УДК 519.6; 532.5; 551.465

ПОЛУЛАГРАНЖЕВ МЕТОД АДВЕКЦИИ КОНТУРОВ В ЗАДАЧЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИХРЯ С ИЗОЛИРОВАННОЙ ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ НА β-ПЛОСКОСТИ

А. А. Баранов[1], М. С. Пермяков[2]

Рассмотрены основные этапы полулагранжева метода адвекции контуров в задаче расчета течений идеальной несжимаемой жидкости переменной глубины на вращающейся Земле. Приводятся результаты численных расчетов эволюции поля течения при набегании вихря, движущегося под влиянием β-эффекта, на осесимметричное возмущение рельефа дна. Получены численные оценки точности метода при различных значениях его параметров. Проведено сравнение с конечно-разностным методом. Представленные результаты показывают высокую эффективность полулагранжева метода адвекции контуров при разрешении мелкомасштабных структурных элементов в полях потенциальной завихренности.

Ключевые слова: геофизическая гидродинамика, контурная динамика, адвекция контуров, топография, β-плоскость, потенциальная завихренность.

1. Введение. Как правило, крупномасштабные потоки, рассматриваемые в геофизической гидродинамике, характеризуются высокими значениями числа Рейнольдса. В подобных условиях эффектами вязкости можно пренебречь, рассматривая модели течения для идеальной жидкости. Еще одним свойством таких потоков является преобладание горизонтальных компонент скорости над ее вертикальной составляющей, в силу чего такого рода потоки носят квазидвумерный характер.

Простейшей математической моделью, описывающей двумерное течение идеальной несжимаемой жидкости на вращающейся Земле, является набор уравнений мелкой воды. В случае бездивергентного потока основу такой модели составляет уравнение переноса потенциальной завихренности, которое может быть получено из баротропного уравнения вихря путем включения в него эффектов топографии и вращения Земли (параметр Кориолиса). Для учета сферичности Земли, оставаясь в прямоугольной системе координат, можно воспользоваться приближением β-плоскости. В этом случае параметр Кориолиса будет представлять собой линейную функцию, зависящую только от расстояния до экватора.

Наиболее эффективными методами решения подобных уравнений переноса являются различные лагранжевы методы, отслеживающие перенос физических величин отдельными жидкими частицами или элементами. Среди них можно выделить метод адвекции контуров (МАК) [1–4], представляющий собой развитый вариант известного лагранжева метода контурной динамики (МКД) [5–8].

В отличие от эйлеровых методов (таких как метод конечных разностей — МКР), методы МАК и МКД предлагают альтернативный подход к пространственной дискретизации двумерных потоков. Вместо того чтобы разделять конечную область пространства двумерной сеткой (в узлах которой заданы значения поля вихря), диапазон значений потенциальной завихренности квантуется конечным числом уровней. Каждому такому уровню ставится в соответствие набор изолиний (контуров) потенциальной завихренности, связанных с подвижными частицами жидкости. Различие между двумя этими методами проявляется только лишь на этапе расчета поля скорости.

Имеющий полностью лагранжеву природу метод МКД нашел широкое применение в задачах моделирования динамики однородных вихревых пятен [6–8]. Однако практический интерес, как правило, представляют потоки, для которых поля скалярных величин имеют непрерывное распределение. В этом случае вычислительная сложность метода МКД значительно возрастает, так как возникает необходимость в использовании большого числа вложенных друг в друга контуров для аппроксимации таких полей. Ранее в работе [9] было показано преимущество полулагранжева метода адвекции контуров в случае, когда поле завихренности представлено достаточно большим числом контуров. В таких условиях данный метод позволяет при меньших вычислительных затратах достигать той же точности, что и МКД.

[1] Дальневосточный федеральный университет, школа естественных наук, ул. Суханова, 8, 690950, г. Владивосток; аспирант, e-mail: armath123@gmail.com

[2] Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН, ул. Балтийская, 43, 690041, г. Владивосток; профессор, зав. лабораторией, e-mail: permyakov@poi.dvo.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

В настоящей статье рассматривается применение полулагранжева метода адвекции контуров в задаче расчета взаимодействия одиночного вихря с особенностью рельефа дна в условиях β-плоскости. Описаны основные этапы его расчетной схемы. Проведено сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в работе [10]. В завершение приводятся результаты численных расчетов с целью получения оценок точности данного метода, а также сравнение с методом конечных разностей.

2. Основные уравнения. Одним из основных соотношений, описывающих двумерное течение несжимаемой жидкости на β-плоскости, является уравнение переноса потенциальной завихренности [10, 11]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\,\frac{\partial q}{\partial x} + v\,\frac{\partial q}{\partial y} = \nu\Delta\omega. \tag{1}$$

Здесь t — время, x и y — пространственные координаты (направленные на восток и север соответственно), $q = (\omega + f)/H$ — потенциальная завихренность, $\omega(x, y, t)$ — относительная завихренность, ν — коэффициент кинематической вязкости (для идеальной жидкости $\nu = 0$), $f = f_0 + \beta y$ — параметр Кориолиса, $H(x, y)$ — глубина жидкости, а компоненты поля скорости (u, v) определяются из следующих соотношений:

$$Hu = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad Hv = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,,$$

где ψ — функция тока. В свою очередь, связь между ψ и ω описывается следующим уравнением:

$$\Delta\psi = H\omega + \frac{1}{H}\,(\nabla H\cdot\nabla\psi). \tag{2}$$

3. Постановка задачи. В рамках данной работы будем рассматривать задачу взаимодействия одиночного вихря с топографической особенностью на β-плоскости, рассмотренную в работе [10]. Обезразмеривание уравнений (1), (2) здесь выполняется с использованием масштабов длины $L_0 = 2a^*$ (где a^* — радиус вихря), времени $T_0 = 0.3/L_0\beta^*$ и параметра Кориолиса: $f_0^* = 2\Omega_e\sin(\varphi_0)$, $\beta^* = 2\Omega_e\cos(\varphi_0)/R_e$. Здесь также используются следующие обозначения: Ω_e — угловая скорость вращения Земли; R_e — радиус Земли; φ_0 — значение широты, связанной с центром выбранной системы координат ($y^* = 0$). Положение экватора в текущей системе координат определяется по формуле $y_0^* = -f_0^*/\beta^*$. Таким образом, выбор значения $f_0^* > 0$ будет соответствовать северному полушарию, а $f_0^* < 0$ — южному.

Следует упомянуть, что в указанной выше работе [10] рассматривалась модель, учитывающая наличие эффектов вязкости, когда $\mathrm{Re} \equiv L_0^2/\nu T_0 = 10^3$, где Re — число Рейнольдса. В наших расчетах мы будем рассматривать случай идеальной жидкости ($\nu = 0$).

В начальный момент времени вихрь будет задан полем относительной завихренности

$$\omega(x, y, 0) = \begin{cases} J_0(kr)\,\dfrac{(ka)\Gamma}{2\pi a^2 J_1(ka)}\,, & r \leqslant a,\\[2ex] 0, & r > a,\end{cases}$$

где r — расстояние до центра вихря, расположенного в точке $(3, -3)$; J_0 и J_1 — функции Бесселя 1-го рода; $\Gamma = 4$ — циркуляция; $a = 0.5$ — радиус вихря; $ka \approx 2.4048$ — соответствует наименьшему отличному от нуля корню функции J_0. Здесь и далее все используемые параметры представлены в безразмерном виде.

В области с бесконечно удаленной границей при отсутствии топографии и β-эффекта такой вихрь представляет собой стационарное решение уравнения (1). При наличии β-эффекта он будет перемещаться на северо-запад и попадет в область влияния изолированной осесимметричной особенности рельефа дна, которая представляет собой возвышенность или впадину. Эта возвышенность или впадина задается следующей функцией расстояния r от ее центра, расположенного в начале координат:

$$h(r) = \begin{cases} h_0\cos(\pi r/2)\,, & r \leqslant R,\\ 0, & r > R,\end{cases}$$

где $R \in (0, 2]$ — предельный радиус, $h_0 < 0$ соответствует впадине и $h_0 > 0$ — возвышенности. За пределами указанной особенности будем полагать глубину жидкости равной единице. Таким образом, получаем следующее выражение для определения глубины: $H(x, y) = 1 - h\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Для ослабления влияния граничных условий на динамику течения в районе особенности рельефа дна будем решать задачу в области с достаточно удаленной границей: $D = (-10, 10)\times(-10, 10)$. На границе,

в свою очередь, будем полагать условия двойной периодичности для относительной завихренности ω и функции тока ψ. Здесь будут использоваться такие же, как и в [10], безразмерные значения для параметра Кориолиса: $\beta = 0.3$, $f_0 \in [-5, 5]$.

4. Метод решения. В лагранжевом представлении поле потенциальной завихренности задается в виде $C(z,t) = \big\{(x,y) : q(x,y,t) = z\big\}$, т.е. набором своих контуров (изолиний), связанных с подвижными частицами жидкости, где переменная z определяет текущее значение уровня завихренности. В дискретном случае выбирается конечный набор значений уровней: $z_{l+1} = z_l + h_z$, $l = 1, 2, \ldots, n_z - 1$, где h_z — шаг квантования. Каждому такому уровню ставится в соответствие набор изолиний (контуров) исходного поля, представленных конечным числом опорных точек (узлов): $X_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

4.1. Адвекция контуров. На каждом временно́м шаге рассматривается задача адвекции контура, которая сводится к расчету переноса частиц жидкости, связанных с его опорными точками:

$$\frac{dx_i}{dt} = u(x_i, y_i, t), \quad \frac{dy_i}{dt} = v(x_i, y_i, t)$$

при известных начальных условиях $x_i(0) = x_i^0$, $y_i(0) = y_i^0$. Для ее решения будем использовать метод Рунге–Кутты 4-го порядка.

В процессе переноса возникает необходимость в перераспределении опорных точек контуров и проведении процедуры “хирургии” [12, 13], суть которой заключается в удалении деталей контуров, меньших заданного масштаба δ.

Для расчета положения новых точек контура мы здесь будем использовать формулы, приведенные в работе [1]. Они устанавливают минимальный шаг вдоль контура равным половине хирургического масштаба $\delta = \mu^2 L/4$ (здесь L — характерный размер крупномасштабной структуры потока, μ — параметр измельчения). При этом используется зависимость плотности распределения опорных точек от кривизны контура, что позволяет одинаково хорошо описывать детали исходных полей в широком диапазоне масштабов.

Процедура хирургии, в свою очередь, выполняет удаление чрезмерно тонких деталей контуров, внося тем самым в вычислительную схему эффекты вязкости, что позволяет существенно замедлять рост числа точек на контурах. Использование такой процедуры является необходимым при проведении долгосрочных расчетов в случае, когда имеет место резкий рост числа мелких структур переносимого поля.

4.2. Расчет поля скорости. Примечательной особенностью метода МАК (отличающей его от МКД) является то, что скорости здесь рассчитываются в узлах пространственной сетки, жестко связанной с расчетной областью. Так, полулагранжев метод адвекции контуров [1] включает в себя интерполяцию поля вихря, заданного контурами, на двумерную сетку, где скорости рассчитываются с использованием сеточных методов решения уравнения (2) и дифференцирования функции тока. Полученное таким образом сеточное представление поля скорости используется при интерполяции скоростей от сетки к опорным точкам контуров. Указанный подход позволяет значительно повысить вычислительную эффективность метода [9].

В случае постоянной глубины уравнение (2) принимает вид уравнения Пуассона $\Delta\psi = H\omega$. При наличии периодических граничных условий для его решения можно воспользоваться прямым методом, основанным на быстром преобразовании Фурье [9].

В случае переменной топографии для решения исходного уравнения может быть использована следующая схема. На первом шаге выполняется решение уравнения Пуассона. Таким образом, мы найдем первое приближение нашего решения (обозначим его через ψ^0). Далее полученное решение ψ^0 подставим в исходное уравнение. В результате будем иметь следующую итерационную схему:

$$\Delta\psi^{i+1} = H\omega - \frac{1}{H}\left(\nabla H \cdot \nabla\psi^i\right). \tag{3}$$

Процесс продолжается до тех пор, пока $\left\|\psi^{i+1} - \psi^i\right\| \geqslant \varepsilon\left\|\psi^i\right\|$, где $\varepsilon > 0$ — заданная точность.

Значения поля скорости в узлах сетки получим по определению функции тока путем ее однократного дифференцирования [9]. После этого значения скоростей в опорных точках контуров находятся применением простейшей билинейной интерполяции из близлежащих узлов эйлеровой сетки.

4.3. Интерполяция с контуров на сетку. При решении задачи на β-плоскости возникает ряд проблем, связанных с тем, как выполняется интерполяция поля потенциальной завихренности с контуров на сетку.

Во-первых, следует упомянуть, что описанная в [1, 9] процедура интерполяции основывается на кусочно-постоянном распределении поля q и заключается в суммировании его скачков вдоль линий сетки

начиная от некоторого начального узла (как правило, в качестве начального выбирается левый нижний узел сетки). При этом параметр Кориолиса f представляет собой линейную функцию от y. В результате эта процедура приведет к возникновению резких переходов (зубцов) в поле относительной завихренности $\omega = Hq - f$.

Для сглаживания сеточного поля можно воспользоваться следующей процедурой. Исходное поле q интерполируется на достаточно мелкую сетку (в несколько раз мельче основной расчетной сетки), после чего это поле осредняется до масштабов расчетной сетки, на которой выполняется расчет поля скорости [1, 2]. Однако, как будет показано ниже, использование такого осреднения весьма негативно сказывается на консервативных свойствах метода, что приводит к резкому росту его погрешности.

Вторая проблема связана с выбором краевых условий для поля q. Как уже упоминалось, использование вышеописанной процедуры решения уравнения (2) предполагает, что поля относительной завихренности ω, функции тока ψ и скорости удовлетворяют условиям периодичности по обоим направлениям. При этом несложно видеть, что в случае постоянной глубины H вблизи границы области для поля q нарушается условие периодичности по координате y. Как следствие, в процессе переноса контур (либо часть контура) может выйти за пределы расчетной области, что будет означать его исчезновение из поля видимости. Иначе говоря, при восстановлении сеточного поля потенциальной завихренности такие контуры будут проигнорированы. Кроме того, вместе с контурами будет потеряна часть информации о текущем распределении потенциальной завихренности.

Чтобы избежать указанного эффекта при прохождении контура через нижнюю (либо верхнюю) границу, мы можем рассматривать его появление с противоположной стороны области. При этом той его части, которая окажется с противоположной стороны, будет соответствовать значение более высокого (более низкого) уровня квантования. Такой подход, в свою очередь, согласуется с выбором периодических краевых условий для производных поля q.

Так как в указанной выше процедуре интерполяции учитывается только лишь направление пересечения контура с ребром сетки, то такого рода допущение не отразится на вычислительном алгоритме метода. Однако в этом случае значение поля q в левом нижнем узле сетки будет определяться значением ближайшего к нему контура, который пересекает левую границу области.

5. Численный эксперимент. С целью проведения численных экспериментов была написана программа на языке FORTRAN 2003. Построение контуров в поле потенциальной завихренности в начальный момент времени реализовано на основе метода маркированных (шагающих) квадратов [14], который применялся на достаточно мелкой сетке. Для выполнения быстрого преобразования Фурье при расчете поля скорости была использована библиотека FFTW 3.1 (http://fftw.org/).

Рассмотрим ряд модельных расчетов для случаев, когда $h_0 = -0.4$ (топографическая впадина) и $h_0 = 0.4$ (возвышенность). Чтобы уменьшить скачки потенциальной завихренности между контурами, выберем достаточно малый шаг квантования. Здесь следует отметить, что в общем случае исходный набор контуров должен достаточно точно описывать все важные структурные особенности переносимого поля в начальный момент времени.

Во всех дальнейших расчетах используется пространственная сетка размером 256×256 при числе уровней квантования $n_z = 256$. В качестве параметра ε, отвечающего за точность итерационной схемы (3), использовалось значение 10^{-7}, при этом общее число итераций не превосходило 10. Шаг по времени $\Delta t = 0.025$ выбран из условия Куранта. При этом использовались следующие значения параметров перераспределения точек контура: характерный размер крупномасштабных структур потока $L = 1$, масштаб хирургии $\delta \equiv \mu^2 L/4 = 0.00125$ (примерно 2% шага пространственной сетки). Наибольший допустимый шаг вдоль контура при этом равен $\mu L \approx 0.0707$.

На рис. 1 приводятся результаты модельных расчетов для случая, когда $R = 1$ и $f_0 = -5$ (что соответствует южному полушарию). На рис. 1a–1c представлены результаты моделирования для топографической впадины ($h_0 = -0.4$), на рис. 1d–1f — для возвышенности ($h_0 = 0.4$). Цвет контуров меняется в соответствии с ростом значения уровня (от более темного к более светлому). Граница топографической особенности отмечена зеленым пунктиром. Здесь можно провести их качественное сравнение с результатами, представленными на рис. 2 в работе [10], где использовался конечно-разностный метод решения задачи (1), (2). Из представленных рисунков заметно качественное совпадение результатов на момент времени $T = 25$.

Далее продемонстрируем влияние параметров задачи на траекторию движения вихря. В силу того, что во всех рассмотренных случаях контур, окружающий центральную часть вихря (характеризующуюся наибольшим значением завихренности), сохраняет свою структуру, мы, определяя в любой момент времени центр вихря как центр тяжести координат частиц этого контура, можем построить траекторию

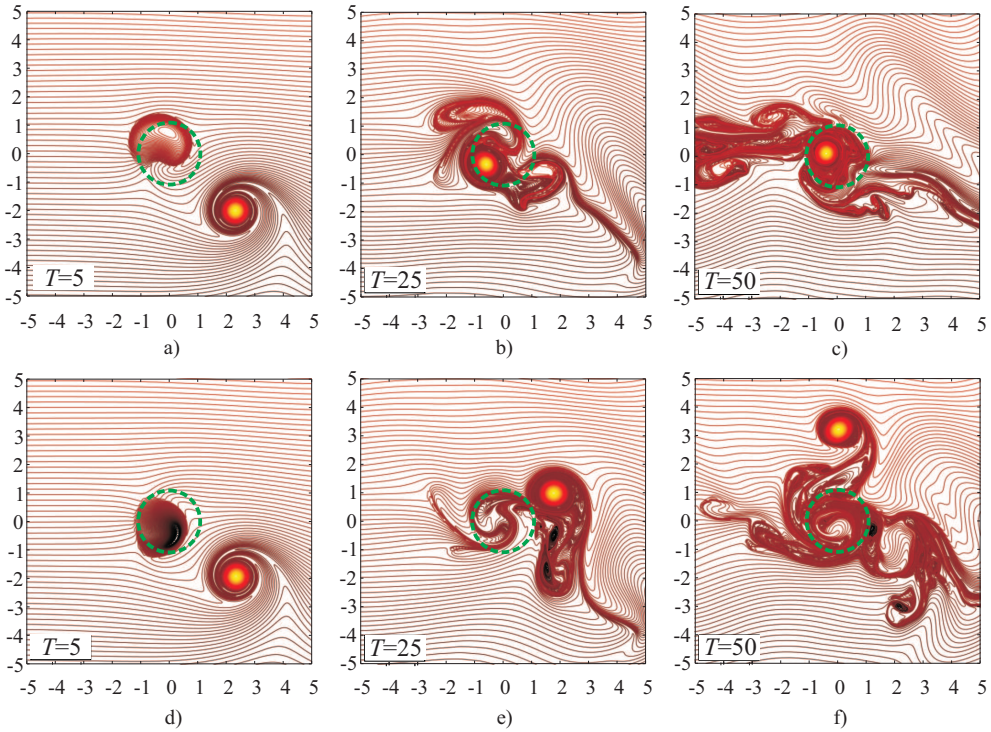

Рис. 1. Положение контуров потенциальной завихренности вблизи топографической особенности радиуса $R = 1$ при $f_0 = -5$ в различные моменты времени T. Рисунки (a-c) демонстрируют результаты для топографической впадины ($h_0 = -0.4$), (d-f) – для возвышенности ($h_0 = 0.4$)

вихря. Отметим, что в [10] показаны траектории частицы, которая в начальный момент находится в точке с координатами центра вихря.

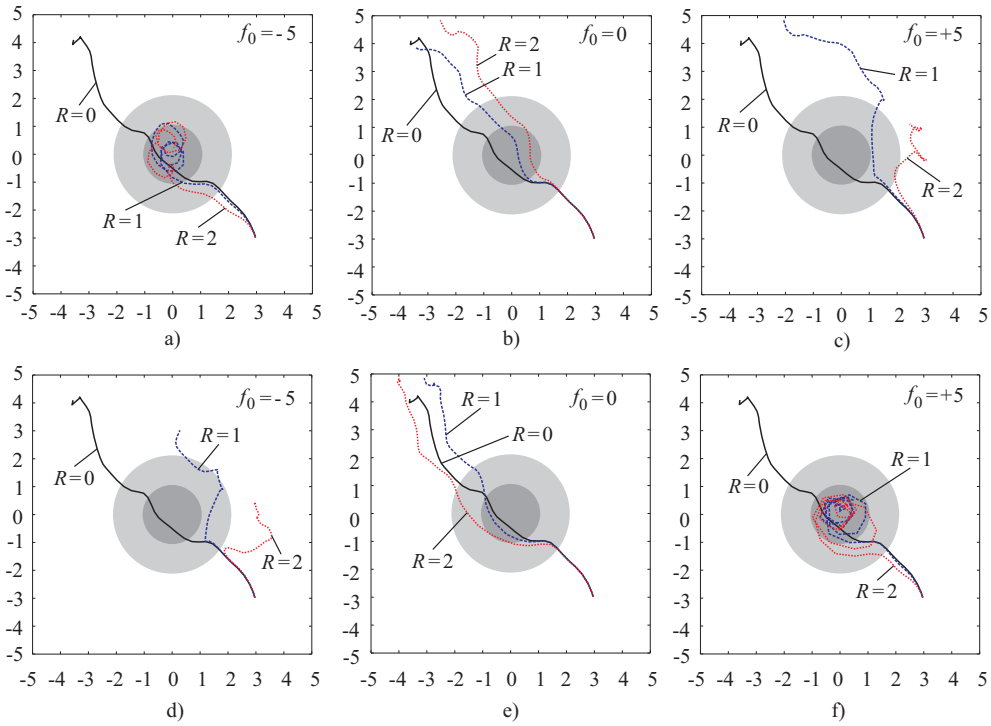

Рис. 2. Траектория движения центра вихря на временно́м интервале $[0, 50]$ при наличии топографической особенности радиуса R. Рисунки (a-c) демонстрируют результаты для топографической впадины ($h_0 = -0.4$), (d-f) – для возвышенности ($h_0 = 0.4$)

Результаты расчетов демонстрируют эффекты, связанные с захватом и отклонением вихря топографической особенностью. При этом, как можно видеть (рис. 2), поведение траектории вихря для северного ($f_0 = 5$) и южного ($f_0 = -5$) полушария различается. Так, для южного полушария наблюдается захват вихря топографической впадиной. Возвышенность, напротив, не допускает прохождения вихря, выступая в роли естественного препятствия, в то время как для северного полушария имеет место прямо противоположный результат. Для экваториальной части ($f_0 = 0$) в обоих случаях наблюдается лишь незначительное отклонение вихря от его изначальной траектории. На рис. 2a–2c представлены результаты для топографической впадины ($h_0 = -0.4$), на рис. 2d–2f — для возвышенности ($h_0 = 0.4$).

6. Оценка точности метода. Известно, что уравнение (1) допускает ряд интегральных законов сохранения, в том числе для энергии E и энстрофии Z:

$$E = \frac{1}{2}\iint\limits_D \left(u^2 + v^2\right) H(x,y)\,dx\,dy, \quad Z = \iint\limits_D q^2 H(x,y)\,dx\,dy.$$

Для контроля точности численных расчетов будем рассматривать модуль относительного отклонения указанных величин от их значений в начальный момент времени (E_0 и Z_0 соответственно).

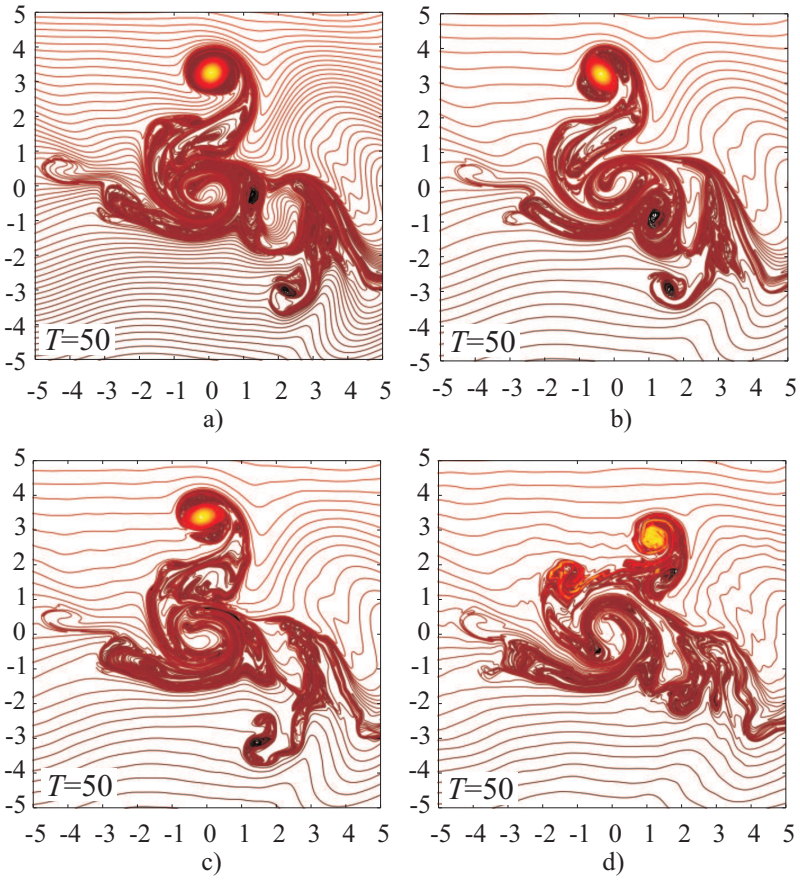

Рис. 3. Положение контуров потенциальной завихренности вблизи топографической особенности радиуса $R = 1$ со значением $h_0 = 0.4$ при $f_0 = -5$ в конечный момент времени $T = 50$. Представлены результаты при различном числе уровней квантования n_z и разрешении пространственной сетки ($n_x \times n_y$): a) $n_x = n_y = 256$, $n_z = 256$; b) $n_x = n_y = 256$, $n_z = 128$; c) $n_x = n_y = 128$, $n_z = 128$; d) $n_x = n_y = 64$, $n_z = 128$

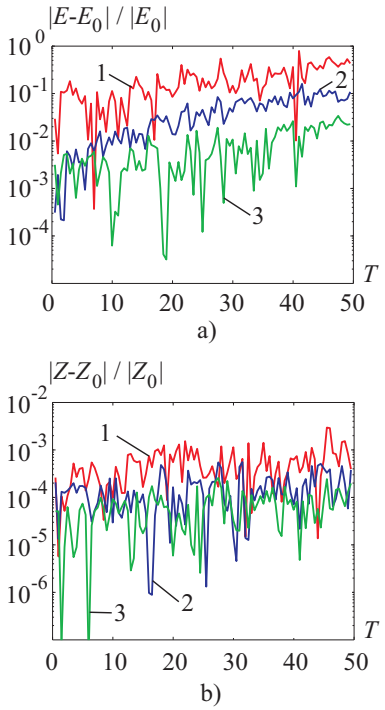

Рис. 4. Временны́е изменения относительной погрешности кинетической энергии E (a) и энстрофии Z (b) при различном разрешении пространственной сетки ($n_x \times n_y$): 1) $n_x = n_y = 64$; 2) $n_x = n_y = 128$; 3) $n_x = n_y = 256$

Зафиксируем параметры задачи ($f_0 = -5$, $h_0 = +0.4$, $R = 1$) и оценим изменение погрешности указанных выше величин при различных значениях параметров метода. Следует заметить, что изменение шага квантования (числа контуров) не оказало значительного влияния на погрешность метода. В действительности от выбранного шага квантования зависит лишь точность аппроксимации начальных условий задачи, что никоим образом не должно сказываться на качестве самого метода. Более весомый

вклад в погрешность оказывает разрешение пространственной сетки. При этом на момент времени $T = 50$ по-прежнему наблюдается качественное сходство результатов (рис. 3), проявляющееся в сохранении основных структурных образований и особенностей в полях потенциальной завихренности. Временной ход полученной погрешности можно наблюдать на рис. 4.

Наличие большого числа контуров, принадлежащих разным уровням завихренности, может приводить со временем к возникновению их пересечений [15], для предотвращения которых тоже могут быть использованы дополнительные методики [16]. Однако в данной работе мы не использовали подобные процедуры, при этом пересечения контуров возникали, но в подсчеточном масштабе (обусловленном параметрами хирургии и пространственным разрешением контуров). Так что при интерполяции поля потенциальной завихренности на сетку и, как следствие, при расчете поля скорости влияние такого рода пересечений было весьма незначительным.

Проведем сравнение метода МАК с конечно-разностным методом решения уравнения (1). По времени так же будем использовать метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Для аппроксимации нелинейных адвективных членов, входящих в уравнение (1), будем использовать схему Аракавы [17]. Для решения диагностического уравнения (2) воспользуемся итерационной схемой, описанной в разделе 4.2.

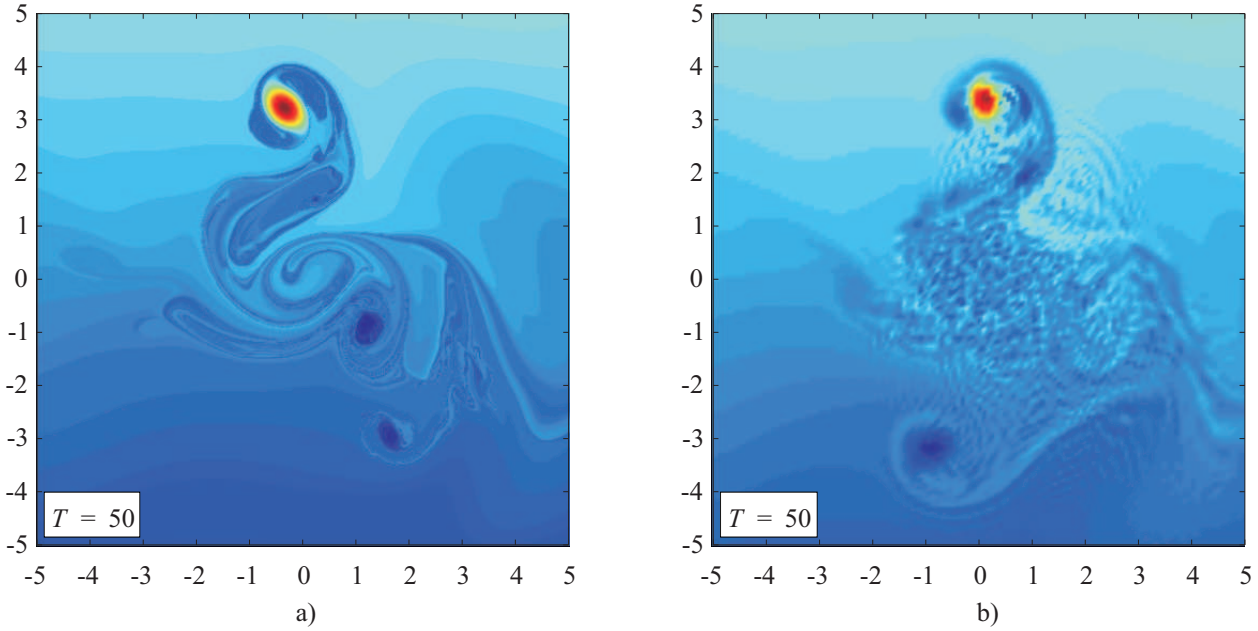

Рис. 5. Распределение потенциальной завихренности вблизи топографической особенности радиуса $R = 1$ со значением $h_0 = 0.4$ при $f_0 = -5$ в конечный момент времени ($T = 50$): a) результаты для метода адвекции контуров с расчетной сеткой $[256 \times 256]$ и числом контуров $n_z = 128$; b) для конечно-разностного метода с расчетной сеткой размером $[256 \times 256]$

В то время как разрешающая способность метода МКР ограничена фиксированным масштабом сетки, МАК регулирует шаг вдоль контура в зависимости от наличия мелких деталей переносимого поля. При этом МАК позволяет отобразить поле контуров на сетку любого выбранного масштаба. Для качественного сравнения полученных результатов выполним отображение поля потенциальной завихренности, представленного набором своих контуров, на достаточно мелкую сетку (1024×1024). Рис. 5 наглядно демонстрирует наличие мелких деталей в поле потенциальной завихренности для метода МАК. В то время как для МКР наблюдается эффект смазывания (сглаживания) тонких структур. Как можно убедиться, поле потенциальной завихренности в методе МАК обладает большей детализацией, нежели полученное МКР.

На рис. 6 приводится временной ход погрешности рассматриваемых методов. В качестве основной расчетной сетки здесь использовалась сетка размером 256×256. Дополнительно приведены результаты для случая, когда расчетная схема МАК дополнялась процедурой осреднения поля потенциальной завихренности с мелкой сетки на более грубую (раздел 4.3).

Как можно видеть, для МКР графики наблюдаемых погрешностей имеют более гладкий вид. Наличие резких выбросов на графиках погрешностей для МАК может быть обусловлено переходом между лагранжевым и эйлеровым представлением полей скорости и потенциальной завихренности. Подобные результаты можно было наблюдать на рис. 5 в работе [9], где рассматривалось сравнение погрешности

между методами МАК и МКД. В указанной работе полностью лагранжев МКД давал достаточно гладкие результаты, в то время как различные варианты МАК, использующие более грубую (в сравнении с разрешением контуров) эйлерову сетку, тоже демонстрировали резкие временны́е осцилляции интегральных величин.

Примечательным здесь является то, что при включении процедуры осреднения в расчетную схему МАК указанные выбросы удается снизить (рис. 6). Однако при этом погрешность по энергии резко возрастает (поскольку пространственное сглаживание эквивалентно диссипации энергии в мелких масштабах), в то время как без использования процедуры осреднения метод демонстрирует значительно лучшие результаты, соизмеримые с МКР. При этом, как можно заметить, МАК лучше сохраняет энстрофию, нежели МКР (даже при наличии процедуры осреднения). Это, в свою очередь, можно отнести к одной из характерных особенностей метода МАК.

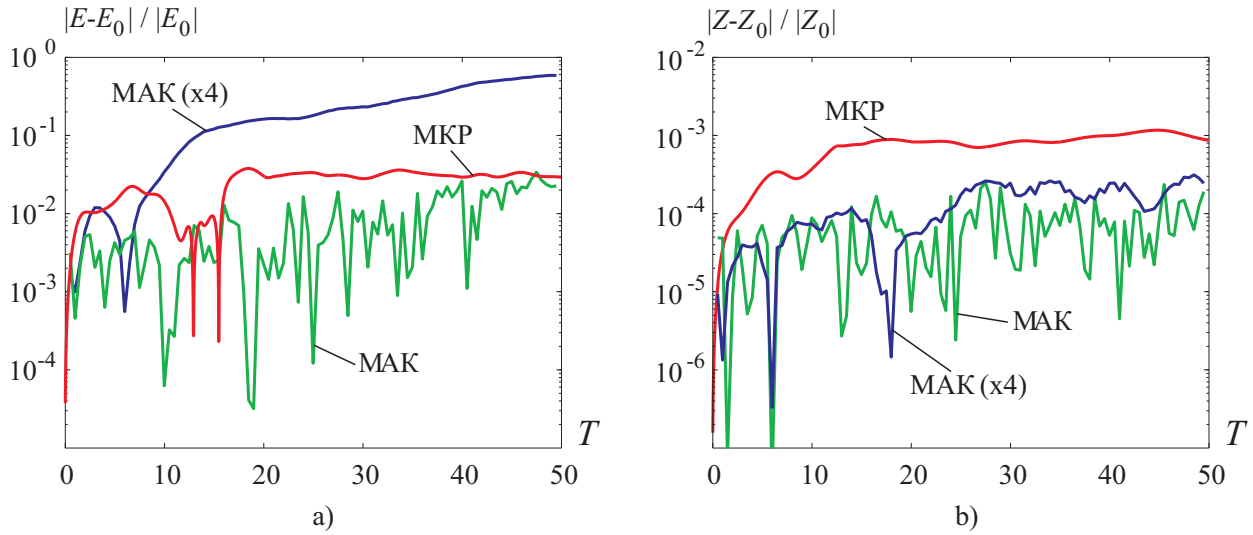

Рис. 6. Временны́е изменения относительной погрешности кинетической энергии E (a) и энстрофии Z (b) при использовании различных численных методов. В качестве основной расчетной сетки здесь использовалась сетка с разрешением $[256 \times 256]$. Для МАК также указана степень измельчения сетки, использовавшейся при осреднении

7. Выводы. Рассмотрено применение полулагранжева метода адвекции контуров в решении задачи взаимодействия одиночного вихря с изолированной топографической особенностью на β-плоскости. Проведены численные эксперименты с целью получения оценок точности метода. Проведен анализ полученных результатов при различных значениях параметров метода, а также показано влияние параметров задачи на получаемое решение.

В качестве количественных оценок точности метода рассматривались временны́е изменения интегральных характеристик потока (энергия и энстрофия). Замечено, что изменение числа контуров (уровней квантования) не оказало значительного влияния на точность сохранения интегральных величин, в то время как наибольший вклад в погрешность метода давало разрешение пространственной сетки, используемой для расчета поля скорости. При этом отмечено, что при изменении разрешения пространственной сетки по-прежнему наблюдалось сохранение основных структурных особенностей в полях потенциальной завихренности. Дополнительно проведено сравнение полученных результатов с результатами расчетов методом конечных разностей.

В целом, приведенные результаты позволяют говорить о высокой эффективности полулагранжева метода адвекции контуров в решении задач взаимодействия вихрей в океане (или в атмосфере) с рельефом дна (или с рельефом земной поверхности). Они демонстрируют возможности метода воспроизводить эволюцию тонких структур в полях течений над топографическими особенностями при достаточно высокой точности сохранения интегральных характеристик потока на больших периодах интегрирования задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 12–05–31011-мол_а, 14–05–00017-а) и ДВО РАН (проекты 12–I–П–19–02, 12–III–А–07–051).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dritschel D.G., Ambaum M.H.P.* A contour-advective semi-Lagrangian numerical algorithm for simulating fine-scale conservative dynamical fields // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 1997. **123**, N 540. 1097–1130.
2. *Dritschel D.G., Polvani L.M., Mohebalhojeh A.R.* The contour-advective semi-Lagrangian algorithm for the shallow water equations // Monthly Weather Review. 1999. **127**, N 7. 1151–1165.
3. *Mohebalhojeh A.R., Dritschel D.G.* The diabatic contour-advective semi-Lagrangian algorithms for the spherical shallow water equations // Monthly Weather Review. 2009. **137**, N 9. 2979–2994.
4. *Fontane J., Dritschel D.G.* The HyperCASL algorithm: a new approach to the numerical simulation of geophysical flows // Journal of Computational Physics. 2009. **228**, N 17. 6411–6425.
5. *Dritschel D.G.* Contour dynamics and contour surgery: numerical algorithms for extended, high-resolution modelling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flows // Computer Physics Reports. 1989. **10**, N 3. 77–146.
6. *Козлов В.Ф.* Геофизическая гидродинамика вихревых пятен // Морской гидрофизический журнал. 1994. № 1. 26–35.
7. *Соколовский М.А., Веррон Ж.* Динамика вихревых структур в стратифицированной вращающейся жидкости. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.
8. *O'Farrell C., Dabiri J.O.* Nested contour dynamics models for axisymmetric vortex rings and vortex wakes // Journal of Fluid Mechanics. 2014. **748**. 521–548.
9. *Баранов А.А., Пермяков М.С.* Анализ точности и вычислительной эффективности метода адвекции контуров на примере решения баротропного уравнения вихря // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 337–350.
10. *Geffen J.H.G.M. van, Davies P.A.* A monopolar vortex encounters an isolated topographic feature on a β-plane // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 2000. **32**, N 1. 1–26.
11. *Zavala Sansón L., González-Villanueva A., Flores L.M.* Evolution and decay of a rotating flow over random topography // Journal of Fluid Mechanics. 2010. **642**. 159–180.
12. *Макаров В.Г.* Вычислительный алгоритм метода контурной динамики с изменяемой топологией исследуемых областей // Моделирование в механике. 1991. **5**, № 4. 83–95.
13. *Баранов А.А., Пермяков М.С.* Ускоренный алгоритм изменения топологии для метода адвекции контуров // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 75–87.
14. *Эйджел Э.* Интерактивная компьютерная графика. Вводный курс на базе OpenGL. М.: Вильямс, 2001.
15. *Schaerf T.M., Macaskill C.* On contour crossings in contour-advective simulations. Part 1. Algorithm for detection and quantification // Journal of Computational Physics. 2012. **231**, N 2. 465–480.
16. *Schaerf T.M., Macaskill C.* On contour crossings in contour-advective simulations. Part 2. Analysis of crossing errors and methods for their prevention // Journal of Computational Physics. 2012. **231**, N 2. 481–504.
17. *Мезингер Ф., Аракава А.* Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.

Поступила в редакцию
15.09.2014

A Contour-Advective Semi-Lagrangian Numerical Algorithm for the Problem of Interaction between a Vortex and an Isolated Topographic Feature on a β-Plane

A. A. Baranov [1] **and M. S. Permyakov** [2]

[1] *Far Eastern Federal University, School of Natural Sciences; ulitsa Sukhanova 8, Vladivostok, 690950, Russia; Graduate Student, e-mail: armath123@gmail.com*

[2] *Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences; ulitsa Baltiiskaya 43, Vladivostok, 690041, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: permyakov@poi.dvo.ru*

Received September 15, 2014

Abstract: The main stages of a contour-advective semi-Lagrangian algorithm for the simulation of inviscid incompressible flows with variable depth on the rotating Earth are considered. The numerical results for the case when a vortex encounters an axisymmetric topographic feature on a β-plane are discussed. The accuracy of the method for different values of the its parameters is numerically estimated. The contour-advective method is compared with the finite-difference method. It is shown that the contour-advective semi-Lagrangian algorithm is very efficient to represent a fine-scale structures of potential vorticity fields.

Keywords: geophysical fluid dynamics, contour dynamics, contour advection, topography, β-plane, potential vorticity.

References

1. D. G. Dritschel, M. H. P. Ambaum, "A Contour-Advective Semi-Lagrangian Numerical Algorithm for Simulating Fine-Scale Conservative Dynamical Fields," Q.J.R. Meteorol. Soc. **123** (540), 1097–1130 (1997).

2. D. G. Dritschel, L. M. Polvani, and A. R. Mohebalhojeh, "The Contour-Advective Semi-Lagrangian Algorithm for the Shallow Water Equations," Mon. Wea. Rev. **127** (7), 1151–1165 (1999).

3. A. R. Mohebalhojeh and D. G. Dritschel, "The Diabatic Contour-Advective Semi-Lagrangian Algorithms for the Spherical Shallow Water Equations," Mon. Wea. Rev. **137** (9), 2979–2994 (2009).

4. J. Fontane and D. G. Dritschel, "The HyperCASL Algorithm: A New Approach to the Numerical Simulation of Geophysical Flows," J. Comput. Phys. **228** (17), 6411–6425 (2009).

5. D. G. Dritschel, "Contour Dynamics and Contour Surgery: Numerical Algorithms for Extended, High-Resolution Modelling of Vortex Dynamics in Two-Dimensional, Inviscid, Incompressible Flows," Comput. Phys. Rep. **10** (3), 77–146 (1989).

6. V. F. Kozlov, "Geophysical Hydrodynamics of Vortex Patches," Morsk. Gidrofiz. Zh., No. 1, 26–35 (1994).

7. M. A. Sokolovskii and J. Verron, *Dynamics of Vortex Structures in Stratified Rotating Fluids* (Inst. Komp'yut. Issled., Izhevsk, 2011) [in Russian].

8. C. O'Farrell and J. O. Dabiri, "Nested Contour Dynamics Models for Axisymmetric Vortex Rings and Vortex Wakes," J. Fluid Mech. **748**, 521–548 (2014).

9. A. A. Baranov and M. S. Permyakov, "Analysis of Accuracy and Computational Efficiency of the Contour Advection Method for the Barotropic Vorticity Equation," Vychisl. Metody Programm. **15**, 337–350 (2014).

10. J. H. G. M. van Geffen and P. A. Davies, "A Monopolar Vortex Encounters an Isolated Topographic Feature on a β-Plane," Dyn. Atmos. Oceans **32** (1), 1–26 (2000).

11. L. Zavala Sansón, A. González-Villanueva, and L. M. Flores, "Evolution and Decay of a Rotating Flow over Random Topography," J. Fluid Mech. **642**, 159–180 (2010).

12. V. G. Makarov, "The Numerical Algorithm of the Method of Contour Dynamics with Varying Topology of Investigated Domains," Model. Mekh. **5** (4), 83–95 (1991).

13. A. A. Baranov and M. S. Permyakov, "An Accelerated Topology Change Algorithm for the Contour Advection Method," Vychisl. Metody Programm. **14**, 75–87 (2013).

14. E. Angel, *Interactive Computer Graphics. A Top-Down Approach with Open GL* (London, Longman, 1997; Vil'yams. Moscow, 2001).

15. T. M. Schaerf and C. Macaskill, "On Contour Crossings in Contour-Advective Simulations — Part 1 — Algorithm for Detection and Quantification," J. Comput. Phys. **231** (2), 465–480 (2012).

16. T. M. Schaerf and C. Macaskill, "On Contour Crossings in Contour-Advective Simulations — Part 2 — Analysis of Crossing Errors and Methods for Their Prevention," J. Comput. Phys. **231** (2), 481–504 (2012).

17. F. Mesinger and A. Arakawa, *Numerical Methods Used in Atmospheric Models* (World Meteorol. Org., Geneva, 1979; Gidrometizdat, Leningrad, 1982), Vol. 2.