УДК 519.6

ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО БАРОТРОПНОГО ГАЗА

К. А. Жуков[1], **А. В. Попов**[2]

Предложена новая неявная проекционно-разностная схема для задачи движения вязкого баротропного газа в переменных Эйлера в случае одной, двух и трех пространственных переменных. Используется аппроксимация уравнения неразрывности, записанного для функции логарифма плотности, которая позволяет добиться соблюдения положительности значений численного решения функции плотности при любых параметрах схемы. Представленная схема является двухслойной, и на каждом временно́м шаге численное решение является решением линейной системы уравнений. Доказана теорема существования и единственности численного решения без каких-либо условий на параметры дискретизации по времени и пространству. Показано, что схема может быть использована в задаче с негладкими начальными данными в случае одной пространственной переменной и в задаче о каверне в случае двух пространственных переменных. Экспериментально показана важность добавления искусственной вязкости в аппроксимацию уравнения неразрывности.

Ключевые слова: проекционно-разностные схемы, метод конечных элементов, вязкий газ, неявные разностные схемы, уравнения газовой динамики, нестационарные течения.

1. Введение. В настоящее время проекционно-разностные схемы, созданные на основе метода конечных элементов, находят широкое применение в динамике вязкого газа. Их описание включается в различные книги [6, 7, 27], а сами схемы совершенствуются и активно используются при моделировании различных течений газа [5, 13, 14, 20, 26]. Однако вопросы корректности получающихся проекционно-разностных схем, а также априорные оценки их погрешностей в большинстве случаев исследованы недостаточно.

Теоретическое исследование вопросов существования и единственности начально-краевых задач, описывающих динамику вязкого газа, тоже пока далеко от завершения. Наиболее полно исследован одномерный случай [1]. Это связано с тем, что при переходе к лагранжевым массовым переменным в одномерном случае система записывается в удобном для исследования относительно компактном виде. В многомерном случае такой переход не дает преимуществ, что значительно усложняет исследование. По этой причине исследование многомерного случая проводится для системы, записанной в эйлеровой системе координат. Так, в работах [24, 25], основанных на идеях аналогичных работ для теплопроводного газа [21, 22], доказано существование глобального решения в предположении малости и гладкости начальных данных и вектора внешних сил, при этом в [25] было проведено исследование регулярности решения. Условия гладкости начальных данных ослаблены в работе [9]. В двумерном случае Вайгант и Кажихов [2] доказали существование классического и слабого решения для достаточно произвольных начальных данных при условии специальной зависимости коэффициента вязкости от плотности. Наконец, в работе [19] при достаточно общих условиях на начальные данные в трехмерном случае получены результаты глобального существования слабого решения. Некоторого улучшения этого результата удалось добиться в работе [8].

Рассмотрим систему уравнений, описывающую нестационарное движение вязкого баротропного газа:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0,\\
&\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right] + \nabla p = L\boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{f},\\
&p = p(\rho),
\end{aligned} \tag{1}$$

где L — линейный эллиптический оператор: $L\boldsymbol{u} \equiv \operatorname{div}(\mu\nabla\boldsymbol{u}) + \dfrac{1}{3}\nabla(\mu\operatorname{div}\boldsymbol{u})$.

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992, Москва; науч. сотр., e-mail: zhukov_k@cs.msu.su

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; доцент, e-mail: popovav@mech.math.msu.su

Выше через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать для простоты изложения известной положительной константой.

Искомая плотность ρ и искомый вектор скорости $\boldsymbol{u}$ являются функциями переменных Эйлера $(t,\boldsymbol{x}) \in Q = [0,T] \times \Omega$.

В систему (1) входят две известные функции: давление газа p, зависящее от плотности, и вектор внешних сил $\boldsymbol{f}$, являющийся функцией переменных Эйлера.

Дополним систему (1) начальными и граничными условиями:

$$(\rho,\boldsymbol{u})\big|_{t=0} = (\rho_0,\boldsymbol{u}_0), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega; \quad \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T] \times \partial\Omega. \tag{2}$$

Наиболее полно исследованы проекционно-разностные схемы для линеаризованной системы уравнений [3, 11, 15]. В работе [3] получены априорные оценки численного интегрирования не только в зависимости от параметров дискретизации, но и от коэффициентов вязкости и сжимаемости газа. Для нелинейных задач [17, 18] построены проекционно-разностные схемы в двумерном и трехмерном случаях соответственно, а в работе [12] предложена схема с использованием искусственной вязкости. В этих работах доказаны теоремы существования и единственности численного решения и получены оценки погрешности численного интегрирования. Однако доказательства корректности численного решения проведено в предположении зависимости между параметрами дискретизации, что может вызывать некоторые неудобства при их практическом использовании. Рассуждения, проведенные при обосновании полученных проекционно-разностных схем, верны при условии, что производная функции давления $\dfrac{dp}{d\rho}$ ограничена константой, от значения которой зависят максимально допустимые шаги сетки и константы в оценках точности разностных решений. В случае, например, когда давление газа сильно меняется при незначительных изменениях плотности (такой газ называют слабосжимаемым), эта константа может быть достаточно велика, что может приводить к потери точности получаемого решения.

Для построения проекционно-разностной схемы запишем задачу (1), (2) в другой форме. Для этого прологарифмируем уравнение неразрывности и заменим искомую функцию плотности на ее логарифм. Такой подход широко распространен и используется, например, при моделировании атмосферных потоков [10, 23], а при исследование движения вязкого газа такая замена использована в работе [16]. Основное преимущество такой замены состоит в том, что обеспечивается положительность функции плотности и, тем самым, решение всегда имеет физический смысл. Настоящая статья является продолжением работы [4], в которой аналогичный подход был использован для построения неявной конечно-разностной схемы.

Сформулируем полученную задачу в слабой постановке:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial g}{\partial t},\psi\right) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla g,\psi) + (\operatorname{div}\boldsymbol{u},\psi) = 0 \quad \forall \psi \in L_2(\Omega),\\ &\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t},\overline{\varphi}\right) + \big((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\overline{\varphi}\big) + \big(\widetilde{p}\,'(g)\nabla g,\overline{\varphi}\big) + \\ &\qquad + \mu\Big(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\big(e^{-g}\overline{\varphi}\big)\Big) + \frac{\mu}{3}\Big(\operatorname{div}\boldsymbol{u},\operatorname{div}\big(e^{-g}\overline{\varphi}\big)\Big) = (\boldsymbol{f},\overline{\varphi}) \quad \forall\overline{\varphi} \in \Big(\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)\Big)^d, \end{aligned} \tag{3}$$

где $g = \ln(\rho)$, $\widetilde{p}\,'(g) = \dfrac{dp}{d\rho}\left(e^g\right)$ и $d = 1,2,3$ в зависимости от размерности задачи. Здесь и далее запись $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Дополним систему (3) начальными и граничными условиями:

$$(g,\boldsymbol{u})\big|_{t=0} = \big(\ln(\rho_0),\boldsymbol{u}_0\big), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega; \qquad \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T] \times \partial\Omega. \tag{4}$$

В настоящей статье строится неявная двухслойная проекционно-разностная схема для задачи (3), (4) в случае одной, двух и трех пространственных переменных. Для рассматриваемой схемы доказана теорема существования и единственности решения без каких-либо предположений на шаги по пространственным и временны́м переменным. С целью проверки работоспособности представленной схемы проведены численные эксперименты для одномерной задачи с негладкими начальными данными и двумерной задачи о каверне. В обоих случаях показана важность добавления слагаемого с искусственной вязкостью в численный аналог уравнения неразрывности. Исследованию погрешности численного интегрирования авторы планируют посвятить отдельную работу.

2. Проекционно-разностная схема. Пусть Ω — ограниченная односвязная область в пространстве R^d $(d = 1, 2, 3)$, граница которой представляет собой кусочно-гладкую поверхность размерности $d-1$. Зададим на Ω триангуляцию Ω_h, удовлетворяющую обычным условиям квазиравномерности. Будем считать, что длина любого ребра триангуляции не превосходит h.

Пусть P^h, $\mathrm{U}^h \subset W_2^1(\Omega)$ — конечномерные подпространства кусочно-полиномиальных функций степени m и k соответственно на Ω_h и равных нулю вне Ω_h. Через $\mathbf{U}^h$ обозначим $(\mathrm{U}^h)^d$. На временно́м интервале $[0,T]$ будем использовать равномерную сетку $\omega_\tau = \Big\{n\tau \,\big|\, n = 0,\ldots,N\Big\}$, где $N\tau = T$. Функцию g в n-м узле сетки ω_τ будем обозначать через g^n. Будем считать, что индекс равен n, если он опущен. Для сокращения записи функции g в узле $n+1$ будем использовать обозначение $\widehat{g}$, а для обозначения разностной производной по времени в узле n используем выражение $g_t = \big(\widehat{g} - g\big)/\tau$.

Запись $\|\cdot\|$ обозначает норму в пространстве $L_2(\Omega)$, а $\|\cdot\|_C$ — норму в пространстве $C(\Omega)$.

Запишем члены операторов системы (3), отвечающие за конвективный перенос газа, в следующем виде:

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla g = 0.5\big(\boldsymbol{u}\cdot\nabla g + \operatorname{div}(g\boldsymbol{u})\big) - 0.5 g \operatorname{div}\boldsymbol{u};$$
$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla u_i = \frac{1}{3}\left(u_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^2}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=1, j\neq i}^{d}\left(u_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} - u_i\,\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right), \quad i = 1,\ldots,d.$$

Выполним дискретизацию по пространственным переменным методом конечных элементов, а по времени — методом конечных разностей. Через G обозначим дискретный аналог логарифма плотности, а через $\boldsymbol{V}$ — дискретный аналог скорости. Поскольку многомерные варианты проекционно-разностной схемы имеют достаточно громоздкую запись, приведем сначала одномерный вариант алгоритма. В этом случае область Ω представляет собой отрезок $[0,L]$. Пусть для всех $\psi \in P^h$ и $\varphi \in \mathrm{U}^h$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
&(G_t,\psi) + \frac{1}{2}\left[\left(V\,\frac{\partial\widehat{G}}{\partial x},\psi\right) + \left(\frac{\partial V\widehat{G}}{\partial x},\psi\right)\right] + \left(\frac{\partial\widehat{V}}{\partial x},\psi\right) + \tau\eta\left(V\,\frac{\partial\widehat{G}}{\partial x}, V\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(G\,\frac{\partial V}{\partial x},\psi\right),\\
&(V_t,\varphi) + \frac{1}{3}\left[\left(V\,\frac{\partial\widehat{V}}{\partial x},\varphi\right) + \left(\frac{\partial V\widehat{V}}{\partial x},\varphi\right)\right] + \left(\widetilde{p}\,'(G)\,\frac{\partial\widehat{G}}{\partial x},\varphi\right) + \frac{4\widetilde{\mu}}{3}\left(\frac{\partial\widehat{V}}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) =\\
&\qquad = \frac{4}{3}\left[\widetilde{\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \mu\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial\big(e^{-G}\varphi\big)}{\partial x}\right)\right] + \big(\widehat{f},\varphi\big),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\widetilde{\mu} = \mu\big\|e^{-G}\big\|_C$, а G и V на каждом временно́м слое принадлежат пространствам P^h и U^h соответственно. Неотрицательная константа η является нормирующим коэффициентом в искусственной вязкости.

В качестве значений численного решения на нулевом слое берутся проекции функций $\ln(\rho_0)$ и u_0 на пространства P^h и U^h соответственно:

$$G^0 = \big(\ln(\rho_0)\big)^h, \quad V^0 = u_0^h. \tag{6}$$

Граничные условия для V берутся равными нулю:

$$V^n\big|_{x=0} = V^n\big|_{x=L} = 0, \quad n = 1,\ldots,N. \tag{7}$$

Прежде чем переходить к записи проекционно-разностной схемы в многомерном случае, определим следующие функционалы на P^h и $\mathbf{U}^h$:

$$A_1^g\big(\boldsymbol{V}, G, \psi\big) = 0.5\Big[\big(\boldsymbol{V}\cdot\nabla G,\psi\big) + \big(\operatorname{div}(G\boldsymbol{V}),\psi\big)\Big], \quad G,\psi\in P^h, \quad \boldsymbol{V}\in\mathbf{U}^h,$$
$$A_1^{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W},\overline{\varphi}\big) = \big\{A_1^{v_i}(\boldsymbol{V}, W_i,\varphi_i)\big\}, \quad i = 1,\ldots,d, \quad \boldsymbol{V},\boldsymbol{W},\overline{\varphi}\in\mathbf{U}^h,$$

$$A_1^{v_i}(\boldsymbol{V}, W_i, \varphi_i) = \frac{1}{3}\left(\left(V_i\,\frac{\partial W_i}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i W_i}{\partial x_i}\right), \varphi_i\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{d}\left(V_j\,\frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j W_i}{\partial x_j}\right), \varphi_i\right),$$

$$A_2^{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{V}, \overline{\varphi}\big) = (\nabla \boldsymbol{V}, \nabla\overline{\varphi}) + \frac{1}{3}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{V}, \operatorname{div}\overline{\varphi}\right), \quad \boldsymbol{V}, \overline{\varphi} \in \mathbf{U}^h,$$

$$B_1^{g}\big(G, \boldsymbol{V}, \psi\big) = 0.5(G\operatorname{div}\boldsymbol{V}, \psi), \quad G, \psi \in P^h, \quad \boldsymbol{V} \in \mathbf{U}^h,$$

$$\Phi\big(\boldsymbol{V}, G, \psi\big) = \eta(\boldsymbol{V}\cdot\nabla G, \boldsymbol{V}\cdot\nabla\psi), \quad G, \psi \in P^h, \quad \boldsymbol{V} \in \mathbf{U}^h,$$

$$B_1^{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{V}, \overline{\varphi}\big) = \Big\{\big(B_1^{v_i}(\boldsymbol{V})V_i, \varphi_i\big)\Big\}, \quad \boldsymbol{V}, \overline{\varphi} \in \mathbf{U}^h,$$

$$\big(B_1^{v_i}(\boldsymbol{V})V_i, \varphi_i\big) = \frac{1}{2}\left(V_i\sum_{j=1, j\neq i}^{d}\frac{\partial V_j}{\partial x_j}, \varphi_i\right), \quad i = 1, \ldots, d,$$

$$B_2^{\boldsymbol{v}}\big(G, \boldsymbol{V}, \overline{\varphi}\big) = \widetilde{\mu}A_2^{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{V}, \overline{\varphi}\big) - \mu\left(\Big(\nabla\boldsymbol{V}, \nabla\big(e^{-G}\overline{\varphi}\big)\Big) + \frac{1}{3}\Big(\operatorname{div}\boldsymbol{V}, \operatorname{div}\big(e^{-G}\overline{\varphi}\big)\Big)\right), \quad G \in P^h, \quad \boldsymbol{V}, \overline{\varphi} \in \mathbf{U}^h.$$

Используя введенные обозначения, запишем проекционно-разностную схему в виде

$$\begin{aligned}
&(G_t, \psi) + A_1^{g}\big(\boldsymbol{V}, \widehat{G}, \psi\big) + \big(\operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{V}}, \psi\big) + \tau\Phi\big(\boldsymbol{V}, \widehat{G}, \psi\big) = B_1^{g}\big(G, \boldsymbol{V}, \psi\big) \quad \forall\psi \in P^h,\\
&(\boldsymbol{V}_t, \overline{\varphi}) + A_1^{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{V}, \widehat{\boldsymbol{V}}, \overline{\varphi}\big) + \big(\widetilde{p}'(G)\nabla\widehat{G}, \overline{\varphi}\big) + \widetilde{\mu}A_2^{\boldsymbol{v}}\big(\widehat{\boldsymbol{V}}, \overline{\varphi}\big) = B_1^{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{V}, \overline{\varphi}\big) + B_2^{\boldsymbol{v}}\big(G, \boldsymbol{V}, \overline{\varphi}\big) + \big(\widehat{\boldsymbol{f}}, \overline{\varphi}\big) \quad \forall\overline{\varphi} \in \mathbf{U}^h.
\end{aligned} \tag{8}$$

Начальные и краевые условия ставятся аналогично одномерному случаю:

$$\big(G^0, \boldsymbol{V}^0\big) = \big(g_0^h, \boldsymbol{u}_0^h\big), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_h, \quad \boldsymbol{V}^n = 0, \quad n = 1, \ldots, N, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_h, \tag{9}$$

где g_0^h и $\boldsymbol{u}_0^h$ — проекции $\ln\rho_0$ и $\boldsymbol{u}_0$ на пространства P^h и $\mathbf{U}^h$ соответственно.

Теорема. *Пусть $\widetilde{p}'(g) = \sigma$, где σ некоторая положительная константа. Тогда решение схемы* (8), (9) *существует и единственно.*

Доказательство. Равенства (8) на каждом временно́м слое задают систему линейных алгебраических уравнений с матрицей A относительно вектора y, координаты которого определяют решение на верхнем временно́м слое. Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать положительную определенность матрицы A.

Для этого положим $\psi = \sigma\widehat{G}$ и $\overline{\varphi} = \widehat{\boldsymbol{V}}$ и заметим, что

$$\begin{aligned}
(Ay, y) = \sigma\big\|\widehat{G}\big\|^2 &+ \sigma\tau\Big[A_1^{g}\big(\boldsymbol{V}, \widehat{G}, \widehat{G}\big) + \big(\operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{V}}, \widehat{G}\big)\Big] + \tau^2\eta\sigma\big\|\boldsymbol{V}\cdot\nabla\widehat{G}\big\|^2 + \\
&+ \big(\widehat{\boldsymbol{V}}, \widehat{\boldsymbol{V}}\big) + \tau\Big[A_1^{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{V}, \widehat{\boldsymbol{V}}, \widehat{\boldsymbol{V}}\big) - \sigma\big(\widehat{G}, \operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{V}}\big)\Big] + \tau\widetilde{\mu}\left(\big\|\nabla\widehat{\boldsymbol{V}}\big\|^2 + \frac{1}{3}\big\|\operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{V}}\big\|^2\right).
\end{aligned}$$

Поскольку $A_1^{g}\big(\boldsymbol{V}, \widehat{G}, \widehat{G}\big) = 0$ и $A_1^{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{V}, \widehat{\boldsymbol{V}}, \widehat{\boldsymbol{V}}\big) = 0$, то

$$(Ay, y) = \sigma\big\|\widehat{G}\big\|^2 + \big\|\widehat{\boldsymbol{V}}\big\|^2 + \tau\widetilde{\mu}\left(\big\|\nabla\widehat{\boldsymbol{V}}\big\|^2 + \frac{1}{3}\big\|\operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{V}}\big\|^2\right) + \tau^2\eta\sigma\big\|\boldsymbol{V}\cdot\nabla\widehat{G}\big\|^2.$$

Следовательно, матрица A положительно определена на любом временно́м слое и решение схемы (8), (9) существует и единственно.

3. Численные эксперименты. С целью проверки работоспособности предложенной проекционно-разностной схемы были проведены численные расчеты одномерной задачи о сглаживании разрыва плотности и двумерной задачи о каверне.

Задача о сглаживании разрыва. Интерес представляет поведение численного решения проекционно-разностной схемы в окрестности точек разрыва дифференциального решения. Для этого была рассмотрена одномерная задача в области $\Omega = [0, 1]$ с разрывным начальным условием для функции плотности

$$\rho_0 = \begin{cases} 2, & x \in \left[\dfrac{9}{20}, \dfrac{11}{20}\right]; \\[2ex] 1, & x \notin \left[\dfrac{9}{20}, \dfrac{11}{20}\right]. \end{cases}$$

Начальные и граничные условия заданы следующим образом:

$$(g,u)\big|_{t=0}=\big(\ln(\rho_0),0\big),\quad x\in\Omega;\quad u(t,x)=0,\quad (t,x)\in[0,T]\times\partial\Omega.$$

Численные расчеты проводились по четырем вариантам проекционно-разностной схемы (5)–(7). В первом и втором вариантах рассматривалась схема, в которой в качестве базисных функций по пространственной переменной использовались кусочно-линейные функции, в третьем и четвертом вариантах — кусочно-квадратичные функции. В первом и третьем вариантах расчеты проводились без использования искусственной вязкости, т.е параметр η был взят равным нулю, во втором и четвертом вариантах искусственная вязкость использовалась, т.е. использовались различные ненулевые значения параметра η. С физической точки зрения картина решения понятна: разрыв с течением времени должен расплываться и постепенно функция плотности должна становиться константой. При этом у численного решения не должны появляться осцилляции в окрестности точек перепада значений функции плотности. В первых двух случаях осцилляции отсутствовали, в третьем случае, как и ожидалось, они искажали численное решение, а в четвертом искажение уменьшалось с ростом параметра η. Во всех случаях был получен физически ожидаемый характер решения, а отличия численных решений не выходили за пределы прогнозируемой точности. Численное моделирование проводилось на различных сетках, параметр сжимаемости газа σ брался в диапазоне $[1,100]$, а параметр вязкости μ — в пределах $[0.001,1]$.

Задача о каверне. Обычно задачей о каверне называют следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned}
&(\rho,\boldsymbol{u})\big|_{t=0}=(1,\mathbf{0}),\quad (x_1,x_2)\in\Omega,\quad \Omega\equiv[0,1]\times[0,1],\\
&u_1(t,x_1,x_2)=1,\quad (t,x_1,x_2)\in[0,T]\times\Gamma,\quad \Gamma\equiv\big\{(x_1,x_2)\in\partial\Omega,\quad x_2=1\big\},\\
&u_1(t,x_1,x_2)=0,\quad (t,x_1,x_2)\in[0,T]\times(\partial\Omega\setminus\Gamma),\\
&u_2(t,x_1,x_2)=0,\quad (t,x_1,x_2)\in[0,T]\times\partial\Omega,\\
&\rho(t,0,1)=1,\quad t\in[0;T].
\end{aligned}$$

С физической точки зрения поведение решения хорошо известно. Газ, находящийся в области Ω, под воздействием потока вдоль границы Γ начинает двигаться и с течением времени, поскольку граничные условия не зависят от времени, приходит к стационарному круговому движению. При этом установившийся поток не должен иметь осцилляций, а характер стационарного решения зависит от параметров сжимаемости и вязкости газа.

Численные расчеты, как и в одномерном случае, проводились по тем же четырем вариантам схемы (8), (9). Диапазон параметров сжимаемости и вязкости газа брался такой же. При этом во всех четырех случаях численное решение соответствовало ожидаемой картине, т.е. получалось физически верное решение, которое правильно зависело от изменения параметров газа. Однако, как и ожидалось, численное решение, полученное без использования искусственной вязкости, обладало осцилляциями в тех углах области Ω, которые близки к границе Γ. К тому же в этом случае на решение накладывалась мелкая рябь. Описанные выше недостатки численного решения исчезают при использовании вариантов схем с искусственной вязкостью. Тем самым экспериментально показана целесообразность применения искусственной вязкости в проекционно-разностной схеме (8), (9).

4. Заключение. Построена новая проекционно-разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа в переменных Эйлера в случае одной, двух и трех пространственных переменных. Доказана теорема существования и единственности проекционно-разностного решения без каких-либо предположений на параметры дискретизации по временно́й и пространственной переменным. Важным свойством полученного численного решения является то, что численный аналог функции плотности всегда положителен. На каждом временно́м шаге численное решение является решением системы линейных уравнений. Работоспособность предложенной проекционно-разностной схемы проверена на задаче с разрывными начальными данными в случае одной пространственной переменной и на задаче о каверне в случае двух пространственных переменных.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 12–01–00960а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Вайгант В.А., Кажихов А.В.* О существовании глобальных решений двумерных уравнений Навье–Стокса сжимаемой вязкой жидкости // Сиб. матем. журн. 1995. **36**, № 6. 1283–1316.

3. *Жуков К.А, Попов А.В.* Разностные и проекционно-разностные схемы для нестационарного движения вязкого слабосжимаемого газа // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 67–73.
4. *Попов А.В., Жуков К.А.* Неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 516–523.
5. *Chambarel A., Bolvin H.* Simulation of a compressible flow by the finite element method using a general parallel computing approach // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 2329. Heidelberg: Springer, 2002. 920–929.
6. *Chung T.J.* Computational fluid dynamics. New York: Cambridge Univ. Press, 2002.
7. *Donea J., Huerta A.* Finite element methods for flow problems. Chichester: Wiley, 2003.
8. *Feireisl E., Novotný A., Petzeltova H.* On the existence of globally defined weak solutions to the Navier–Stokes equations // J. Math. Fluid Mech. 2001. **3**, N 4. 358–392.
9. *Hoff D.* Strong convergence to global solutions for multidimensional flows of compressible, viscous fluids with polytropic equations of state and discontinuous initial data // Arch. Rational Mech. Anal. 1995. **132**, N 1. 1–14.
10. *Holton J.R., Hakim G.J.* An introduction to dynamic meteorology. New York: Academic Press, 2013.
11. *Kellogg R.B., Liu B.* A finite element method for the compressible Stokes equations // SIAM J. Num. Anal. 1996. **33**, N 2. 780–789.
12. *Liu B.* The analysis of a finite element method with streamline diffusion for the compressible Navier–Stokes equations // SIAM J. Num. Anal. 2000. **38**, N 1. 1–16.
13. *Kirk B.S., Carey G.F.* Development and validation of a SUPG finite element scheme for the compressible Navier–Stokes equations using a modified inviscid flux discretization // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2008. **57**, N 3. 265–293.
14. *Kotteda V.M.K., Mittal S.* Stabilized finite-element computation of compressible flow with linear and quadratic interpolation functions // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2014. **75**, N 4. 273–294.
15. *Kweon J.R.* Optimal error estimate for a mixed finite element method for compressible Navier–Stokes system // Appl. Numer. Math. 2003. **45**, N 2. 275–292.
16. *Kellogg B., Liu B.* The analysis of a finite element method for the Navier–Stokes equations with compressibility // Numerische Mathematik. 2000. **87**, N 1. 153–170.
17. *Liu B.* On a finite element method for unsteady compressible viscous flows // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2003. **19**, N 2. 152–166.
18. *Liu B.* On a finite element method for three-dimensional unsteady compressible viscous flows // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2004. **20**, N 3. 432–449.
19. *Lions P.-L.* Mathematical topics in fluid dynamics. Vol. 2. Compressible models. Oxford: Oxford Science Publication, 1998.
20. *Nazarov M., Hoffman J.* Residual-based artificial viscosity for simulation of turbulent compressible flow using adaptive finite element methods // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2013. **71**, N 3. 339–357.
21. *Matsumura A., Nishida T.* Initial boundary value problems for the equations of motion of general fluids // Computing Methods in Applied Sciences and Engineering. Vol. 5. Amsterdam: North-Holland, 1982. 389–406.
22. *Matsumura A., Nishida T.* Initial boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids // Communications in Mathematical Physics. 1983. **89**. 445–464.
23. *Salby M.L.* Physics of the atmosphere and climate. New York: Cambridge Univ. Press, 2012.
24. *Valli A.* Periodic and stationary solutions for compressible Navier–Stokes equations via a stability method // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1983. **10**, N 4. 607–647.
25. *Valli A.* Mathematical results for compressible flows // Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Pitman Research Notes in Mathematics. Ser. 274. Harlow: Longman, 1993. 193–229.
26. *Vynnycky M., Sharma A.K., Birgersson E.* A finite-element method for the weakly compressible parabolized steady 3D Navier–Stokes equations in a channel with a permeable wall // Computers and Fluids. 2013. **81**. 152–161.
27. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. Vol. 3. Fluid dynamics. Oxford: Butterworth–Heinemann, 2000.

Поступила в редакцию
2.09.2014

A Projection-Difference Scheme for the Unsteady Motion of a Viscous Barotropic Gas

K. A. Zhukov[1] **and A. V. Popov**[2]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: zhukov_k@cs.msu.su*

[2] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: popovav@mech.math.msu.su*

Received September 2, 2014

Abstract: A new implicit projection-difference scheme for the unsteady motion of a viscous barotropic gas is proposed in terms of Eulerian coordinates for the cases of one, two, and three spatial variables. The peculiarity of this scheme consists in the fact that we approximate the continuity equation written in terms of the logarithm of density, which allows one to ensure the positiveness of the density function for any parameters of the scheme. This scheme is two-layered. At each time step, a numerical solution is found by solving a linear system. The existence and uniqueness theorem for a numerical solution is proved without no additional conditions imposed on the time and spatial discretization parameters. It is shown that the scheme can be used in the problems with nonsmooth initial conditions in the one-dimensional case and in the cavity problem in the two-dimensional case. The importance of including the artificial viscosity in the approximation of the continuity equation is shown experimentally.

Keywords: projection-difference scheme, finite element method, viscous gas, implicit difference schemes, equations of gas dynamics, unsteady flows.

References

1. S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov, *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids* (Nauka, Novosibirsk, 1983; North-Holland, Amsterdam, 1989).

2. V. A. Vaigant and A. V. Kazhikhov, "On Existence of Global Solutions to the Two-Dimensional Navier–Stokes Equations for a Compressible Viscous Fluid," Sib. Mat. Zh. **36** (6), 1283–1316 (1995) [Sib. Math. J. **36** (6), 1108–1141 (1995)].

3. K. A. Zhukov and A. V. Popov, "Finite-Difference and Projection-Difference Schemes for the Unsteady Motion of a Viscous Weakly Compressible Gas," Vychisl. Metody Programm. **13**, 67–73 (2012).

4. A. V. Popov and K. A. Zhukov, "An Implicit Finite-Difference Scheme for the Unsteady Motion of a Viscous Barotropic Gas," Vychisl. Metody Programm. **14**, 516–523 (2013).

5. A. Chambarel and H. Bolvin, "Simulation of a Compressible Flow by the Finite Element Method Using a General Parallel Computing Approach," in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2002), Vol. 2329, pp. 920–929.

6. T. J. Chung, *Computational Fluid Dynamics* (Cambridge Univ. Press, New York, 2002).

7. J. Donea and A. Huerta, *Finite Element Methods for Flow Problems* (Wiley, Chichester, 2003).

8. E. Feireisl, A. Novotný, and H. Petzeltova, "On the Existence of Globally Defined Weak Solutions to the Navier–Stokes Equations," J. Math. Fluid Mech. **3** (4), 358–392 (2001).

9. D. Hoff, "Strong Convergence to Global Solutions for Multidimensional Flows of Compressible, Viscous Fluids with Polytropic Equations of State and Discontinuous Initial Data," Arch. Rational Mech. Anal. **132** (1), 1–14 (1995).

10. J. R. Holton and G. J. Hakim, *An Introduction to Dynamic Meteorology* (Academic, New York, 2013).

11. R. B. Kellogg and B. Liu, "A Finite Element Method for the Compressible Stokes Equations," SIAM J. Num. Anal. **33** (2), 780–789 (1996).

12. B. Liu, "The Analysis of a Finite Element Method with Streamline Diffusion for the Compressible Navier–Stokes Equations," SIAM J. Num. Anal. **38** (1), 1–16 (2000).

13. B. S. Kirk and G. F. Carey, "Development and Validation of a SUPG Finite Element Scheme for the Compressible Navier–Stokes Equations Using a Modified Inviscid Flux Discretization," Int. J. Numer. Meth. Fluids **57** (3), 265–293 (2008).

14. V. M. K. Kotteda and S. Mittal, "Stabilized Finite-Element Computation of Compressible Flow with Linear and Quadratic Interpolation Functions," Int. J. Numer. Meth. Fluids **75** (4), 273–294 (2014).

15. J. R. Kweon, "Optimal Error Estimate for a Mixed Finite Element Method for Compressible Navier–Stokes System," Appl. Numer. Math. **45** (2), 275–292 (2003).

16. B. Kellogg and B. Liu, "The Analysis of a Finite Element Method for the Navier–Stokes Equations with Compressibility," Numer. Math. **87** (1), 153–170 (2000).

17. B. Liu, "On a Finite Element Method for Unsteady Compressible Viscous Flows," Numer. Meth. Partial Diff. Eq. **19** (2), 152–166 (2003).

18. B. Liu, "On a Finite Element Method for Three-Dimensional Unsteady Compressible Viscous Flows," Numer. Meth. Partial Diff. Eq. **20** (3), 432–449 (2004).

19. P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Dynamics*, Vol. 2: *Compressible Models* (Oxford Sci. Publ., Oxford, 1998).

20. M. Nazarov and J. Hoffman, "Residual-Based Artificial Viscosity for Simulation of Turbulent Compressible Flow Using Adaptive Finite Element Methods," Int. J. Numer. Meth. Fluids **71** (3), 339–357 (2013).

21. A. Matsumura and T. Nishida, “Initial Boundary Value Problems for the Equations of Motion of General Fluids,” in *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering* (North-Holland, Amsterdam, 1982), Vol. 5, pp. 389–406.

22. A. Matsumura and T. Nishida, “Initial Boundary Value Problems for the Equations of Motion of Compressible Viscous and Heat-Conductive Fluids,” Commun. Math. Phys. **89**, 445–464 (1983).

23. M. L. Salby, *Physics of the Atmosphere and Climate* (Cambridge Univ. Press, New York, 2012).

24. A. Valli, “Periodic and Stationary Solutions for Compressible Navier– Stokes Equations via a Stability Method,” Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **10** (4), 607–647 (1983).

25. A. Valli, “Mathematical Results for Compressible Flows,” in *Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Pitman Research Notes in Mathematics* (Longman, Harlow, 1993), Ser. 274, pp. 193–229.

26. M. Vynnycky, A. K. Sharma, and E. Birgersson, “A Finite-Element Method for the Weakly Compressible Parabolized Steady 3D Navier–Stokes Equations in a Channel with a Permeable Wall,” Comput. Fluids **81**, 152–161 (2013).

27. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, Vol. 3: *Fluid Dynamics* (Butterworth–Heinemann, Oxford, 2000).