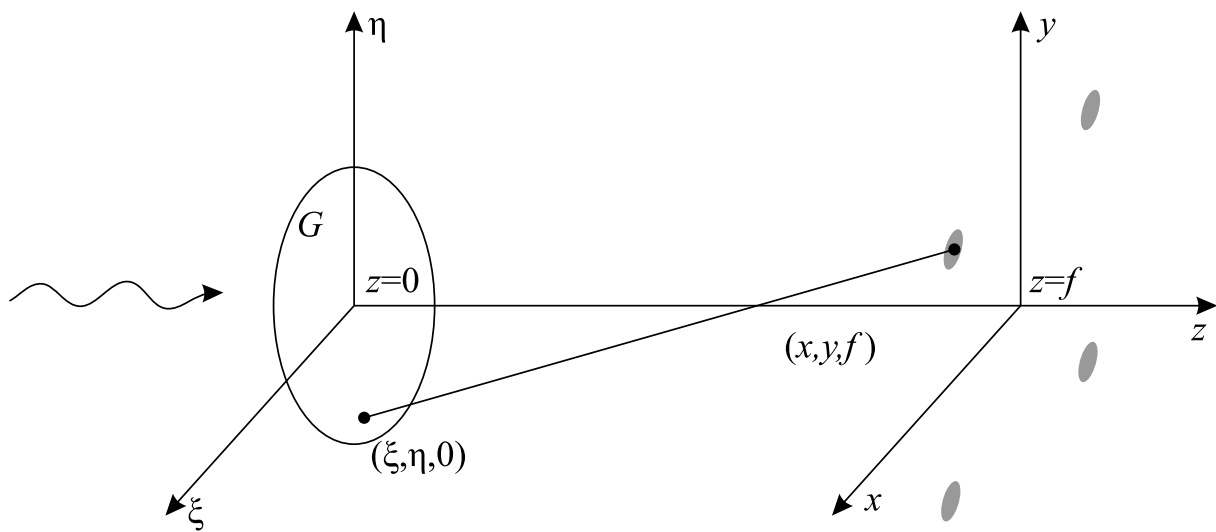


Рис. 4

ский элемент расположен в плоскости  $z = 0$ ,  $\xi$  и  $\eta$  — декартовы координаты в этой плоскости. Схема приведена для плоских оптических элементов, работающих на прохождение. Схема на отражение отличается только тем, что лазерное излучение падает на оптический элемент с другой стороны. Для формулировки обратных задач синтеза элементов плоской оптики будем использовать скалярное волновое приближение Френеля [13]. Пусть  $u(x, y, z)$  — скалярная волновая функция.

Плоский оптический элемент может быть амплитудным или фазовым. Оптический элемент называется плоским, если волновая функция после оптического элемента и волновая функция до оптического элемента связаны соотношением

$$u(\xi, \eta, 0 + 0) = u(\xi, \eta, 0 - 0) \exp(ik\varphi(\xi, \eta)),$$

где  $\varphi(\xi, \eta)$  — фазовая функция оптического элемента в точке  $(\xi, \eta)$ . Для фазовых оптических элементов, поглощение в которых отсутствует, функция  $\varphi(\xi, \eta)$  является вещественной. В амплитудных элементах существует поглощение энергии, так что модуль  $u(\xi, \eta, 0 + 0)$  и модуль  $u(\xi, \eta, 0 - 0)$  не совпадают.

Обратную задачу синтеза плоских оптических элементов можно сформулировать следующим образом:

$$A\varphi(\xi, \eta) = |u(x, y, z)| = F(x, y). \tag{1}$$

Здесь  $F(x, y)$  — заданная функция. Оператор  $A$  определен соотношением

$$A\varphi(\xi, \eta) = \left| \gamma \iint_G u(\xi, \eta, 0 - 0) \exp\left(ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2f}\right) \exp(ik\varphi(\xi, ze)) d\xi d\eta \right|.$$

Обратная задача заключается в расчете фазовой функции из уравнения (1) при заданной функции  $F(x, y)$ . Обратная задача является нелинейной. Задачу (1) поиска приближенного решения можно свести к минимизации функционала  $\|A\varphi - F\|^2$  по  $\varphi$ . Существуют различные методы приближенного решения этой задачи, которая, как известно, относится к классу некорректно поставленных задач [14–17].

В классических работах по теории решения некорректно поставленных задач приближенное решение обратной задачи ищется в классе “гладких” функций [18]. В рамках этого подхода можно решить широкий круг задач формирования 2D-изображений [9]. Существует и второй подход для решения обратных задач синтеза. В этом подходе отказываются от предположения о гладкости искомых функций и используют более широкий класс функций, включая разрывные функции [19].

В настоящей статье для поиска приближенного решения задачи (1) использовался итерационный алгоритм, идея которого предложена Лиземом [20]. Существуют различные модификации этого алгоритма, в которых делаются попытки его улучшения [21–23]. Классический итерационный алгоритм решения задачи (1) можно описать следующим образом. Известно, что волновое поле  $u(x, y, f)$  в плоскости  $z = f$  и волновое поле  $u(\xi, \eta, 0 - 0)$  в плоскости  $z = 0$  связаны соотношением

$$u(x, y, f) = \left| \gamma \iint_G u(\xi, \eta, 0 - 0) \exp\left(ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2f}\right) \exp(ik\varphi(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right|. \quad (2)$$

В итерационном процессе строятся последовательности  $\varphi_n(\xi, \eta)$ , которые минимизируют функционал  $\|A\varphi - F\|^2$ . В качестве начального приближения выбирается произвольная функция  $\varphi_0(\xi, \eta)$ , например  $\varphi_0(\xi, \eta) = \text{const}$ . Для заданного значения  $\varphi = \varphi_0(\xi, \eta)$  по формуле (2) вычисляется  $u(x, y, f)$ . Функция  $u(x, y, f)$  является комплексной. Вычисляется ее фаза  $\bar{\varphi}_0(\xi, \eta)$ , которая искусственным образом приписывается к функции  $F(x, y)$ , т.е. формируется комплексная функция  $F(x, y) \exp(i\bar{\varphi}_0(\xi, \eta)) = u_1(x, y, f)$ . Для заданной функции  $u(x, y, f) = u_1(x, y, f)$  решается уравнение (2) относительно  $\varphi(\xi, \eta)$ . Найденное решение обозначается через  $\varphi_1(\xi, \eta)$  и т.д.

Описанный выше алгоритм является релаксационным [24], т.е.  $\|A\varphi_{n+1} - F\| \leq \|A\varphi_n - F\|$ . Это свойство является, безусловно, положительной характеристикой алгоритма, хотя и вовсе не доказывает сходимости последовательности  $\varphi_n$  и устойчивости предложенного алгоритма в рамках классической теории некорректно поставленных задач. Тем не менее, эти алгоритмы широко используются. Полученное на определенной итерации приближение  $\varphi_n(\xi, \eta)$  дает возможность сформировать искомое изображение.

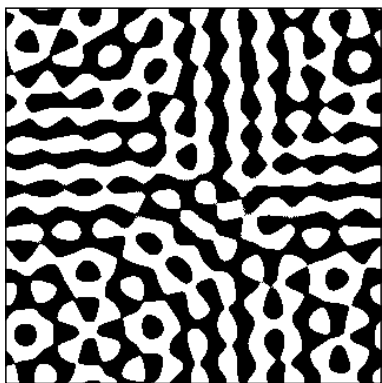


Рис. 5

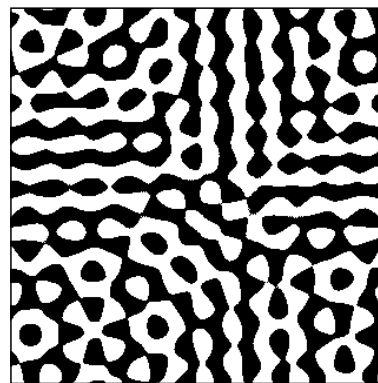


Рис. 6

На рис. 5 приведен фрагмент бинарного амплитудного киноформа, формирующего изображение, представленное на рис. 2, а на рис. 6 приведен фрагмент бинарного амплитудного киноформа, формирующего изображение, представленное на рис. 3. Черным цветом на рис. 5 и 6 обозначены непрозрачные области бинарного киноформа. Размер фрагментов бинарных киноформов составляет  $20 \times 20$  микрон. Амплитудный, или фазовый бинарный киноформ имеет энергетическую эффективность менее 50%. Тем не менее, он хорошо формирует исходное изображение.

На рис. 7 представлен фрагмент фазового оптического элемента — бинарного киноформа, работающего на прохождение и формирующего изображение, представленное на рис. 2. Бинарные фазовые оптические элементы, работающие на прохождение или отражение, имеют бинарный микрорельеф. Будем описывать глубину микрорельефа в разных точках  $(x, y)$  плоского оптического элемента как функцию  $h(x, y)$ . Фазовая функция плоского фазового оптического элемента  $\varphi(x, y)$  однозначно определяется глу-

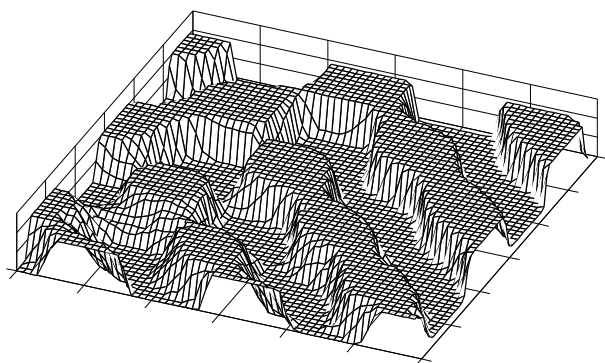


Рис. 7

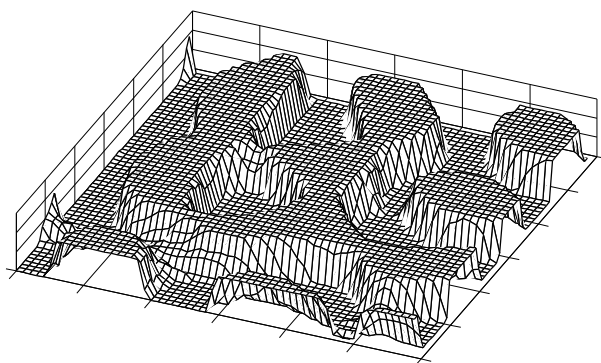


Рис. 8

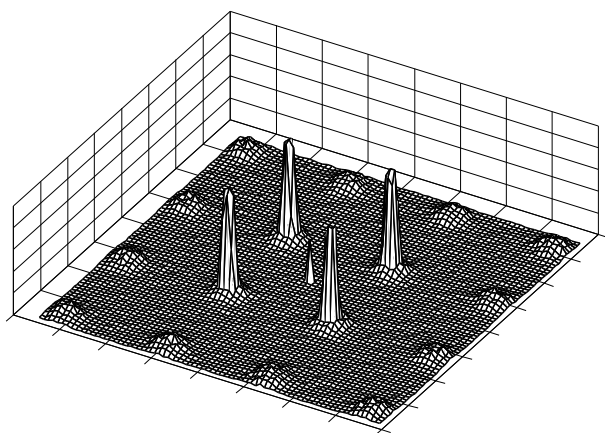


Рис. 9

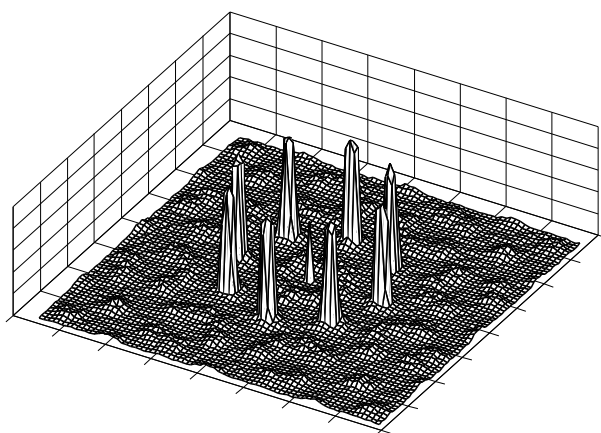


Рис. 10

биной микрорельефа  $h(x, y)$ . И наоборот, глубина микрорельефа  $h(x, y)$  однозначно определяется фазовой функцией  $\varphi(x, y)$  плоского фазового оптического элемента [24].

На рис. 8 приведен фрагмент киноформа, формирующего изображение, представленное на рис. 3. Размеры фрагментов киноформов, представленных на рис. 7 и 8, составляют  $5 \times 5$  микрон. Глубина микрорельефа фазовых оптических элементов составляет порядка 150 нм. Как видно из рис. 7 и 8, микрорельеф бинарных фазовых элементов принимает два значения по глубине. Если зафиксировать одну из координат на рис. 7 или 8, то график сечения микрорельефа имеет 6–7 осцилляций на размере 20 мкм. Размер оптического элемента составляет  $10 \times 10$  мм. Это означает, что характерное количество осцилляций микрорельефа для такого элемента составляет порядка 3–4 тысяч. Таким образом, искомая функция является очень сильно осциллирующей. Эффективность классических методов решения некорректно поставленных задач в этом случае является проблематичной. Используя предложенные в нашей статье итерационные методы, можно рассчитать фазовые оптические элементы, которые с хорошей точностью формируют заданное изображение.

На рис. 9 и 10 приведено распределение интенсивности излучения в фокальной плоскости киноформа. Значение волнового поля  $u(x, y, f)$  вычислено с помощью представления (2). Пик интенсивности в центре изображения соответствует нулевому порядку дифракции.

Киноформ как плоский оптический элемент обладает одним очень важным свойством — каждый фрагмент киноформа формирует всё изображение. Как следствие, даже уничтожение значительной части микрорельефа плоского фазового оптического элемента не очень значительно влияет на формируемое

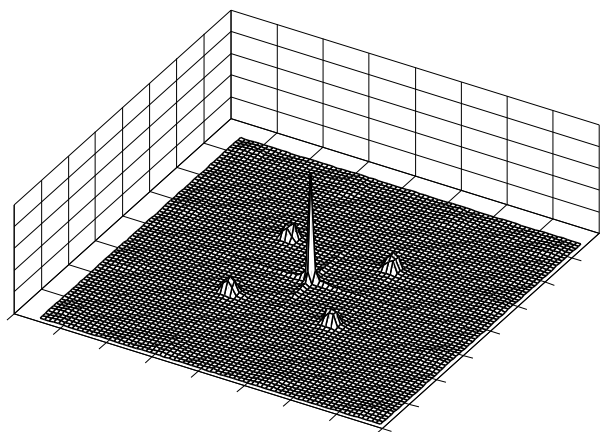


Рис. 11

изображение. На рис. 11 представлено изображение, формируемое киноформом, в котором 30% микрорельефа утрачено. Как видно из рисунка, изображение вполне пригодно для идентификации, заметно лишь увеличение интенсивности в нулевом порядке.

Современная электронно-лучевая технология позволяет изготавливать микрорельеф фазовых оптических элементов с точностью порядка 10–20 нм. Для проверки эффективности разработанных технологий были изготовлены нанооптические элементы, формирующие изображения, представленные на рис. 2 и 3. Длина волны лазерного излучения  $\lambda = 650$  нм. Проведенные тестовые эксперименты показали, что сформированные нанооптическими элементами изображения оказались близкими к заданным. Микрорельеф нанооптических элементов контролировался с помощью атомного силового микроскопа [25]. Разработанные нанооптические элементы могут быть использованы для автоматизированного контроля подлинности документов, банкнот, брендов и др.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sauer H., Chavel P., Erdei G.* Diffractive optical elements in hybrid lenses: modeling and design by zone decomposition // *Applied Optics*. 1999. **38**, N 31. 6482–6486.
2. *Belloni F., Monneret S.* Quadrant kinoform: an approach to multiplane dynamic three-dimensional holographic trapping // *Applied Optics*. 2007. **46**, N 21. 4587–4593.
3. *Tan Q., Yan Y., Jin G., Xu D.* Fine design of diffractive optical element for beam transform // *Proc. SPIE*. Vol. 4443. 2001. 184–188. doi 10.1117/12.446750.
4. *Duan X., Zhou G., Huang Y., Shang Y., Ren X.* Theoretical analysis and design guideline for focusing subwavelength gratings // *Optics Express*. 2015. **23**, N 3. 2639–2646.
5. *Karvinen P. et al.* Kinoform diffractive lenses for efficient nano-focusing of hard X-rays // *Optics Express*. 2014. **22**, N 14. 16676–16685.
6. *Macko P., Whelan M.P.* Fabrication of holographic diffractive optical elements for enhancing light collection from fluorescence-based biochips // *Optics Letters*. 2008. **33**, N 22. 2614–2616.
7. *Jang J.-H. et al.* 3D micro- and nanostructures via interference lithography // *Adv. Funct. Mater.* 2007. **17**, N 16. 3027–3041.
8. *Jenness N.J., Hill R.T., Hucknall A., Chilkoti A., Clark R.L.* A versatile diffractive maskless lithography for single-shot and serial microfabrication // *Optics Express*. 2010. **18**, N 11. 11754–11762.
9. *Гончарский А.А., Гончарский А.В.* Компьютерная оптика. Компьютерная голография. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004.
10. *Гончарский А.А., Дурлевич С.Р.* Об одной задаче синтеза нанооптических элементов для формирования динамических изображений // *Вычислительные методы и программирование*. 2013. **14**. 343–347.
11. *Гончарский А.А.* Об одной задаче синтеза нанооптических элементов // *Вычислительные методы и программирование*. 2008. **9**. 405–408.
12. *Гончарский А.В., Кочкиков И.В., Матвиенко А.Н.* Реконструктивная обработка и анализ изображений в задачах вычислительной диагностики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993.
13. *Boutry G.A.* Augustin Fresnel: his time, life and work, 1788–1827 // *Science Progress*. Vol. 36. London: Murray, 1949. 587–604.
14. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // *Докл. АН СССР*. 1963. **151**, № 3. 501–504.
15. *Tikhonov A.N.* On the problems with approximately specified information // *Ill-posed problems in the natural sciences*. М.: Mir, 1987. 13–20.
16. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Сиб. отд. АН СССР, 1962.
17. *Иванов В.К.* О приближенном решении операторных уравнений первого рода // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 1966. **6**, № 6. 1089–1094.
18. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-posed problems: theory and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
19. *Гончарский А.А., Туницкий Д.В.* Об обратной задаче синтеза оптических элементов для лазерного излучения // *Вычислительные методы и программирование*. 2006. **7**. 138–162.
20. *Lesem L.B., Hirsch P.M., Jordan J.A.* The kinoform: a new wavefront reconstruction device // *IBM J. Res. Dev.* 1969. **13**. 105–155.
21. *Kuzmenko A.V.* Weighting iterative Fourier transform algorithm of the kinoform synthesis // *Optics Letters*. 2008. **33**, N 10. 1147–1149.
22. *Yang S., Shimomura T.* Iterative multikinoform method for improving the reconstruction of kinoform // *Optical Review*. 1997. **4**, N 6. 660–665.
23. *Nozaki S., Chen Y.-W., Nakao Z.* A new approach based on simulated annealing to kinoform optimization // *Proc. SPIE*. Vol. 3956. 2000. 160–166. doi 10.1117/12.379990

24. Гончарский А.В., Попов В.В., Степанов В.В. Введение в компьютерную оптику. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.  
 25. Sarid D. Scanning force microscopy. New York: Oxford Univ. Press, 1991.

Поступила в редакцию  
26.03.2015

## On a Problem of the Synthesis of Nano-Optical Protection Elements

A. A. Goncharsky<sup>1</sup> and S. R. Durlevich<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru*

<sup>2</sup> *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Leading Programmer, e-mail: sdurlevich@yandex.ru*

Received March 26, 2015

**Abstract:** This paper deals with the mathematical modeling and the synthesis of nano-optical elements for the forming of 2D images used for automated identification. The inverse problem of synthesis is considered in Fresnel's scalar wave approximation. The problem is reduced to the solution of a nonlinear Fredholm operator equation of the first kind. Some efficient numerical iterative methods are developed to solve the inverse problem. When illuminated by a coherent light, the designed nano-optical elements produce 2D images used for the automated identification. The proposed identification procedure is invariant with respect to rotations and shifts of images. The electron beam lithography was used to produce samples of nano-optical elements for the case of 650 nm wavelength. The microfabrication technology allows forming a microrelief with 20 nm accuracy. Such nano-optical elements are resistant against the damage of microreliefs and can be used for the verification of banknotes, documents, etc.

**Keywords:** nano-optical elements, flat computer optics, electron beam lithography, inverse problems, computer generated hologram, protection against counterfeiting, pattern recognition.

### References

1. H. Sauer, P. Chavel, and G. Erdei, "Diffractive Optical Elements in Hybrid Lenses: Modeling and Design by Zone Decomposition," *Appl. Opt.* **38** (31), 6482–6486 (1999).
2. F. Belloni and S. Monneret, "Quadrant Kinoform: An Approach to Multiplane Dynamic Three-Dimensional Holographic Trapping," *Appl. Opt.* **46** (21), 4587–4593 (2007).
3. Q. Tan, Y. Yan, G. Jin, and D. Xu, "Fine Design of Diffractive Optical Element for Beam Transform," *Proc. SPIE* **4443**, 184–188 (2001). doi 10.1117/12.446750
4. X. Duan, G. Zhou, Y. Huang, et al., "Theoretical Analysis and Design Guideline for Focusing Subwavelength Gratings," *Opt. Express* **23** (3), 2639–2646 (2015).
5. P. Karvinen, D. Grolimund, M. Willmann, et al., "Kinoform Diffractive Lenses for Efficient Nano-Focusing of Hard X-rays," *Opt. Express* **22** (14), 16676–16685 (2014).
6. P. Macko and M. P. Whelan, "Fabrication of Holographic Diffractive Optical Elements for Enhancing Light Collection from Fluorescence-Based Biochips," *Opt. Lett.* **33** (22), 2614–2616 (2008).
7. J.-H. Jang, C. K. Ullal, M. Maldovan, et al., "3D Micro- and Nanostructures via Interference Lithography," *Adv. Funct. Mater.* **17** (16), 3027–3041 (2007).
8. N. J. Jenness, R. T. Hill, A. Hucknall, et al., "A Versatile Diffractive Maskless Lithography for Single-Shot and Serial Microfabrication," *Opt. Express* **18** (11), 11754–11762 (2010).
9. A. V. Goncharsky and A. A. Goncharsky, *Computer Optics and Computer Holography* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2004) [in Russian].
10. A. A. Goncharsky and S. R. Durlevich, "A Problem of Synthesis of Nano-Optical Elements for the Formation of Dynamic Images," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 343–347 (2013).
11. A. A. Goncharsky, "On the Problem of Synthesis of Nano-Optical Elements," *Vychisl. Metody Programm.* **9**, 405–408 (2008).
12. A. V. Goncharsky, I. V. Kochikov, and A. N. Matvienko, *Reconstructive Processing and Analysis of Images in the Problems of Computational Diagnostics* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1993) [in Russian].

13. G. A. Boutry, "Augustin Fresnel: His Time, Life and Work, 1788–1827," in *Science Progress* (Murray, London, 1949), Vol. 36, pp. 587–604.
14. A. N. Tikhonov, "Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **151** (3), 501–504 (1963) [*Sov. Math. Dokl.* **5** (4), 1035–1038 (1963)].
15. A. N. Tikhonov, "On the Problems with Approximately Specified Information," in *Ill-Posed Problems in the Natural Sciences* (Mir, Moscow, 1987), pp. 13–20.
16. M. M. Lavrentyev, *Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics* (Sib. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1962; Heidelberg, Springer, 1967).
17. V. K. Ivanov, "The Approximate Solution of Operator Equations of the First Kind," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **6** (6), 1089–1094 (1966) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **6** (6), 197–205 (1966)].
18. A. Bakushinsky and A. Goncharsky, *Ill-Posed Problems: Theory and Applications* (Kluwer, Dordrecht, 1994).
19. A. A. Goncharsky and D. V. Tunitsky, "The Inverse Problem of Synthesis of Optical Elements for Laser Radiation," *Vychisl. Metody Programm.* **7**, 138–162 (2006).
20. L. B. Lesem, P. M. Hirsch, and J. A. Jordan, "The Kinoform: A New Wavefront Reconstruction Device," *IBM J. Res. Dev.* **13**, 105–155 (1969).
21. A. V. Kuzmenko, "Weighting Iterative Fourier Transform Algorithm of the Kinoform Synthesis," *Opt. Lett.* **33** (10), 1147–1149 (2008).
22. S. Yang and T. Shimomura, "Iterative Multikinoform Method for Improving the Reconstruction of Kinoform," *Opt. Rev.* **4** (6), 660–665 (1997).
23. S. Nozaki, Y.-W. Chen, and Z. Nakao, "A New Approach Based on Simulated Annealing to Kinoform Optimization," *Proc. SPIE* **3956**, 160–166 (2000). doi 10.1117/12.379990
24. A. V. Goncharsky, V. V. Popov, and V. V. Stepanov, *Introduction to Computer Optics* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1991) [in Russian].
25. D. Sarid, *Scanning Force Microscopy* (Oxford Univ. Press, New York, 1991).