УДК 519.6 doi 10.26089/NumMet.v16r108

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА МНОГОУГОЛЬНИКАХ

И. О. Арушанян[1]

Рассматривается первая краевая задача плоской теории упругости в области с конечным числом угловых точек. Задаче ставится в соответствие система граничных интегральных уравнений теории потенциала. Исследуется вопрос об эффективном вычислении приближенного решения исходной краевой задачи на основе численного решения системы граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: первая краевая задача, потенциал двойного слоя, теория потенциала, граничные интегральные уравнения, угловые точки, метод квадратур, плоская теория упругости.

1. Введение. При численном решении граничных интегральных уравнений как классическим методом квадратур, так и методом граничных элементов приходится решать системы линейных уравнений с несимметричными заполненными матрицами. Для экономии вычислительных затрат можно предложить два способа. Первый состоит в выборе узлов квадратуры или граничных элементов таким образом, чтобы матрица аппроксимирующей системы имела вид, позволяющий либо быстро решить систему прямыми методами, либо построить эффективно сходящийся к решению итерационный процесс. Второй способ состоит в уменьшении размерности системы за счет повышения точности аппроксимации. Если граница области содержит угловые точки, то задача построения аппроксимирующей линейной системы существенно усложняется, так как соответствующие интегральные уравнения становятся слабо сингулярными.

На таких областях для некоторых типов прямых граничных интегральных уравнений, в которых неизвестными являются функции, имеющие смысл в содержательной постановке задачи, за счет специального выбора граничных элементов можно обеспечить экспоненциальную относительно числа степеней свободы скорость сходимости [14]. При численном решении интегральных уравнений теории потенциала второго рода более простым в практической реализации, чем метод граничных элементов, является метод квадратур. Стандартный подход в этом случае состоит в построении составной квадратурной формулы, элементарные отрезки которой сгущаются к угловым точкам. На каждом элементарном отрезке используется квадратурная формула с одинаковым числом узлов. Этот метод обеспечивает алгебраический порядок точности относительно числа узлов [13, 15–21]. Известно, что если граница области и граничные условия являются аналитическими, то метод, основанный на использовании составной формулы средних прямоугольников, имеет экспоненциальную скорость сходимости [8]. В этой связи возникает вопрос о возможности численного решения интегральных уравнений теории потенциала методом квадратур с экспоненциальной точностью также и в случае, когда граница области имеет угловые точки.

Этот результат может быть достигнут, если аппроксимация интегралов в граничных уравнениях производится с использованием составных квадратурных формул Гаусса, в которых элементарные отрезки сгущаются к угловым точкам контура, а число узлов элементарных формул меняется при приближении к углам. Такой подход позволяет получить экспоненциальную точность относительно числа узлов. Этот метод предложен в [1–7] при решении граничных интегральных уравнений теории потенциала.

В настоящей статье рассматривается система граничных интегральных уравнений плоской теории упругости теории потенциала двойного слоя в области, являющейся многоугольником. Построение эффективного алгоритма численного решения соответствующей системы граничных интегральных уравнений теории потенциала осуществлено в [3, 6]. Здесь мы исследуем вопрос о приближенном вычислении решения исходной краевой задачи с использованием численного решения системы граничных интегральных уравнений.

2. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^2$ с границей Γ, являющейся замкнутой кривой без самопересечений и допускающей следующее параметрическое представление:

$$\Gamma = \Big\{x = x(s) = \big(x_1(s), x_2(s)\big),\ s \in [0, T],\ x(0) = x(T)\Big\}.$$

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; доцент, e-mail: i.arushan@gmail.com

Здесь s — натуральный параметр (параметр длины). В дальнейшем будем считать, что

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^{J-1} \Gamma_j \,,$$

где Γ_j — прямолинейный отрезок, соединяющий точки P_j и P_{j+1} (предполагаем, что $P_J = P_0$). Величина внутреннего угла области Ω при вершине P_j обозначается через α_j, причем для всех j имеет место неравенство $0 < \alpha_j < 2\pi$.

Рассмотрим следующую первую краевую задачу теории упругости:

$$\begin{aligned} &\mu\Delta\overrightarrow{u} + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\overrightarrow{u} = 0, \quad x\in\Omega, \\ &\overrightarrow{u} = \overrightarrow{F}, \quad x\in\Gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)^T$ — неизвестная вектор-функция, λ и μ — постоянные Ламе, $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2)^T$.

В дальнейшем будем считать, что функции F_i, $i = 0, 1, 2$, являются непрерывными бесконечно дифференцируемыми всюду на Γ, кроме, может быть, угловых точек, где допускаются особенности вида

$$(x - P_j)^\theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

Решение задачи (1) будем искать в виде плоского потенциала двойного слоя:

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \big(T(\partial_y, \overrightarrow{n})\,\Gamma(y-x)\big)\,\overrightarrow{\varphi}(y)\,dl_y,$$

где $\Gamma(y-x)$ — фундаментальное решение задачи (1), представляющее собой матрицу с элементами

$$\Gamma_{ij}(y-x) = \frac{\lambda+3\mu}{\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left(\delta_i^j \ln|x-y| - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^2}\right),$$

а через $T(\partial_y, \overrightarrow{n})$ обозначен оператор псевдонапряжения (см., например, [11, 12]):

$$\big(T(\partial_y, \overrightarrow{n})\big)_{ij} = \mu\delta_i^j\,\frac{\partial}{\partial n_y} + (\lambda+\mu)\,n_i(y)\,\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}\left(n_j(y)\,\frac{\partial}{\partial y_i} - n_i(y)\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Здесь $i, j = 1, 2$ и δ_i^j — символ Кронекера.

Тогда компоненты неизвестной вектор-функции $\overrightarrow{\varphi}$ являются решением следующей системы интегральных уравнений:

$$\overrightarrow{\varphi}(x) + \int\limits_\Gamma \big(T(\partial_y, \overrightarrow{n})\,\Gamma(y-x)\big)\,\overrightarrow{\varphi}(y)\,dl_y = 2\overrightarrow{F}(x). \tag{2}$$

Система (2) однозначно разрешима в пространстве непрерывных функций при условии непрерывности функции $\overrightarrow{F}$ [10, 11]. Асимптотика функции $\overrightarrow{\varphi}$ вблизи угловых точек контура исследована в работах [3, 9, 11] в случае, когда кривая Γ является многоугольником. Обобщением этого результата является

Утверждение 1. *Для каждого $j = 0, \dots, J$ введем в рассмотрение величину β_j, являющуюся корнем уравнения*

$$\left(\left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right)\sin\beta_j\big(\pi+|\pi-\alpha_j|\big)\right)^2 = \Big(\beta_j\sin\big(\pi+|\pi-\alpha_j|\big)\Big)^2$$

с наименьшей положительной вещественной частью. Тогда существует постоянная c, зависящая только от вида кривой Γ и функции $\overrightarrow{F}$, такая, что для решения системы (2) при каждом $x\in\Gamma$ справедливо неравенство

$$\big|\varphi_i(x) - \varphi_i(P_j)\big| \leqslant c\,\big|x - P_j\big|^{\lambda_j} \tag{3}$$

при некотором $\lambda_j \in (0, \beta_j)$.

Перейдем к построению численного метода решения рассматриваемой системы интегральных уравнений. Обозначим

$$T(\partial_y, \overrightarrow{n})\Gamma(y-x) \equiv K(x,y), \quad 2\overrightarrow{F} \equiv \overrightarrow{f}.$$

Геометрические свойства потенциала двойного слоя позволяют записать систему (2) в эквивалентном виде

$$2\overrightarrow{\varphi}(x) + \int\limits_{\Gamma} K(x,y)\,(\overrightarrow{\varphi}(y) - \overrightarrow{\varphi}(x))\,dl_y = \overrightarrow{f}(x). \tag{4}$$

Неравенство (3) позволяет применить полученные в [3, 6] результаты для доказательства следующего утверждения.

Утверждение 2. *При сделанных выше предположениях существует натуральное число n_1, такое, что для любого натурального $n > n_1$ может быть построена квадратурная формула с узлами $\{y_j^{(n)}\}$ и коэффициентами $\{A_j^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, для которой справедливы неравенства*

$$\max_{x\in\Gamma}\left\|\int\limits_{\Gamma} K(x,y)\big(\overrightarrow{\varphi}(y) - \overrightarrow{\varphi}(x)\big)\,dl_y - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\big(x, y_j^{(n)}\big)\big(\overrightarrow{\varphi}(y_j^{(n)}) - \overrightarrow{\varphi}(x)\big)\right\| \leqslant b_1 \exp(-c_1\sqrt{n}),$$

где $\overrightarrow{\varphi}$ — решение системы интегральных уравнений (4), а все постоянные строго положительны и не зависят от выбора n.

Введенное семейство квадратурных формул позволяет при каждом $n > n_1$ построить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &2\Phi_{1,i}^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)}\left(\sum_{m=1}^{2} K_{1,m}(y_i^{(n)}, y_j^{(n)})\right)\left(\Phi_{m,j}^{(n)} - \Phi_{m,i}^{(n)}\right) = f_1(y_i^{(n)}),\\ &2\Phi_{2,i}^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)}\left(\sum_{m=1}^{2} K_{2,m}(y_i^{(n)}, y_j^{(n)})\right)\left(\Phi_{m,j}^{(n)} - \Phi_{m,i}^{(n)}\right) = f_2(y_i^{(n)}). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $i = 1, \ldots, n$. В случае разрешимости этой системы можно построить вектор-функцию $\overrightarrow{\varphi}^{(n)}$, компоненты которой при каждом $x \in \Gamma$ могут быть представлены как решение следующей системы двух линейных уравнений:

$$\left(2 - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K_{1,1}(x, y_j^{(n)})\right)\varphi_1^{(n)}(x) - \left(\sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K_{1,2}(x, y_j^{(n)})\right)\varphi_2^{(n)}(x) =$$
$$= f_1(x) - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)}\left(\sum_{m=1}^{2} K_{1,m}(x, y_j^{(n)})\Phi_{m,j}^{(n)}\right),$$

$$-\left(\sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K_{2,1}(x, y_j^{(n)})\right)\varphi_1^{(n)}(x) + \left(2 - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K_{2,2}(x, y_j^{(n)})\right)\varphi_2^{(n)}(x) =$$
$$= f_2(x) - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)}\left(\sum_{m=1}^{2} K_{2,m}(x, y_j^{(n)})\Phi_{m,j}^{(n)}\right).$$

Осуществимость этого представления исследована в работах [3, 6, 7].

Утверждение 3. *Существует натуральное число n_2, такое, что для любого натурального $n > n_2$ система линейных алгебраических уравнений (5) однозначно разрешима и справедливо неравенство*

$$\max_{x\in\Gamma}\left\|\overrightarrow{\varphi}(x) - \overrightarrow{\varphi}_n(x)\right\| \leqslant b_2 \exp(-c_1\sqrt{n}),$$

где $\overrightarrow{\varphi}$ — решение уравнения (4), постоянная c_1 определена в утверждении 2, а постоянная b_2 положительна и не зависит от выбора n.

3. Численное решение первой краевой задачи теории упругости. Исследуем теперь вопрос о численном решении исходной краевой задачи (1) на основе полученного приближенного решения системы граничных интегральных уравнений (4).

Учитывая введенную параметризацию кривой Γ, мы можем представить решение задачи (1) в произвольной внутренней точке $x = (x_1,\, x_2)$ области Ω в виде

$$\overrightarrow{u}(x) = \frac{1}{2}\int_0^T K(x_1, x_2, t)\,\overrightarrow{\varphi}(t)\,dt\,. \tag{6}$$

Здесь $K(x_1, x_2, t)$ — матрица с элементами

$$K_{k,l}(s,t) = M(x_1, x_2, t)\left(a\delta_k^l + b\frac{\big(x_k - x_k(t)\big)\big(x_l - x_l(t)\big)}{\big(x_1 - x_1(t)\big)^2 + \big(x_2 - x_2(t)\big)^2}\right),$$

где

$$M(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{x_1'(t)\big(x_2 - x_2(t)\big) - x_2'(t)\big(x_1 - x_1(t)\big)}{\big(x_1 - x_1(t)\big)^2 + \big(x_2 - x_2(t)\big)^2},$$

$$a = \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu}, \quad b = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu}, \quad k, l = 1, 2.$$

Естественно использовать квадратурную формулу из утверждения 2 для приближенного вычисления интеграла (6). Возьмем в качестве приближенного решения функцию $\overrightarrow{u}_n$, определенную в каждой точке $x = (x_1, x_2)$ области Ω по формуле

$$\overrightarrow{u}_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K(x_1, x_2, t_j^{(n)})\,\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t_j^{(n)})\,.$$

Исследуем вопрос о величине погрешности этого представления.

Утверждение 4. *Существует число $Q > 1$, такое, что при каждом $x \in \Omega$ выполнено неравенство*

$$\left\|\overrightarrow{u}(x) - \overrightarrow{u}_n(x)\right\| \leqslant c(x)\ (Q(x))^{-c_1\sqrt{n}}\ ,$$

где $0 < c(x) \leqslant c_2/r(x)$, $1 < Q(x) \leqslant 1 + c_2 r(x) \leqslant Q$, $r(x)$ — расстояние от точки x до кривой Γ. Здесь константы c_1 и c_2 строго положительны и не зависят от выбора n.

Доказательство. Нам необходимо оценить при каждом $x \in \Omega$ погрешность $\overrightarrow{R}(x)$ квадратуры

$$\int_0^T K(x_1, x_2, t)\,\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K(x_1, x_2, t_j^{(n)})\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t_j^{(n)}) + \overrightarrow{R}(x)\,.$$

Будем использовать методику, предложенную в [3] при доказательстве утверждения 2. Центральным местом доказательства является оценка при каждом j величины $\overrightarrow{R}_j(x)$:

$$\int_{s_j}^{s_{j+1/2}} K(x_1, x_2, t)\,\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t)\,dt = \sum_{t_j^{(n)} \in [s_j, s_{j+1/2}]} A_j^{(n)} K(x_1, x_2, t_j^{(n)})\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t_j^{(n)}) + \overrightarrow{R}_j(x)\,,$$

где

$$s_{j+1/2} = s_j + 0.5\,(s_{j+1} - s_j).$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$x(s_j) = (0, 0)\,, \quad x(s_{j+1/2}) = (1, 0).$$

В [3] при построении составной квадратурной формулы (5) отрезок $[s_j, s_{j+1/2}]$ разбивался на элементарные отрезки следующими $N + 1$ точками:

$$s_j < t_N < \ldots < t_1 < t_0 = s_{j+1/2}\,,$$

где $t_k = s_j + (1 + \Theta_j)^{-k}$, $k = 0, \ldots, N$, $0 < \Theta_j < 1$, $N = O\big(\sqrt{n}\big)$.

Из результатов, полученных в [3], следует, что при каждом $k = 1, \ldots, N$ построенная выше функция $\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t)$ допускает ограниченное постоянной, не зависящей от k, аналитическое продолжение с отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ в круг на комплексной плоскости с центром в точке $(0{,}5\,(t_{k-1}+t_k), 0)$ и радиусом

$$r_k = 0.5\left(1 - (1+\Theta_j)^{-1}\right)(1+\Theta_j)^{2-k}.$$

На каждом элементарном отрезке $[t_k, t_{k-1}]$ строилась квадратура Гаусса по $n_{j,k}$ узлам, определяемым неравенством

$$n_{j,k} \geqslant \left[\frac{\lambda_j (N-k)\ln(1+\Theta_j) + \ln N}{4\Theta_j(1+\Theta_j)^{-1}}\right] + 1.$$

Если подынтегральная функция допускает аналитическое продолжение с отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ вещественной оси в эллипс на комплексной плоскости с фокусами в точках $(t_k, 0)$, $(t_{k-1}, 0)$ и проходящий через точку $(0.5\,(t_{k-1}+t_k) - r_k, 0)$ и это аналитическое продолжение ограничено в данном эллипсе величиной порядка $O\left((1+\Theta_j)^{k(1-\lambda_j)}\right)$, то погрешность элементарной квадратуры оценивается сверху величиной

$$R_k = \mathrm{const}\cdot\,(1+\Theta_j)^{-k\lambda_j} Q_k^{-2n_{j,k}}\,,$$

где Q_k — сумма полуосей эллипса, полученного из построенного при отображении

$$z \to \frac{2z - (t_{k-1}+t_k)}{t_{k-1}-t_k}\,.$$

Пусть точка x удалена от отрезка $[t_{k-1}, t_k]$ на расстояние, большее $2(1+\Theta_j)^{k(\lambda_j-1)}$. Тогда подынтегральная функция $K(x_1,x_2,t)\,\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t)$ допускает аналитическое продолжение в эллипс с фокусами в точках $(t_k, 0)$, $(t_{k-1}, 0)$ и проходящий через точку

$$\Big(0.5\,(t_{k-1}+t_k), (1+\Theta_j)^{k(\lambda_j-1)}\Big)\,,$$

причем это аналитическое продолжение ограничено в данном эллипсе величиной $\mathrm{const}\cdot\,(1+\Theta_j)^{k(1-\lambda_j)}$.

Сделанные замечания гарантируют следующую оценку:

$$\left\|\int\limits_{t_k}^{t_{k-1}} K(x_1,x_2,t)\,\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t)\,dt - \sum_{t_j^{(n)}\in[t_k,t_{k-1}]} A_j^{(n)} K\big(x_1,x_2,t_j^{(n)}\big)\,\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t_j^{(n)})\right\| = R_{j,k}(x) \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\cdot\,(1+\Theta_j)^{-k\lambda_j}\left(Q_k(x)\right)^{-2n_{j,k}}\,,$$

где $Q_k(x) > Q_k$.

Таким образом, если точка x достаточно удалена от всех элементарных отрезков кривой Γ, определяющих составную квадратурную формулу (5), то выбор чисел $n_{j,k}$ гарантирует, что

$$\big\|\overrightarrow{R}(x)\big\| \leqslant \mathrm{const}\cdot\, e^{-c\sqrt{n}}\,.$$

Что произойдет, если точка x будет приближаться к границе?

Пусть в сделанных выше обозначениях расстояние от точки x до отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ участка границы Γ_j равно $2d$, где d удовлетворяет неравенству $0 < d < (1+\Theta_j)^{k(\lambda_j-1)}$.

Тогда, повторяя сделанные выше выкладки, получим, что

$$R_{j,k} \leqslant \mathrm{const}\cdot\frac{(1+\Theta_j)^k}{d}\,\left(Q_k(d)\right)^{-2n_{jk}}\,,\quad 1 < Q_k(d) < 1 + \mathrm{const}\cdot\, d\,,$$

поскольку у эллипса с фокусами $(t_k, 0)\,, (t_{k-1}, 0)$, в который подынтегральная функция может быть аналитически продолжена, сумма полуосей с уменьшением d стремится к $(t_{k-1}-t_k)/2$.

Полученная оценка доказывает сформулированное утверждение.

Таким образом, рассмотренный способ вычисления решения задачи (1) не может быть признан удовлетворительным, поскольку при его применении не удается гарантировать близость точного и приближенного решений в любой внутренней точке области. Однако этот способ допускает следующую простую модификацию.

Рассмотрим случай, когда в принятых при доказательстве утверждения 4 обозначениях расстояние от точки x до отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ участка Γ_j границы Γ равно $2d$, где $d < (1+\Theta_j)^{k(\lambda_j-1)}$.

Заменим функцию $\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t)$ на отрезке $[t_k, t_{k-1}]$ интерполяционным многочленом $\overrightarrow{L}_{2n_j,k}(t)$ по следующим точкам:

$$\frac{t_k+t_{k-1}}{2}+\frac{t_{k-1}-t_k}{2}\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{4n_{j,k}}\right), \quad m=1,\dots,2n_{j,k}\,.$$

Так как $n_{j,k}=O\left(\sqrt{n}\right)$, то для вычисления значений $\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t)$ в этих точках потребуется $O\left(n\sqrt{n}\right)$ арифметических действий, при этом

$$\max_{[t_k,t_{k-1}]}\left\|\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t)-\overrightarrow{L}_{2n_j,k}(t)\right\|\leqslant \mathrm{const}\cdot Q_k^{-2n_{j,k}},$$

где величина $Q_k > 1$ и определена при доказательстве утверждения 4. Имеем

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k-1}} K(x_1,x_2,t)\,\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t)\,dt=\int\limits_{t_k}^{t_{k-1}} K(x_1,x_2,t)\,\overrightarrow{L}_{2n_j,k}(t)\,dt+O\left(\mathrm{e}^{-c\sqrt{n}}\right)\,.$$

Интеграл в правой части этого представления достаточно вычислить с точностью $O\left(\mathrm{e}^{-c\sqrt{n}}\right)$. Для этого можно применить стандартный алгоритм с автоматическим выбором шага интегрирования, построенный на основе более простой квадратурной формулы. Следует отметить, что число отрезков $[t_k, t_{k-1}]$, лежащих на $[0,1]$, таких, что фиксированная точка $x\in\Omega$ находится от каждого из них на расстоянии, меньшем $2(1+\Theta)^{k(\lambda_j-1)}$, конечно и не зависит от n, а только от положения точки x.

Пусть ставится задача вычисления с точностью $\varepsilon>0$ приближенного решения задачи (1) в m внутренних точках области Ω. Учитывая, что для определения приближенного решения интегрального уравнения (3) надо решить систему линейных алгебраических уравнений с $n\sim\ln^2 1/\varepsilon$ неизвестными, суммарные вычислительные затраты составят $O\left(\ln^6 1/\varepsilon+m\ln^3 1/\varepsilon\right)$ операций.

Предложенная оценка является несколько завышенной, так как если точка x достаточно удалена от границы области, то в ней приближенное решение определяется за $O(n)$, а не за $O\big(n\sqrt{n}\big)$ операций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13–01–00096, 14–01–00731 и 15–01–08023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арушанян И.О.* О численном решении граничных интегральных уравнений второго рода в областях с угловыми точками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. **36**, № 6. 101–113.
2. *Арушанян И.О.* Применение метода граничных интегральных уравнений для численного решения задачи Дирихле в областях с угловыми точками // Вычислительные методы и программирование. 2000. **1**. 1–7.
3. *Арушанян И.О.* Применение метода квадратур для решения граничных интегральных уравнений плоской теории упругости на многоугольниках // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**. 142–154.
4. *Арушанян И.О.* Семейство квадратурных формул для численного решения граничных интегральных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 461–467.
5. *Арушанян И.О.* Численное решение граничных интегральных уравнений на криволинейных многоугольниках // Вестник Московского ун-та. Серия 1: Математика и механика. 2014. № 4. 55–57.
6. *Арушанян И.О.* Экспоненциально сходящийся метод решения граничных интегральных уравнений на многоугольниках // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**, вып. 3. 417–426.
7. *Arushanyan I.O.* An exponentially convergent method for solving boundary integral equations in domains with corner points. Report No. 9628. Nijmegen: Univ. of Nijmegen, 1996.
8. *Бахвалов Н.С.* Об оптимальной скорости интегрирования аналитических функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. **7**, № 5. 1011–1020.
9. *Заргарян С.С., Мазья В.Г.* Об асимптотике решений интегральных уравнений теории потенциала в окрестности угловых точек контура // Прикл. матем. и механ. 1984. **48**, вып. 1. 169–174.
10. *Мазья В.Г., Соловьев А.А.* Интегральные уравнения теории логарифмического потенциала на контурах с пиком в пространствах Гёльдера // Алгебра и анализ. 1998. **10**, № 5. 85–142.
11. *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Т. 27. М.: ВИНИТИ, 1988. 131–228.
12. *Партон В.З., Перлин П.И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977.
13. *Atkinson K.E.* The numerical solution of integral equations of the second kind. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
14. *Babuška I., Guo B.Q., Stephan E.P.* On the exponential convergence of the h–p version for boundary element Galerkin methods on polygons // Math. Meth. Appl. Sci. 1990. **12**, N 5. 413–427.

15. *Bremer J., Rokhlin V.* Efficient discretization of Laplace boundary integral equations on polygonal domains // J. Comput. Phys. 2010. **229**, N 7. 2507–2525.
16. *Chandler G.A.* Superconvergent approximations to the solution of a boundary integral equation on polygonal domains // SIAM J. Numer. Anal. 1986. **23**, N 6. 1214–1229.
17. *Graham I.G., Chandler G.A.* High-order methods for linear functionals of solutions of second kind integral equations // SIAM J. Numer. Anal. 1988. **25**, N 5. 1118–1137.
18. *Helsing J., Ojala R.* Corner singularities for elliptic problems: integral equations, graded meshes, quadrature, and compressed inverse preconditioning // J. Comput. Phys. 2008. **227**, N 20. 8820–8840.
19. *Kong W.Y., Bremer J., Rokhlin V.* An adaptive fast direct solver for boundary integral equations in two dimensions // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2011. **31**, N 3. 346–369.
20. *Kress R.* A Nyström method for boundary integral equations in domains with corners // Numer. Math. 1990/91. **58**, N 1. 145–161.
21. *Kress R.* Linear integral equations. Heidelberg: Springer, 1999.

Поступила в редакцию
03.01.2015

Application of the Boundary Integral Equation Method to Numerical Solution of Dirichlet's Boundary Value Problem in the Elasticity Theory on Polygons

I. O. Arushanyan [1]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: i.arushan@gmail.com*

Received January 3, 2015

Abstract: Dirichlet's boundary value problem of the two-dimensional elasticity theory is considered for domains with a finite number of corner points. This problem is put in correspondence with a system of boundary integral equations used in the potential theory. An approach to the efficient approximate solution of the original boundary value problem by numerical solving the system of boundary integral equations is proposed.

Keywords: Dirichlet's boundary value problem, double-layer potential, potential theory, boundary integral equations, corner points, quadrature method, two-dimensional theory of elasticity.

References

1. I. O. Arushanyan, "On the Numerical Solution of Boundary Integral Equations of the Second Kind in Domains with Corner Points," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **36** (6), 101–113 (1996) [Comput. Math. Math. Phys. **36** (6), 773–782 (1996)].
2. I. O. Arushanyan, "The Application of the Boundary Integral Equation Method to Numerical Solution of Dirichlet's Problem in Domains with Corner Points," Vychisl. Metody Programm. **1**, 1–7 (2000).
3. I. O. Arushanyan, "Application of the Quadrature Method for Solving Boundary Integral Equations of Plane Elasticity Theory on Polygons," Vychisl. Metody Programm. **4**, 142–154 (2003).
4. I. O. Arushanyan, "A Family of Quadrature Formulas for Solving Boundary Integral Equations," Vychisl. Metody Programm. **14**, 461–467 (2013).
5. I. O. Arushanyan, "Numerical Solution of Boundary Integral Equations on Curvilinear Polygons," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 4, 55–57 (2014) [Moscow Univ. Math. Bull. **69** (4), 174–176 (2014)].
6. I. O. Arushanyan, "An Exponentially Convergent Method for Solving Boundary Integral Equations on Polygons," Vychisl. Metody Programm. **15** (3), 417–426 (2014).
7. I. O. Arushanyan, *An Exponentially Convergent Method for Solving Boundary Integral Equations in Domains with Corner Points*, Report No. 9628 (Univ. of Nijmegen, Nijmegen, 1996).
8. N. S. Bakhvalov, "On the Optimal Speed of Integrating Analytic Functions," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **7** (5), 1011–1020 (1967) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **7** (5), 63–75 (1967)].
9. S. S. Zargaryan and V. G. Maz'ya, "The Asymptotic Form of the Solutions of the Integral Equations of Potential Theory in the Neighbourhood of the Corner Points of a Contour," Prikl. Mat. Mekh. **48** (1), 169–174 (1984) [J. Appl. Math. Mech. **48** (1), 120–124 (1984)].

10. V. G. Maz'ya and A. A. Soloviev, "Integral Equations of Logarithmic Potential Theory on Contours with a Cusp in Hölder Spaces," Algebra Anal. **10** (5), 85–142 (1998) [St. Petersburg Math. J. **10** (5), 791–832 (1999)].

11. V. G. Maz'ya, "Boundary Integral Equations," in *Analysis-4* (VINITI, Moscow, 1988), Itogi Nauki Tekh., Ser.: Sovr. Probl. Mat. Fundam. Napr., Vol. 27, pp. 131–228.

12. V. Z. Parton and P. I. Perlin, *Integral Equations in Elasticity* (Nauka, Moscow, 1977; Mir, Moscow, 1982).

13. K. E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997).

14. I. Babuška, B. Q. Guo, and E. P. Stephan, "On the Exponential Convergence of the h–p Version for Boundary Element Galerkin Methods on Polygons," Math. Meth. Appl. Sci. **12** (5), 413–427 (1990).

15. J. Bremer and V. Rokhlin, "Efficient Discretization of Laplace Boundary Integral Equations on Polygonal Domains," J. Comput. Phys. **229** (7), 2507–2525 (2010).

16. G. A. Chandler, "Superconvergent Approximations to the Solution of a Boundary Integral Equation on Polygonal Domains," SIAM J. Numer. Anal. **23** (6), 1214–1229 (1986).

17. I. G. Graham and G. A. Chandler, "High-Order Methods for Linear Functionals of Solutions of Second Kind Integral Equations," SIAM J. Numer. Anal. **25** (5), 1118–1137 (1988).

18. J. Helsing and R. Ojala, "Corner Singularities for Elliptic Problems: Integral Equations, Graded Meshes, Quadrature, and Compressed Inverse Preconditioning," J. Comput. Phys. **227** (20), 8820–8840 (2008).

19. W. Y. Kong, J. Bremer, and V. Rokhlin, "An Adaptive Fast Direct Solver for Boundary Integral Equations in Two Dimensions," Appl. Comput. Harmon. Anal. **31** (3), 346–369 (2011).

20. R. Kress, "A Nyström Method for Boundary Integral Equations in Domains with Corners," Numer. Math. **58** (1), 145–161 (1990/91).

21. R. Kress, *Linear Integral Equations* (Springer, Heidelberg, 1999).