

УДК 519.6

## ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СЕТКИ В ОРЕБРЕННОМ КАНАЛЕ

О. А. Григорьев<sup>1</sup>, Н. В. Ключнев<sup>2</sup>

Предложен численно-аналитический метод конформного отображения, позволяющий строить расчетные сетки для исследования устойчивости течения Пуазейля в канале с гребенчатым оребрением. Приведены результаты сравнения предлагаемого метода конформного отображения с реализованным в пакете SCPACK (Schwarz–Christoffel conformal map PASCage). Показана сходимости по шагу сетки при расчете основного течения и кривых нейтральной устойчивости, а также согласованность результатов, полученных для гребенчатого и волнистого оребрений. Включение численно-аналитического метода в технологию исследования устойчивости течений позволяет изучать и более общие виды прямоугольных оребрений.

**Ключевые слова:** оребрение, кривая нейтральной устойчивости, конформные отображения, тэта-функции, течение Пуазейля.

**1. Введение.** Исследование с помощью технологии [1–3] влияния продольного волнистого оребрения [4] на устойчивость течения Пуазейля (будем называть это течение основным) сводится к решению следующих двумерных задач: уравнения Пуассона для вычисления профиля основного течения и частичных проблем собственных значений для расчета кривых нейтральной устойчивости. При этом для построения расчетной сетки используется отображение Гордона–Холла [5]. Наряду с волнистым оребрением интерес представляет также гребенчатое оребрение, имеющее вид бесконечно тонких продольных пластин. Однако такое оребрение не может быть задано функцией от координат, и, следовательно, для него неприменимо отображение Гордона–Холла. Настоящая статья посвящена применению конформных отображений для построения расчетной сетки в случае гребенчатого оребрения. Одним из преимуществ конформных отображений является возможность аналитического вычисления производных отображения.

Идея построения конформной сетки не является новой — этот подход к решению гидродинамических задач методом коллокаций был развит в [6] для непериодических и в [7] для периодических каналов, причем в последнем случае задача построения конформной сетки сводится к построению конформного отображения прямоугольника на период канала. Большинство методов решения этой задачи сводятся к нахождению параметров интеграла Кристоффеля–Шварца и к последующему вычислению этого интеграла с помощью квадратурных формул (например, Кленшоу–Кёртиса [8]). Однако для широкого класса областей с многоугольным оребрением данные методы сталкиваются с серьезными трудностями, вызванными явлением краудинга [9, 10]. В данной работе рассматривается метод, позволяющий преодолеть эти трудности.

В разделе 2 описываются задачи, к которым сводится исследование устойчивости основного течения. В разделе 3 изложен численно-аналитический метод конформного отображения верхней полуплоскости на финитный прямоугольный многоугольник. Показано, что к решению этой задачи сводится задача отображения полосы на сечение канала с периодическим гребенчатым оребрением. Метод такого типа впервые был предложен в [11] для инфинитных многоугольников с четырьмя прямыми углами, затем обобщен в [12] и [14]. Дальнейшее обобщение метода на случай многоугольников, имеющих до восьми прямых углов, является нетривиальным, позволяет провести новые численные эксперименты, подтверждающие его адекватность, и публикуется впервые в данной работе. Приведены численные эксперименты, направленные на сравнение данного метода с методом, реализованным в пакете SCPACK (Schwarz–Christoffel conformal map PASCage) [8]. В разделе 4 приведены результаты численных экспериментов по расчету кривых нейтральной устойчивости для течения в канале с волнистым и гребенчатым оребрениями. Показана сходимости по шагу сетки, а также согласованность полученных для этих видов оребрения результатов.

**2. Описание задач.** Пусть в бесконечном в продольном и поперечном направлениях канале с гребенчатым оребрением нижней стенки задано стационарное течение Пуазейля. Период поперечного сечения

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики РАН (ИВМ РАН), ул. Губкина, 8, 119333, Москва; аспирант, e-mail: guelpho@mail.ru

<sup>2</sup> Институт вычислительной математики РАН (ИВМ РАН), ул. Губкина, 8, 119333, Москва; аспирант, e-mail: n\_klyushnev@mail.ru

такого канала имеет вид  $[-l; l] \times [0, 2] \setminus \{0\} \times [0, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon < 2$ . Обозначим через  $x$ ,  $y$  и  $z$  продольное, вертикальное и поперечное направления соответственно. В качестве нормировки скорости выберем среднюю скорость основного течения, в качестве нормировки длины — полувысоту канала.

Для вычисления нормированного профиля основного течения  $U = U(y, z)$  достаточно решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -1 \quad (1)$$

с нулевыми граничными условиями на верхней и нижней границах периода поперечного сечения канала и с  $2l$ -периодичностью по  $z$  и нормировать полученное решение на его среднее значение.

В работе [2] показано, что расчет кривых нейтральной устойчивости для течения Пуазейля в оребренном канале сводится к решению частичных проблем собственных значений следующего вида:

$$\begin{aligned} \lambda u &= -i\alpha U u - \frac{\partial U}{\partial y} v - \frac{\partial U}{\partial z} w - \frac{1}{\text{Re}} \left( \alpha^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - i\alpha p, \\ \lambda v &= -i\alpha U v - \frac{1}{\text{Re}} \left( \alpha^2 v - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \lambda w &= -i\alpha U w - \frac{1}{\text{Re}} \left( \alpha^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z}, \\ i\alpha u + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти частичные проблемы рассматриваются на одном периоде оребрения с нулевыми граничными условиями на верхней и нижней границах и с  $2l$ -периодичностью по  $z$ . Здесь  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $p$  — нормированные амплитуды скорости и давления соответственно,  $\alpha \geq 0$  — продольное волновое число и  $\text{Re}$  — число Рейнольдса. Для фиксированного параметра  $\alpha$  будем обозначать через  $\text{Re}_L(\alpha)$  такое минимальное число Рейнольдса  $\text{Re}$ , при котором спектр проблемы собственных значений (2) имеет непустое пересечение с мнимой осью. Кривой нейтральной устойчивости называют построенную в плоскости  $(\alpha, \text{Re})$  зависимость  $\text{Re}_L(\alpha)$ .

Уравнение (1) и проблему собственных значений (2) будем аппроксимировать методом Галеркина, который состоит в аппроксимации слабой постановки методом коллокаций. Для построения сетки в расчетной области будем использовать образ сетки, построенной в квадрате  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , при отображении, переводящем левую (правую) границу квадрата в левую (правую) границу области и сохраняющем симметрию относительно оси ординат. В случае волнистого оребрения будем использовать отображение Гордона–Холла, в случае гребенчатого — отображение, описанное в нижеследующих разделах.

**3. Технология построения конформной сетки в оребренном канале.** Конформное отображение верхней полуплоскости на  $n$ -угольник с вершинами в точках  $w_i$  и углами  $\pi\alpha_i$  при этих вершинах дается интегралом Кристоффеля–Шварца [15]

$$w(x) = C \int_{x_k}^x \prod (\xi - x_i)^{\alpha_i - 1} d\xi, \quad (3)$$

где  $x_i$  — прообразы вершин многоугольника и  $C$  — неизвестная константа. Если прообразы трех вершин расположить в фиксированных точках (например, 0, 1 и  $\infty$ ), то, согласно теореме Римана [15], задача нахождения оставшихся  $n - 2$  параметров будет иметь единственное решение. Система уравнений, из которой эти параметры могут быть определены, имеет вид  $w(x_k) = w_k$ .

Стандартный подход к приближенному вычислению конформного отображения “стандартных областей” (единичной окружности, верхней полуплоскости, полосы, прямоугольника и т.д.) сводится к построению численного метода решения системы, описанной в [8]. После того как параметры  $C$  и  $x_i$  найдены, по произвольной точке в стандартной области можно приближенно вычислить ее образ, оценивая интеграл (3) с помощью квадратурных формул. Обратное отображение  $x(w_0)$  вычисляется путем решения нелинейного уравнения  $w(x(w_0)) = w_0$ .

Однако в рамках этого подхода не предлагается никакой априорной оценки точности вычисленных параметров. Кроме того, появляются серьезные вычислительные трудности, связанные с явлением *краудинга* (или скупивания) точек.

Рассмотрим это явление на примере интеграла Кристоффеля–Шварца

$$w(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k\xi)}}, \tag{4}$$

где  $k \in (0; 1)$  – вещественный параметр. Этот интеграл задает конформное отображение верхней полуплоскости  $\mathbb{H} = \{x : \Im x > 0\}$  на прямоугольник  $R = \{w : 0 < \Re w < K, 0 < \Im w < K'\}$ . Исследуем зависимость параметра  $k$  от отношения длин сторон прямоугольника  $\tau = \frac{K'}{K}$ .

Из теории эллиптических функций известно, что функция, обратная к  $w(x)$ , может быть выражена с помощью  $\theta$ -функций Римана следующим образом [16]:

$$x(w) = \left(\operatorname{sn} \frac{w}{2}\right)^2 = \left(\frac{\theta_{00}\theta_{11}\left(\frac{w}{2K} \middle| \tau\right)}{\theta_{10}\theta_{01}\left(\frac{w}{2K} \middle| \tau\right)}\right)^2. \tag{5}$$

Здесь  $\operatorname{sn} z$  – эллиптический синус Якоби и  $\theta_{kl}$  –  $\theta$ -функции Римана

$$\theta_{00}(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\tau n^2} e^{2\pi i n z}, \quad \theta_{kl}(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\tau(n+k/2)^2} e^{2\pi i(n+k/2)(z+l/2)}, \quad \theta_{kl} = \theta_{kl}(0|\tau),$$

для которых верны тождества [18]

$$\theta_{kl}(z|\tau) = \exp\left(-\frac{\pi\tau k^2}{4} + \pi i k\left(z + \frac{l}{2}\right)\right) \theta\left(z + \frac{i\tau k}{2} + \frac{l}{2}\right).$$

Пользуясь этими соотношениями, можно переписать отображение (5) в форме

$$x(w) = -\exp(2\pi i z) \left(\frac{\theta_{00}(0|\tau)\theta_{00}\left(z + \frac{1+i\tau}{2} \middle| \tau\right)}{\theta_{00}\left(\frac{i\tau}{2} \middle| \tau\right)\theta_{00}\left(z + \frac{1}{2} \middle| \tau\right)}\right)^2. \tag{6}$$

В частности, выражение для образа четвертой вершины прямоугольника имеет вид

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{\theta_{00}(0|\tau)\theta_{11}\left(\frac{1+i\tau}{2} \middle| \tau\right)}{\theta_{10}(0|\tau)\theta_{01}\left(\frac{1+i\tau}{2} \middle| \tau\right)}\right)^2 = e^{\pi\tau} \left(\frac{\theta_{00}(0)}{\theta_{00}\left(\frac{i\tau}{2}\right)}\right)^4.$$

Поскольку при  $\tau \gg 1$  имеет место отношение

$$\frac{\theta_{00}(0)}{\theta_{00}\left(\frac{i\tau}{2}\right)} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\tau n^2}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\tau n(n+1)}} \sim \frac{1}{2},$$

то верна асимптотика  $k \sim 16e^{-\pi\tau}$ . Следовательно, уже при  $\tau > 12$  значение  $k$  неотлично от нуля в машинной арифметике при вычислениях с двойной точностью. Взаимное расположение вершин прямоугольника

можно описать с помощью их ангармонического отношения. Как видно из рассмотренного примера, при конформном отображении оно может уменьшаться на десятки порядков — в этом и заключается явление краудинга. Стоит отметить, что краудинг возникает в случае как очень “узкого” ( $\tau \rightarrow \infty$ ), так и очень “широкого” ( $\tau \rightarrow 0$ ) прямоугольников, однако один из этих случаев сводится к другому умножением на  $i$ .

В то время как вычисление отображения  $\mathbb{H}$  на  $R$  сталкивается с проблемой потери точности, обратное отображение (6) может быть эффективно оценено с помощью выделения главной части в тех точках, где явление краудинга особенно сильно проявляется. Для римановых  $\theta$ -функций существуют алгоритмы, позволяющие вычислять их с гарантированной машинной точностью [17]. Суть метода, предлагаемого в данной работе, состоит в обобщении этого наблюдения на случай прямоугольного многоугольника с большим числом углов.

**3.1. Вычисление конформного отображения.** Назовем прямоугольным многоугольником, все углы которого кратны  $\frac{\pi}{2}$ . Количество углов, равных  $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2}$ , в финитном прямоугольном многоугольнике  $P$  всегда четно и больше 4, поэтому его можно обозначить через  $2g + 2$ ,  $g = 1, 2, \dots$ . Конформное отображение  $\mathbb{H}$  на  $P$  имеет вид

$$w(x) = C \int_{x_0}^x \frac{\mathcal{P}_{g-1}(\xi) d\xi}{\sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}(\xi)}}, \tag{7}$$

где  $\mathcal{P}_{g-1}(\xi)$  и  $\mathcal{Q}_{2g+2}(\xi)$  — многочлены, имеющие по  $g-1$  и  $2g+2$  различных вещественных корней соответственно (не обязательно взаимно простые). Кроме того, будем предполагать, что старший коэффициент  $\mathcal{Q}_{2g+2}(\xi)$  равен 1. Построение обратного отображения к (7) — это классический результат, восходящий к Якоби и Риману, однако записать его явной формулой удастся только в частном случае  $g = 1$  (см. (5)).

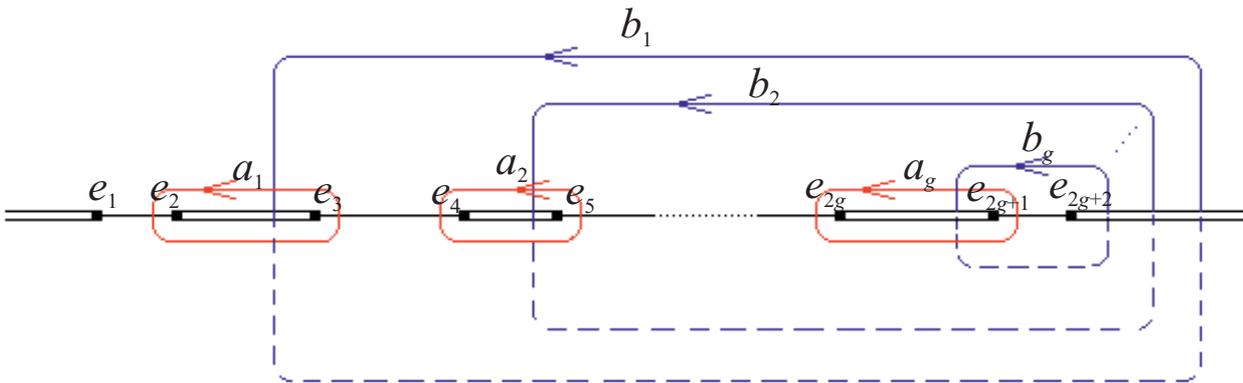


Рис. 1. Циклы на римановой поверхности функции  $\sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}}$

Обозначим через  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, 2g + 2$ , корни  $\mathcal{Q}_{2g+2}$ , упорядочив их по возрастанию. Подынтегральное выражение в (7) может быть аналитически продолжено на риманову поверхность  $\mathcal{M}$  функции  $\sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}}$ . Поверхность  $\mathcal{M}$  можно получить склеиванием двух копий области  $\overline{\mathbb{C}} \setminus ((-\infty, e_1] \cup [e_2, e_3] \cup \dots \cup [e_{2g}, e_{2g+1}] \cup [e_{2g+2}, \infty))$  по противоположным берегам выброшенных отрезков.

Интеграл (7), однако, теперь будет зависеть от пути интегрирования по поверхности. Интегралы по циклам вокруг отрезков  $[e_{2k-1}, e_{2k}]$ , обозначенным на рис. 1 через  $a_k$ , будем называть  $a$ -периодами интеграла (7), а по  $b$ -циклам —  $b$ -периодами.

**Теорема (билинейные соотношения Римана)** [18]. Пусть на римановой поверхности функции  $\sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}}$  задан дифференциал  $\omega = \frac{\mathcal{P}_{g-1}(\xi) d\xi}{\sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}(\xi)}}$ , где  $\mathcal{P}_{g-1}$  и  $\mathcal{Q}_{2g+2}(\xi)$  определены в (7); пусть  $a$ - и  $b$ -циклы расположены так, как показано на рис. 1,  $\oint_{a_k} \omega = A_k$ ,  $\oint_{b_k} \omega = B_k$ . Тогда  $\Im \sum_{j=1}^g A_j \overline{B_j} \leq 0$ , причем равенство достигается только при  $\omega = 0$ .

Из билинейных соотношений следует, что если все  $a$ -периоды дифференциала  $\omega$  нулевые, то  $\omega = 0$ . В частности, если  $\omega^i = \frac{\mathcal{P}_{g-1}^i(\xi) d\xi}{\sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}(\xi)}}$  линейно независимы, то и векторы, составленные из их  $a$ -периодов, линейно независимы. Следовательно, верно

**Следствие 1.** Дифференциал Кристоффеля–Шварца для финитного прямоугольного  $g$ -угольника однозначно представим в виде суммы  $a$ -нормированных дифференциалов

$$\omega_k : \oint_{a_k} \omega_k = 2 \int_{e_{2k+1}}^{e_{2k}} \omega_l = \delta_{kl}.$$

**Определение 1.** Пусть  $\omega_k$  — базис  $a$ -нормированных дифференциалов. Тогда  $\Pi_{ij} = \oint_{b_j} \omega_i$  называется матрицей периодов поверхности.

Из определения  $a$ -нормированных дифференциалов видно, что матричные элементы  $\Pi_{ij}$  будут чисто мнимыми. Обозначим  $\Omega_{ij} = \Im \Pi_{ij}$ .

**Следствие 2** [18]. Матрица  $\Omega_{ij}$  симметрична и положительно определена.

**Определение 2.** Пусть  $\Lambda = \mathbb{Z}^g + \mathbb{P}\mathbb{Z}^g$  — решетка в  $\mathbb{C}^g$ . Тогда комплексный тор  $\mathbb{C}^g/\Lambda$  называется якобианом кривой  $Jac(\mathcal{M})$ , а отображение  $u : \mathcal{M} \rightarrow Jac(\mathcal{M})$ ,  $u(x) = \int_{x_0}^x \omega \pmod{\Lambda}$  (не зависящее от пути интегрирования) — отображением Абеля–Якоби с начальной точкой  $x_0$ .

**Определение 3** [18]. Пусть  $\Omega$  — симметричная, положительно определенная матрица размера  $g \times g$ . Римановой  $\theta$ -функцией с характеристикой  $\begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix}$ ,  $2a \in \mathbb{Z}^g$ ,  $2b \in \mathbb{Z}^g$  называется функция

$$\theta \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix} (z|\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(-\pi(n+a)^T \Omega (n+a)) \exp(2\pi i(n+a)^T (z+b)).$$

Определенные выше  $\theta$ -функции Римана обладают следующими свойствами квазипериодичности:

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix} (z+m|\Omega) &= e^{2\pi i a^T m} \theta \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix} (z|\Omega), \\ \theta \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix} (z+i\Omega m|\Omega) &= e^{-2\pi i b^T m} e^{\pi m^T \Omega m - 2\pi i m^T z} \theta \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix} (z|\Omega). \end{aligned} \tag{8}$$

Сами  $\theta$ -функции не являются однозначными на  $Jac(\mathcal{M})$ . Однако из (8) следует, что, рассматривая их отношения, можно построить мероморфную на  $Jac(\mathcal{M})$  функцию с заданным набором нулей и полюсов (с некоторыми ограничениями на их количество и кратности) [18]. В частности, можно построить такую функцию  $x(u)$ , называемую гиперэллиптической проекцией, что ее композиция с отображением Абеля–Якоби даст тождественное отображение  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ . Частным случаем этого утверждения является представление  $\text{sn}(z)$  через эллиптические  $\theta$ -функции (5).

Схема вычисления конформного отображения из  $\mathbb{H}$  на  $P$  и обратно поясняется диаграммой

$$\mathbb{H} \xleftarrow{x(u)} u(\mathbb{H}) \in Jac(\mathcal{M}) \xrightarrow{2(C,u)} P, \tag{9}$$

где  $C$  — набор констант (см. следствие 1), определяемый из геометрии многоугольника, а  $x(u)$  — гиперэллиптическая проекция.

Для того чтобы “обратить” одну из стрелок на диаграмме (9), необходимо явно описать locus верхней полуплоскости  $u(\mathbb{H})$  в  $Jac(\mathcal{M})$ . Условие принадлежности точки  $u(\mathbb{H})$  описано в [18]; в общем случае это условие довольно громоздко, однако будет сформулировано в разделе 3.2 для двух частных случаев.

Итак, алгоритм вычисления конформного отображения из  $\mathbb{H}$  в  $P$  можно описать следующим образом:

- 1) вычислить матрицу периодов поверхности, ассоциированной с многоугольником, и вектор констант  $C$ ;
- 2) для вычисления образа точки  $x_0 \in \mathbb{H}$  решить (например, методом Ньютона с продолжением по параметру) систему уравнений  $x(u) = x_0$  с учетом условия принадлежности точки  $u$  locus верхней полуплоскости;
- 3) результат отображения  $2(C, u)$  и будет искомым образом  $x_0$ .

Замечательно, что из этого алгоритма получается и алгоритм вычисления обратного отображения. Кроме того, он позволяет с гарантированной точностью вычислять производные конформных отображений из  $\mathbb{H}$  в  $P$  и обратно.

Задача поиска параметров интеграла Кристоффеля–Шварца для  $P$ , таким образом, заменяется задачей поиска матрицы периодов поверхности, ассоциированной с многоугольником.

Заметим, что область изменения параметров при решении этой задачи определяется необходимым условием — элементы матрицы  $\Omega$  должны быть положительными и удовлетворять неравенствам

$$|k - l| > |i - j|, \quad (i - k)(j - l) = 0 \Rightarrow \Omega_{ij} > \Omega_{kl}. \tag{10}$$

Графическая интерпретация необходимых условий на  $\Omega_{ij}$  была предложена А. Богатыревым в [14].

Необходимое и достаточное условие на элементы матрицы  $\Omega$  приведено в следующем разделе для некоторых частных случаев.

**3.2. Вычисление матрицы периодов для случаев  $g = 2, 3$ .** Для приложения, рассматриваемого в данной статье, интересны прямоугольные многоугольники  $P_1$  и  $P_2$ , показанные на рис. 2.

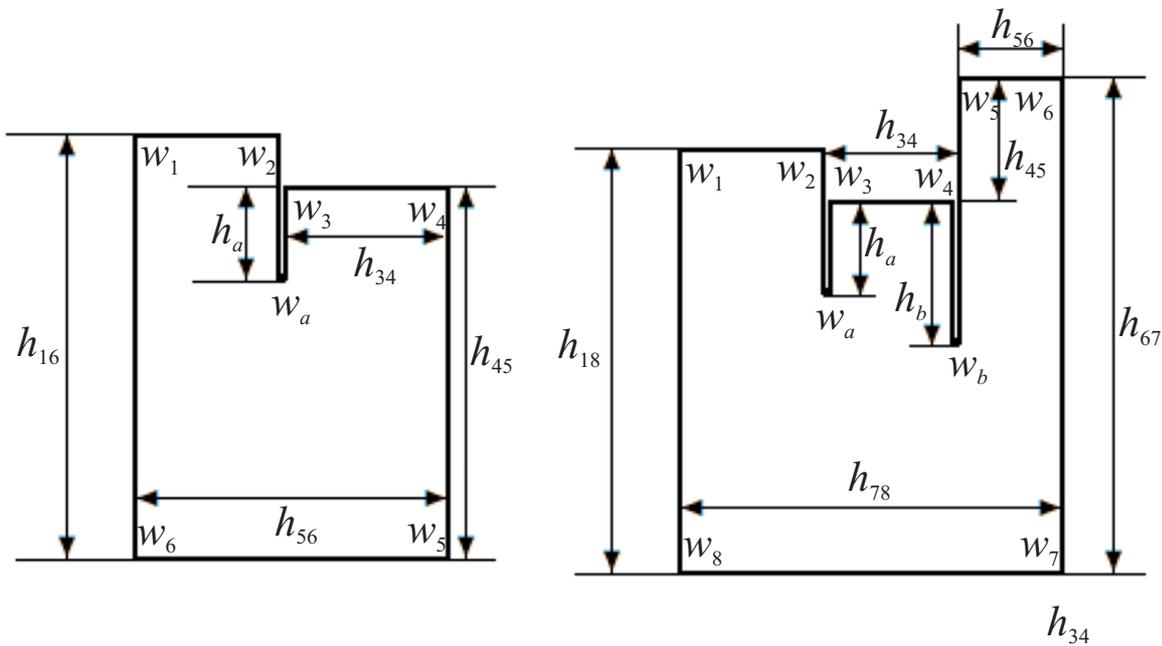


Рис. 2. Многоугольники  $P_1$  и  $P_2$

Следуя схеме, приведенной в разделе 3.1, определим римановы поверхности  $M_1$  и  $M_2$ , ассоциированные с  $P_1$  и  $P_2$  соответственно. Чтобы воспользоваться алгоритмом вычисления конформного отображения, необходимо вычислить матрицы периодов  $M_1$  и  $M_2$  и определить локусы  $\mathbb{H}$  в каждом случае.

**Утверждение 1** [13]. *Локус кривой для  $P_1$  задается уравнением*

$$\theta \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix} (u|\Omega) = 0,$$

для  $P_2$  — переопределенной системой

$$\theta \begin{bmatrix} 110 \\ 100 \end{bmatrix} (u|\Omega) = 0,$$

$$\theta \begin{bmatrix} 100 \\ 101 \end{bmatrix} (u|\Omega) = 0,$$

$$\theta \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \end{bmatrix} (u|\Omega) = 0.$$

**Утверждение 2.** Область изменения параметров для  $P_1$  задается условием (10), для  $P_2$  — условием (10) и условием Мамфорда [18]

$$\theta \begin{bmatrix} 111 \\ 101 \end{bmatrix} (0|\Omega) = 0.$$

**Утверждение 3.** Вектор констант  $C$ , определенный в (9), для  $P_1$  равен  $i \begin{pmatrix} h_{16} - h_{45} \\ h_{45} \end{pmatrix}$ .

Далее, пусть  $z_a$  — прообраз точки  $w_a \in \partial P_1$ . Тогда  $u(z_a) = v_a + i\Omega_1/2$ , где  $v_a \in \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega_1$  — первый столбец матрицы  $\Omega$ , причем  $v_a$  и мнимая часть матрицы периодов  $\Omega$  для  $P_1$  удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \begin{pmatrix} h_{16} - h_{45} \\ h_{45} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{56} - h_{34} \\ h_{56} \end{pmatrix} = 0, \quad \det \left( \frac{\partial \theta \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix}}{\partial z_1} (z|\Omega), \frac{\partial \theta \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix}}{\partial z_2} (z|\Omega) \right) \Big|_{z=v_a+i\Omega_1/2} = 0, \\ 2(C, v_a) - h_{45} + h_a = 0, \quad \theta \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix} \left( v_a + i \frac{\Omega_1}{2} \Big| \Omega \right) = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

**Утверждение 3'.** Вектор констант  $C$  для  $P_2$  равен  $i \begin{pmatrix} h_{18} + h_{45} - h_{67} \\ -h_{45} \\ h_{67} \end{pmatrix}$ .

Пусть  $z_a$  и  $z_b$  — прообразы точек  $w_a \in \partial P_2$  и  $w_b \in \partial P_2$  соответственно. Тогда  $u(z_a) = v_a + i\Omega_1/2$  и  $u(z_b) = v_b + i\Omega_2/2$ , где  $v_a \in \mathbb{R}^3$ ,  $v_b \in \mathbb{R}^3$  и  $\Omega_k$  —  $k$ -й столбец  $\Omega$ , причем  $v_a, v_b$  и мнимая часть матрицы периодов  $\Omega$  для  $P_2$  удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \begin{pmatrix} h_{18} + h_{45} - h_{67} \\ -h_{45} \\ h_{67} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{78} - h_{34} - h_{56} \\ h_{78} - h_{56} \\ h_{78} \end{pmatrix} = 0, \\ \det \left( \frac{\partial \theta \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \end{bmatrix}}{\partial z_1} (z|\Omega), \frac{\partial \theta \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \end{bmatrix}}{\partial z_2} (z|\Omega), \frac{\partial \theta \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \end{bmatrix}}{\partial z_3} (z|\Omega) \right) \Big|_{\substack{z = v_a + \Pi_1/2 \\ z = v_b + \Pi_2/2}} = 0, \\ \theta \begin{bmatrix} 111 \\ 101 \end{bmatrix} (0|\Omega) = 0, \\ 2i(C, v_a) - h_{67} + h_{45} + h_a = 0, \quad \theta \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \end{bmatrix} \left( z_a + \frac{\Pi_1}{2} \Big| \Omega \right) = 0, \quad \theta \begin{bmatrix} 100 \\ 101 \end{bmatrix} \left( z_a + \frac{\Pi_1}{2} \Big| \Omega \right) = 0, \\ 2i(C, v_b) - h_{67} + h_{45} + h_b = 0, \quad \theta \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \end{bmatrix} \left( z_b + \frac{\Pi_2}{2} \Big| \Omega \right) = 0, \quad \theta \begin{bmatrix} 100 \\ 101 \end{bmatrix} \left( z_b + \frac{\Pi_2}{2} \Big| \Omega \right) = 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

Наконец, необходимо явное выражение для гиперэллиптической проекции  $x(u)$  в (9).

**Утверждение 4.** Пусть образами  $0, 1$  и  $\infty$  при конформном отображении  $H$  на  $P_1$  являются  $w_6,$

$w_5$  и  $w_1$ ,  $H$  на  $P_2$  —  $w_8$ ,  $w_7$  и  $w_1$  соответственно. Тогда гиперэллиптическая проекция в (9) имеет вид

$$x(u) = \frac{\left( \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} (u|\Omega) \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} \left( i \frac{\Omega_2}{2} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \Omega \right) \right)^2}{\left( \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} \left( u - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \Omega \right) \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} \left( i \frac{\Omega_2}{2} \middle| \Omega \right) \right)^2} \quad \text{для } P_1, \quad (13)$$

$$x(u) = \frac{\left( \theta \begin{bmatrix} 001 \\ 101 \end{bmatrix} (u|\Omega) \theta \begin{bmatrix} 001 \\ 101 \end{bmatrix} \left( i \frac{\Omega_3}{2} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \Omega \right) \right)^2}{\left( \theta \begin{bmatrix} 001 \\ 101 \end{bmatrix} \left( u - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \Omega \right) \theta \begin{bmatrix} 001 \\ 101 \end{bmatrix} \left( i \frac{\Omega_3}{2} \middle| \Omega \right) \right)^2} \quad \text{для } P_2.$$

Доказательство утверждения 2 можно найти в [19]. Построение систем уравнений, связывающих вспомогательные параметры конформного отображения на прямоугольные многоугольники, приводится в [12] и [14], там же описан алгоритм численного решения таких систем. Следует заметить, что для многоугольников геометрии, показанной на рис. 2, в области изменения параметров, заданной в утверждении 2, решения (11) и (12) существуют и единственны. Построение гиперэллиптических проекций основано на приведенных в [18] рецептах их вычисления; подробные выкладки не приводятся ввиду их громоздкости.

**3.3. Вычисление отображения прямоугольника на период канала.** Период поперечного сечения канала (см. раздел 2) является частным случаем многоугольника  $P_1$  на рис. 2. Будем обозначать эту область через  $D_1$ . Для построения ортогональной сетки в  $D_1$  как конформного образа прямоугольной сетки необходимо ввести понятие конформного модуля.

Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — односвязная область с кусочно-гладкой ориентированной границей  $\partial D$ , и пусть точки  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \partial D$  перечислены в порядке следования при обходе по этой границе. Пусть  $R_\tau = [-\tau; \tau] \times [-1; 1]$  — прямоугольник на комплексной плоскости, а  $f_\tau : R_\tau \mapsto D$  — конформное отображение, переводящее вершины прямоугольника в отмеченные точки  $f_\tau(-\tau - i) = z_1$ ,  $f_\tau(\tau - i) = z_2$ ,  $f_\tau(\tau + i) = z_3$  (по теореме Римана оно существует и единственно). Тогда верно

**Утверждение 5** [10]. Равенство  $f_\tau(\tau + i) = z_4$  имеет место при единственном значении  $\tau$ , называемом конформным модулем области с отмеченными точками на границе  $c(D, z_1, z_2, z_3, z_4)$ .

Ортогональная сетка в  $D_1$  строится следующим образом.

1. Вычисляется конформный модуль  $\tau = c(D, -l, l, l + 2i, -l + 2i)$ .
2. В  $[-1; 1] \times [-1; 1]$  генерируется прямоугольная сетка, описанная в [2], затем она отображается сжатием по оси абсцисс в  $R_\tau$ .
3. В соответствии с алгоритмом, изложенным в 3.1–3.2, для узлов сетки в  $R_\tau$  последовательно вычисляются образы при конформных отображениях  $R_\tau \mapsto \mathbb{H}$  и  $\mathbb{H} \mapsto D_1$ . Легко видеть, что образ сетки соответствует требованиям, предъявленным в разделе 2.

Конформный модуль в п. 1 находится из уравнения (см. (4) и (13))

$$e^{\pi\tau} \left( \frac{\theta_{00}(0)}{\theta_{00}\left(\frac{i\tau}{2}\right)} \right)^4 = \frac{\left( \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 00 \end{bmatrix} \left( i \frac{\Omega_2}{2} \middle| \Omega \right) \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 10 \end{bmatrix} \left( i \frac{\Omega_2}{2} \middle| \Omega \right) \right)^2}{\left( \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 11 \end{bmatrix} \left( i \frac{\Omega_2}{2} \middle| \Omega \right) \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} \left( i \frac{\Omega_2}{2} \middle| \Omega \right) \right)^2}. \quad (14)$$

Если матрица  $\Omega$  уже найдена из (11), то решение уравнения (14) вычисляется методом дихотомии с начальным приближением  $\tau = l$ .

По принципу симметрии Римана [15], отображение  $f_\tau : R_\tau \mapsto D_1$  можно продолжить до конформного отображения  $\bar{f}_\tau$  прямоугольника  $[-\tau; 3\tau] \times [-1; 1]$  на область  $D_2 = [-l; 3l] \times [0; 2] \setminus \{0\} \times [0; \varepsilon] \setminus \{2l\} \times [0; \varepsilon]$ , причем  $\bar{f}_\tau(-\tau - i) = -l$ ,  $\bar{f}_\tau(3\tau - i) = 3l$ ,  $\bar{f}_\tau(3\tau + i) = 3l + 2i$  и  $\bar{f}_\tau(-\tau + i) = -l + 2i$ . Отсюда по определению конформного модуля имеем

$$c(D_2, -l, 3l, 3l + 2i, -l + 2i) = 2c(D_1, -l, l, l + 2i, -l + 2i).$$

Поскольку область  $D_2$  является частным случаем многоугольника  $P_2$  на рис. 2, можно провести несложный численный эксперимент по сравнению численного метода, предложенного в данной работе, с методом, реализованным в пакете SCPACK. Зафиксируем параметр  $\epsilon = 0.2$  и будем, изменяя параметр  $l$ , вычислять отношение конформных модулей многоугольников  $D_2$  и  $D_1$  с отмеченными углами.

Таблица 1  
Результаты вычисления с помощью SCPACK

| $l$  | $c(D_1)$     | $c(D_2)$     | $\frac{c(D_2)}{c(D_1)} - 2$ |
|------|--------------|--------------|-----------------------------|
| 0.4  | 0.4148486615 | 0.8296973231 | $5.06 \times 10^{-10}$      |
| 0.35 | 0.3645440784 | 0.7290881302 | $-0.729 \times 10^{-8}$     |
| 0.3  | 0.2936817197 | 0.6282059311 | 0.139070                    |
| 0.25 | 0.2453633693 | 0.5268922096 | 0.147395                    |
| 0.2  | 0.1968842981 | 0.4248838133 | 0.158038                    |
| 0.15 | 0.1481818216 | 0.3217583553 | 0.171375                    |

Таблица 2  
Результаты вычисления с помощью  
численно-аналитического метода

| $l$  | $c(D_1)$     | $c(D_2)$     | $\frac{c(D_2)}{c(D_1)} - 2$ |
|------|--------------|--------------|-----------------------------|
| 0.4  | 0.4148486621 | 0.8296973242 | $1.52 \times 10^{-10}$      |
| 0.35 | 0.364544065  | 0.7290881310 | $2.34 \times 10^{-9}$       |
| 0.3  | 0.3141029547 | 0.6282059317 | $7 \times 10^{-9}$          |
| 0.25 | 0.2634460886 | 0.5268922094 | $1.22 \times 10^{-8}$       |
| 0.2  | 0.2124419008 | 0.4248838139 | $5.81 \times 10^{-8}$       |
| 0.15 | 0.1608790191 | 0.3217584678 | $2.67 \times 10^{-6}$       |

Результаты говорят о предпочтительности использования предложенного численно-аналитического метода к задаче построения сетки в канале (см. табл. 1 и 2).

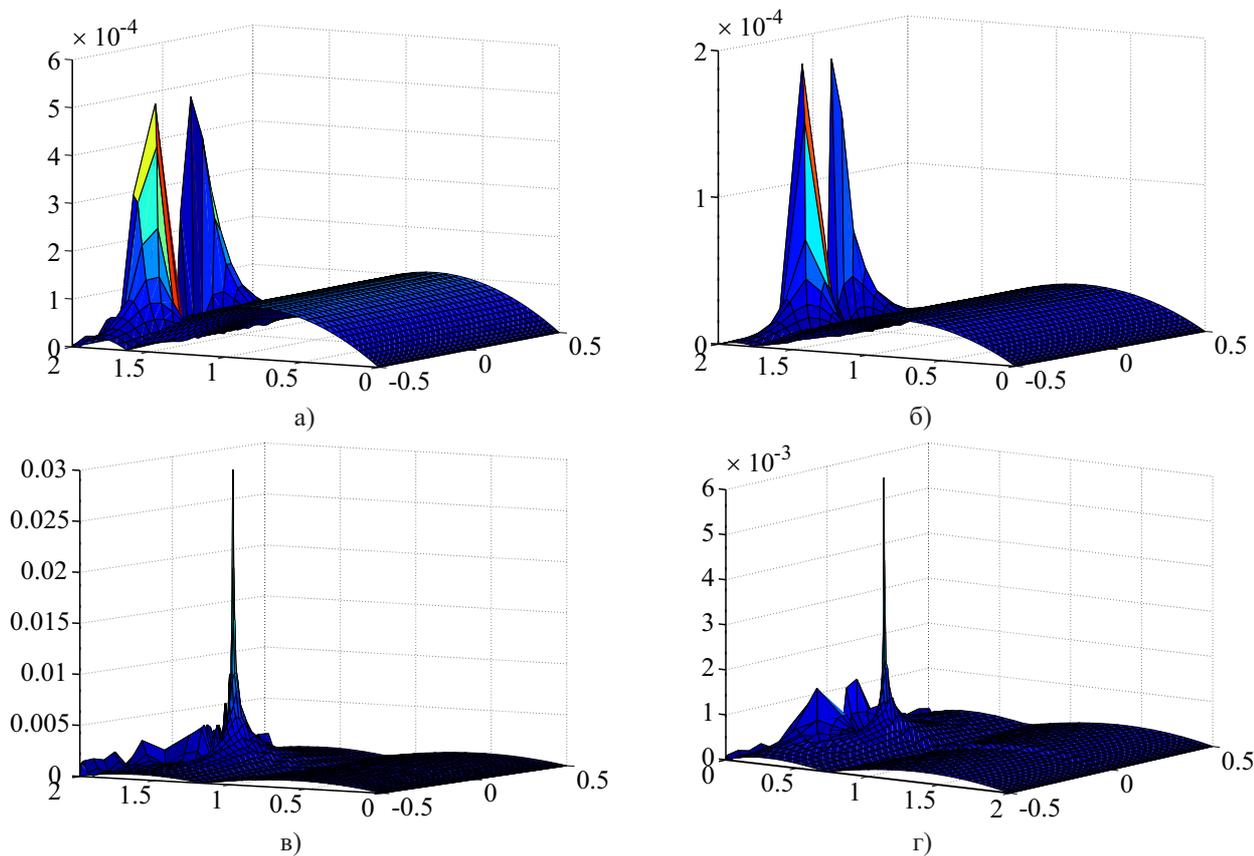


Рис. 3.  $|U_{35 \times 40} - U_{105 \times 40}|$  и  $|U_{105 \times 40} - U_{315 \times 40}|$ , рассчитанные с использованием аналитического вычисления производных отображения (а и б соответственно), и те же результаты, полученные при вычислении производных методом коллокаций (в и г соответственно)

**4. Численные эксперименты.** В этом разделе приведены результаты расчетов основного течения и кривых нейтральной устойчивости для канала с гребенчатым оребрением при  $2l = 1$  и  $\epsilon = 0.4$  (см. раздел 2), а также для каналов с волнистым оребрением. Расчеты были проведены на кластерах МВС100к (Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН) и “Ломоносов” (МГУ им. М. В. Ломоносова) с помощью технологии [2, 3].

Обозначим через  $n_y$  и  $n_z$  число узлов расчетной сетки по вертикали и горизонтали соответственно. Через  $U_{n_y \times n_z}$  обозначим профиль основного течения, рассчитанный для гребенчатого оребрения на сетке размера  $n_y \times n_z$ .

В технологии [2] производные отображения, используемого для построения расчетной сетки, находят численно методом коллокаций. В случае конформного отображения эти производные можно вычислить аналитически. На рис. 3 сверху слева и сверху справа изображены соответственно  $|U_{35 \times 40} - U_{105 \times 40}|$  и  $|U_{105 \times 40} - U_{315 \times 40}|$ , рассчитанные с использованием аналитического вычисления производных отображения. Снизу слева и снизу справа на этом рисунке изображены те же результаты, полученные при вычислении производных методом коллокаций. Видно, что при использовании аналитического вычисления производных сходимость решений по шагу сетки существенно лучше.

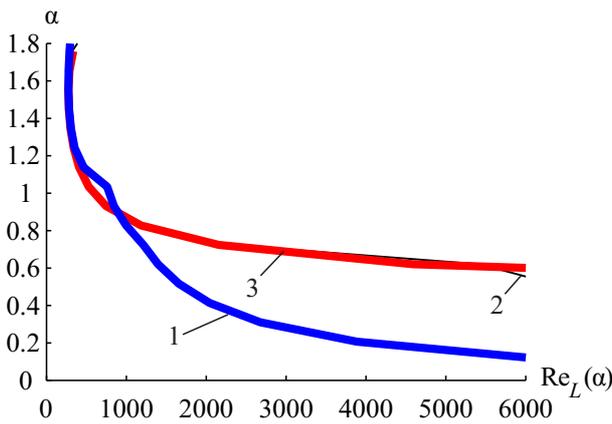


Рис. 4. Зависимость  $Re_L(\alpha)$ , вычисленная на сетках размеров  $n_y \times n_z = 14 \times 13$  (синяя кривая 1),  $27 \times 23$  (черная 2) и  $54 \times 45$  (красная 3)

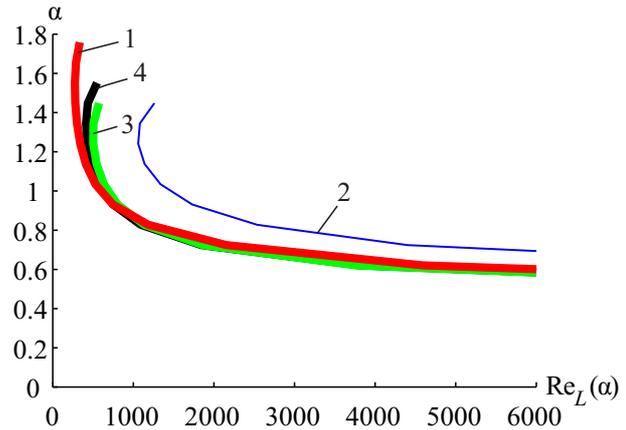


Рис. 5. Зависимость  $Re_L(\alpha)$  для канала с гребенчатым оребрением (красная кривая 1) и для канала с волнистым оребрением при  $\gamma = 2$  (синяя кривая 2), 6 (зеленая 3) и 10 (черная 4)

На рис. 4 представлены кривые нейтральной устойчивости для канала с гребенчатым оребрением, рассчитанные на сетках размеров  $n_y \times n_z = 14 \times 13$  (синяя кривая),  $27 \times 23$  (черная) и  $54 \times 45$  (красная). Видна хорошая сходимость по шагу сетки, особенно в области минимального  $Re_L$ , что позволяет вычислять глобальное критическое число Рейнольдса с хорошей точностью. Кривую нейтральной устойчивости для канала с гребенчатым оребрением можно получить предельным переходом при  $\gamma \rightarrow \infty$ , рассматривая каналы с волнистым оребрением вида

$$\eta(z) = 1 - \varepsilon \left( \left| \cos \frac{\pi z}{2l} \right|^\gamma - h_\gamma \right),$$

где значение  $\varepsilon$  такое же, как для гребенчатого оребрения, а  $h_\gamma$  выбирается так, чтобы обеспечить единичную полувысоту канала. На рис. 5 изображены зависимости  $Re_L(\alpha)$  для волнистого оребрения с  $\gamma = 2$  (синяя кривая), 6 (зеленая), 10 (черная), а также зависимость  $Re_L(\alpha)$  для гребенчатого оребрения (красная кривая). Видно, что кривые нейтральной устойчивости для волнистого оребрения с ростом  $\gamma$  приближаются к кривой нейтральной устойчивости для гребенчатого оребрения.

**5. Выводы.** Для непосредственного распространения технологии исследования устойчивости течений в оребренных каналах, предложенной в [2] для гладкого оребрения, на каналы с гребенчатым оребрением необходим метод отображения квадрата  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  на период поперечного сечения такого канала. Для построения этого отображения было предложено обобщение численно-аналитического метода конформного отображения [11].

Приведенные результаты численных экспериментов позволяют сделать следующие выводы:

- предложенный численно-аналитический метод обладает существенным преимуществом над методом, реализованным в пакете SCPACK, при вычислении конформных модулей периода поперечного сечения канала;

- аналитические выражения для производных отображения позволяют вычислять их с большей точностью, чем методом коллокаций, что заметно улучшает сходимость по шагу сетки при вычислении основного течения;

— показана сходимостъ по шагу сетки кривых нейтральной устойчивости для гребенчатого оребрения;  
 — результаты, полученные для гребенчатого оребрения, согласуются с результатами для волнистого оребрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 13–01–00350 и 13–01–00115).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойко А.В., Нечепуренко Ю.М.* Численный спектральный анализ временной устойчивости ламинарных течений в каналах постоянного сечения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2008. **48**, № 10. 1731–1747.
2. *Бойко А.В., Нечепуренко Ю.М.* Технология численного анализа влияния оребрения на временную устойчивость плоских течений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. **50**, № 6. 1109–1125.
3. *Клюшнев Н.В.* Высокопроизводительный анализ устойчивости поперечно-периодических течений жидкости и газа // Математическое моделирование. 2013. **25**, № 11. 111–120.
4. *Бойко А.В., Клюшнев Н.В., Нечепуренко Ю.М.* Влияние волнистого оребрения на устойчивость сдвиговых течений // Материалы XIII Международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория, 4–13 июня 2013. М.: МЦНМО, 2013. 35–36.
5. *Gordon W.J., Hall C.A.* Construction of curvilinear coordinate system and applications to mesh generation // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1973. **7**, N 4. 461–477.
6. *Floryan J.M.* Conformal-mapping-based coordinate generation method for channel flows // Journal of Computational Physics. 1985. **58**, N 2. 229–245.
7. *Floryan J.M.* Conformal-mapping-based coordinate generation method for flows in periodic configuration // Journal of Computational Physics. 1986. **62**, N 1. 221–247.
8. *Driscoll T.A., Trefethen L.N.* Schwarz–Christoffel mapping. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
9. *Banjai L.* Revisiting the crowding phenomenon in Schwarz–Christoffel mapping // SIAM J. Sci. Comput. 2008. **30**, N 2. 618–636.
10. *Papamichael N., Stylianopoulos N.* Numerical conformal mapping: Domain decomposition and the mapping of quadrilaterals. Singapore: World Scientific, 2010.
11. *Bogatyrev A., Hassner M., Yarmolich D.* Analytic-model of readback signal voltage in perpendicular magnetic image recording // Contemporary Math. 2010. **528**. 155–160.
12. *Григорьев О.А.* Численно-аналитический метод конформного отображения многоугольников с шестью прямыми углами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2013. **53**, № 10. 1629–1638.
13. *Bogatyrev A.* Image of Abel–Jacobi map for hyperelliptic genus 3 and 4 curves. Препринт arxiv:1312.0445. Ithaca: Cornell Univ. Library, 2013.
14. *Богатырев А.Б.* Конформные отображения прямоугольных семиугольников // Матем. сб. 2012. **203**, № 12. 35–56.
15. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
16. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
17. *Deconinck B., Heil M., Bobenko A.I., van Hoesel M., Schmics M.* Computing Riemann theta functions // Mathematics of Computation. 2004. **73**, N 247. 1417–1442.
18. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
19. *Silhol R.* The Schottky problem for real genus 3 *M*-curves // Mathematische Zeitschrift. 2001. **236**, N 4. 841–881.

Поступила в редакцию  
 13.07.2014

---

**Application of a Numerical-Analytical Method of Conformal Mapping  
 to Mesh Generation in a Channel with Riblets**

**O. A. Grigoriev<sup>1</sup> and N. V. Klyushnev<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences; ulitsa Gubkina 8, Moscow, 119333, Russia; Graduate Student, e-mail: guelpho@mail.ru*

<sup>2</sup> *Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences; ulitsa Gubkina 8, Moscow, 119333, Russia; Graduate Student, e-mail: n\_klyushnev@mail.ru*

Received July 13, 2014

**Abstract:** A numerical-analytical method of conformal mapping is proposed for mesh generation to study the Poiseuille flow stability in a channel with rectangular riblets. The proposed method is compared with the method used in SCPACK (Schwarz-Christoffel conformal map PACKage). The convergence is shown as the grid spacing tends to zero when calculating the main flow and the neutral curves. The numerical results obtained for wave and comb riblets are consistent. Using this numerical-analytical method to study the flow stability allows one to analyze more general cases of rectangular riblets.

**Keywords:** riblets, neutral stability curve, conformal mappings, theta-functions, Poiseuille flow.

### References

1. A. V. Boiko and Yu. M. Nechepurenko, “Numerical Spectral Analysis of Temporal Stability of Laminar Duct Flows with Constant Cross Sections,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **48** (10), 1731–1747 (2008) [*Comput. Math. Math. Phys.* **48** (10), 1699–1714 (2008)].
2. A. V. Boiko and Yu. M. Nechepurenko, “Technique for the Numerical Analysis of the Riblet Effect on Temporal Stability of Plane Flows,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **50** (6), 1109–1125 (2010) [*Comput. Math. Math. Phys.* **50** (6), 1055–1070 (2010)].
3. N. V. Klyushnev, “High-Performance Stability Analysis for Cross-Periodic Flows,” *Mat. Model.* **25** (11), 111–120 (2013).
4. A. V. Boiko, N. V. Klyushnev, and Yu. M. Nechepurenko, “The Wavy Riblets Effect on the Stability of Shear Flows,” in *Proc. of 13th Int. Conf. on Aerodynamic Models and Methods, Eupatoria, June 4–13, 2013* (Center for Continuous Math. Edu., Moscow, 2013), pp. 35–36.
5. W. J. Gordon and C. A. Hall, “Construction of Curvilinear Coordinate System and Applications to Mesh Generation, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **7** (4), 461–477 (1973).
6. J. M. Floryan, “Conformal-Mapping-Based Coordinate Generation Method for Channel Flows,” *J. Comput. Phys.* **58** (2), 229–245 (1985).
7. J. M. Floryan, “Conformal-Mapping-Based Coordinate Generation Method for Flows in Periodic Configuration,” *J. Comput. Phys.* **62** (1), 221–247 (1986).
8. T. A. Driscoll and L. N. Trefethen, *Schwarz–Christoffel Mapping* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002).
9. L. Banjai, “Revisiting the Crowding Phenomenon in Schwarz–Christoffel Mapping,” *SIAM J. Sci. Comput.* **30** (2), 618–636 (2008).
10. N. Papamichael and N. Stylianopoulos, *Numerical Conformal Mapping: Domain Decomposition and the Mapping of Quadrilaterals* (World Scientific, Singapore, 2010).
11. A. Bogatyrev, M. Hassner, and D. Yarmolich, “Analytic-Model of Readback Signal Voltage in Perpendicular Magnetic Image Recording,” *Contemp. Math.* **528**, 155–160 (2010).
12. O. A. Grigor’ev, “Numerical-Analytical Method for Conformal Mapping of Polygons with Six Right Angles,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **53** (10), 1629–1638 (2013) [*Comput. Math. Math. Phys.* **53** (10), 1447–1456 (2013)].
13. A. Bogatyrev, *Image of Abel–Jacobi Map for Hyperelliptic Genus 3 and 4 Curves*, arXiv preprint: 1312.0445v1 [math.CV] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2013), available at <http://arxiv.org/abs/1312.0445/>.
14. A. B. Bogatyrev, “Conformal Mapping of Rectangular Heptagons,” *Mat. Sb.* **203** (12), 35–56 (2012) [*Sb. Math.* **203** (12), 1–21 (2012)].
15. M. A. Lavrent’ev and B. V. Shabat, *Methods in the Theory of Functions of a Complex Variable* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
16. N. I. Akhiezer, *Elements of the Theory of Elliptic Functions* (Nauka, Moscow, 1970; AMS, Providence, 1990).
17. B. Deconinck, M. Heil, A. I. Bobenko, et al., “Computing Riemann Theta Functions,” *Math. Comp.* **73** (247), 1417–1442 (2004).
18. D. B. Mumford, *Tata Lectures on Theta* (Birkhäuser, Boston, 1984; Mir, Moscow, 1988).
19. R. Silhol, “The Schottky Problem for Real Genus 3  $M$ -Curves,” *Math. Z.* **236** (4), 841–881 (2001).