

УДК 550.341

ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ УСЛОВИЙ СОГЛАСОВАНИЯ НА СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

А. Ф. Зайцева¹, В. В. Лисица²

Метод декомпозиции расчетной области является одним из наиболее распространенных при разработке параллельных алгоритмов решения уравнения Гельмгольца, при этом одним из основных параметров, влияющих на скорость сходимости метода, являются условия согласования между подобластями. Оптимальными являются условия, основанные на использовании оператора Пуанкаре–Стеклова, однако при численной реализации этот оператор необходимо локализовать, что приводит к возмущению условий согласования, не связанных с дискретизацией. В настоящей статье показано, что при внесении несимметричных возмущений (отличающихся в соседних подобластях) метод декомпозиции области сходится, но к решению задачи, отличной от исходной. Иными словами, существует неустранимая погрешность, определяемая именно несимметрией возмущений условий согласования, что особенно актуально при использовании разных численных методов в соседних подобластях.

Ключевые слова: метод декомпозиции области, уравнение Гельмгольца, оператор Пуанкаре–Стеклова, метод конечных разностей, метод малых возмущений, сходимость итерационных процессов.

1. Введение. Численное решение уравнения Гельмгольца является неотъемлемой частью ряда процедур обработки сейсмических данных, таких как полное обращение сейсмических полей, миграция в обратном времени и др. [26, 27]. Возникающие в сейсморазведке реальные задачи отличаются гигантскими размерами (сотни длин волн в каждом направлении), что приводит к необходимости разработки высокоэффективных алгоритмов решения, ориентированных на использование современных вычислительных систем с параллельной архитектурой. Одним из распространенных подходов к решению уравнения Гельмгольца является метод декомпозиции расчетной области [12, 18, 24]. Традиционно данный метод используется для построения предобусловливателя [9, 24, 25] и самостоятельно не применяется, однако именно эта часть алгоритмов решения уравнения Гельмгольца является наиболее ресурсоемкой. По этой причине к настоящему времени существует ряд подходов к оптимизации метода декомпозиции области, основанных преимущественно на оптимизации условий согласования на границах подобластей [8, 12, 13, 18, 22, 24]. При этом построение и оптимизация условий согласования проводятся для дифференциальной задачи в предположении полного отсутствия каких-либо погрешностей. Однако на практике задача (уравнение Гельмгольца с граничными условиями на интерфейсах, где происходит обмен) решается численно с использованием метода конечных разностей или конечных элементов, что вносит дополнительные ошибки при аппроксимации условий согласования. Более того, зачастую выгодным является использование разных численных методов решения уравнения Гельмгольца или разных дискретизаций в различных подобластях, что автоматически приводит к существенно отличным аппроксимациям условий согласования.

Основной задачей настоящей статьи является исследование влияния погрешности аппроксимации условий согласования на скорость сходимости метода декомпозиции расчетной области для уравнения Гельмгольца. На простейшем примере одномерного уравнения Гельмгольца показано, что наличие несимметричных возмущений условий согласования приводит к наличию неустранимой погрешности, пропорциональной ошибке аппроксимации граничных условий.

2. Постановка задачи. Рассматривается одномерное уравнение Гельмгольца, определенное в \mathbb{R} и удовлетворяющее условиям предельного поглощения:

$$\frac{\omega^2}{c^2(z)} u + \frac{d^2 u}{dz^2} = f(z), \quad u(x, \omega + i\varepsilon) \rightarrow 0 \Big|_{x \rightarrow \infty}, \quad u(x, \omega + i\varepsilon) \rightarrow 0 \Big|_{x \rightarrow -\infty}.$$

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, д. 3, 630090, Новосибирск; инженер, e-mail: zaf1990@mail.ru

² Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, д. 3, 630090, Новосибирск; зав. лабораторией, e-mail: lisitsavv@ipgg.sbras.ru

Здесь ε — малый положительный параметр. Правая часть предполагается финитной и достаточно гладкой, так что $\text{supp}(f) \subseteq [0, H]$, а функция скорости $c(z)$ строго положительна, ограничена сверху и кусочно-непрерывна.

Дальнейшие рассуждения достаточно проводить для случая кусочно-постоянной функции, определяемой по правилу

$$c(z) = \begin{cases} c_1, & 0 \leq z \leq z_1, \\ c_2, & z_1 \leq z \leq z_2, \\ c_3, & z_2 \leq z \leq H. \end{cases}$$

В этом случае в области $\Omega = [0, H]$ задачу можно переформулировать в виде

$$\frac{\omega^2}{c^2(z)} u + \frac{d^2 u}{dz^2} = f(z), \quad \frac{du}{dz} + \frac{i\omega}{c(z)} u = 0 \Big|_{z=0}, \quad \frac{du}{dz} - \frac{i\omega}{c(z)} u = 0 \Big|_{z=H}. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что $\omega \in \mathbb{C}$ и $\text{Im} \omega > 0$, что позволяет включить в рассмотрение большинство практически значимых случаев. Среди таких случаев отметим следующие: $\omega \in \mathbb{R}$ — соответствует классическому уравнению Гельмгольца, полученному в результате действия преобразования Фурье на волновое уравнение; $\omega \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ — соответствует отрицательно определенному оператору Гельмгольца, который может описывать распространение эванесцентных мод либо может быть получен в результате применения интегрального преобразования Лаггера к волновому уравнению [1]; общий случай $\omega \in \mathbb{C}$ соответствует волновому процессу в среде с поглощением [2, 7, 28] или действию предобусловливателя, основанного на комплексном сдвиге спектра. Следует отметить, что полученная задача имеет единственное решение, и оно ограничено, что обеспечивается наличием граничных условий третьего рода.

Предполагается, что для решения задачи (1) используется метод декомпозиции расчетной области:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2(z)} u_L^N + \frac{d^2 u_L^N}{dz^2} &= f(z), & \frac{\omega^2}{c^2(z)} u_R^N + \frac{d^2 u_R^N}{dz^2} &= f(z), \\ \frac{du_L^N}{dz} + \frac{i\omega}{c(z)} u_L^N &= 0 \Big|_{z=0}, & l_R[u_R^N] &= l_L[u_L^{N-1}] \Big|_{z=z_R}, \\ r_L[u_L^N] &= r_R[u_R^{N-1}] \Big|_{z=z_L}, & \frac{du_R^N}{dz} - \frac{i\omega}{c(z)} u_R^N &= 0 \Big|_{z=H}, \\ z &\in [0, z_L], & z &\in [z_R, H], \end{aligned} \tag{2}$$

где верны следующие отношения порядка: $0 < z_1 < z_R \leq z_L < z_2 < H$. В данных обозначениях l_R, l_L, r_R, r_L — некоторые дифференциальные выражения, определенные в соответствующих точках. Нижние индексы L и R используются для обозначения подобласти, в которой определено соответствующее решение, верхний индекс соответствует номеру итерации. Ниже рассмотрение будет проводиться для операторов следующего вида:

$$\begin{aligned} l_R = l_\theta &= (1 + \theta_1) \frac{d}{dz} + (1 + \theta_2) \frac{i\omega}{c(z_R)}, & l_L = l_\xi &= (1 + \xi_1) \frac{d}{dz} + (1 + \xi_2) \frac{i\omega}{c(z_R)}, \\ r_L = r_\alpha &= (1 + \alpha_1) \frac{d}{dz} - (1 + \alpha_2) \frac{i\omega}{c(z_L)}, & r_R = r_\eta &= (1 + \eta_1) \frac{d}{dz} - (1 + \eta_2) \frac{i\omega}{c(z_L)}. \end{aligned}$$

В данных обозначениях предполагается, что в качестве невозмущенных условий передачи выступают условия, основанные на использовании оператора Пуанкаре–Стеклова (Dirichlet-to-Neumann map) при условии постоянства скорости вне рассматриваемой области. Как отмечалось выше, эти условия являются наиболее широко используемыми для метода декомпозиции области в применении к уравнению Гельмгольца. Предполагается, что отличия в условиях вызваны малыми возмущениями, обусловленными ошибками аппроксимации дифференциальных операторов, т.е. $|\alpha_j| \ll 1, |\eta_j| \ll 1, |\xi_j| \ll 1, |\theta_j| \ll 1, j = 1, 2$.

Ниже исследуется влияние возмущений условий согласования на сходимость метода декомпозиции области для уравнения Гельмгольца.

3. Погрешность. Рассмотрим погрешность решения в каждой из подобластей: $\varepsilon_L^N = u_L^N - u$ при $z \in [0, z_L]$ и $\varepsilon_R^N = u_R^N - u$ при $z \in [z_R, H]$, где u_L^N и u_R^N — решения задач для каждой из подобластей на N -й итерации, u — точное решение задачи (1). В силу линейности рассматриваемых операторов погрешность

удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega^2}{c^2(z)} \varepsilon_L^N + \frac{d^2 \varepsilon_L^N}{dz^2} = 0, & z \in \Omega^L \\
 & \frac{d\varepsilon_L^N}{dz} + \frac{i\omega}{c(z)} \varepsilon_L^N = 0 \Big|_{z=0}, \\
 & r_\alpha [\varepsilon_L^N] = r_\eta [\varepsilon_R^{N-1}] + (r_\eta - r_\alpha) [u] \Big|_{z=z_L}, \\
 & \frac{\omega^2}{c^2(z)} \varepsilon_R^N + \frac{d^2 \varepsilon_R^N}{dz^2} = 0, & z \in \Omega^R \\
 & l_\theta [\varepsilon_R^N] = l_\xi [\varepsilon_L^{N-1}] + (l_\xi - l_\theta) [u] \Big|_{z=z_R}, \\
 & \frac{d\varepsilon_R^N}{dz} - \frac{i\omega}{c(z)} \varepsilon_R^N = 0 \Big|_{z=H}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку скорость предполагается кусочно-постоянной, погрешность в каждой из подобластей представима в виде

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_L^{N+1}(z) &= \begin{cases} S_L^{N+1} e^{-i\omega z/c_1}, & 0 \leq z \leq z_1, \\ C_{L+}^{N+1} e^{i\omega z/c_2} + C_{L-}^{N+1} e^{-i\omega z/c_2}, & z_1 \leq z \leq z_L, \end{cases} \\
 \varepsilon_R^{N+1}(z) &= \begin{cases} S_R^{N+1} e^{i\omega z/c_3}, & z_2 \leq z \leq H, \\ C_{R+}^{N+1} e^{i\omega z/c_2} + C_{R-}^{N+1} e^{-i\omega z/c_2}, & z_R \leq z \leq z_2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Используя непрерывность решения и производной на границах разрыва скорости и воспользовавшись граничными условиями, можно записать систему уравнений для коэффициентов S_L^{N+1} , C_{L+}^{N+1} , C_{L-}^{N+1} :

$$\begin{pmatrix} -e^{-i\omega z_1/c_1} & e^{i\omega z_1/c_2} & e^{-i\omega z_1/c_2} \\ e^{-i\omega z_1/c_1} & e^{i\omega z_1/c_2} & -e^{-i\omega z_1/c_2} \\ c_1 & c_2 & -c_2 \\ 0 & 2i\omega\alpha_- \frac{e^{i\omega z_L/c_2}}{c_2} & 2i\omega\alpha_+ \frac{e^{-i\omega z_L/c_2}}{c_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_L^{N+1} \\ C_{L+}^{N+1} \\ C_{L-}^{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_\eta [\varepsilon_R^N] \Big|_{z=z_L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (r_\alpha - r_\eta) [u] \Big|_{z=z_L} \end{pmatrix}.$$

Оператор в правой части также представим в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_\eta [\varepsilon_R^N] \Big|_{z=z_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i\omega\eta_+ \frac{e^{-i\omega z_L/c_2}}{c_2} & 2i\omega\eta_- \frac{e^{i\omega z_L/c_2}}{c_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{R-}^N \\ C_{R+}^N \\ S_R^N \end{pmatrix}.$$

Здесь
$$\begin{cases} \alpha_+ = \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2}, & \eta_+ = \frac{2 + \eta_1 + \eta_2}{2}, & \theta_+ = \frac{2 + \theta_1 + \theta_2}{2}, & \xi_+ = \frac{2 + \xi_1 + \xi_2}{2}, \\ \alpha_- = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}, & \eta_- = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2}, & \theta_- = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, & \xi_- = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}. \end{cases}$$

Воспользовавшись спецификой правой части и определением коэффициента отражения $R_{12} = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}$, эту систему можно упростить, исключив из рассмотрения S_L^{N+1} и S_R^N :

$$\begin{pmatrix} e^{i\omega z_1/c_2} & e^{-i\omega z_1/c_2} R_{12} \\ \alpha_- e^{i\omega z_L/c_2} & \alpha_+ e^{-i\omega z_L/c_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{L+}^{N+1} \\ C_{L-}^{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \eta_+ e^{-i\omega z_L/c_2} & \eta_- e^{i\omega z_L/c_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{R-}^N \\ C_{R+}^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c_2}{2i\omega} \left((\alpha_1 - \eta_1) \frac{du}{dz} - (\alpha_2 - \eta_2) \frac{i\omega}{c_2} u \right) \Big|_{z=z_L} \end{pmatrix}.$$

Полученную систему можно записать в форме $M_L C_L^{N+1} = P_L C_R^N + F_{\alpha\eta}$, где M_L , P_L и $F_{\alpha\eta}$ — матрицы, введенные выше, а векторы неизвестных имеют вид $C_L^N = \begin{pmatrix} C_{L+}^N \\ C_{L-}^N \end{pmatrix}$, $C_R^N = \begin{pmatrix} C_{R-}^N \\ C_{R+}^N \end{pmatrix}$.

Аналогичным образом строятся операторы для правой подобласти, так что $M_R C_R^{N+1} = P_R C_L^N + F_{\theta\xi}$:

$$M_R = \begin{pmatrix} e^{-i\omega z_2/c_2} & R_{23} e^{i\omega z_2/c_2} \\ \theta_- e^{-i\omega z_R/c_2} & \theta_+ e^{i\omega z_R/c_2} \end{pmatrix}, \quad P_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi_+ e^{i\omega z_R/c_2} & \xi_- e^{-i\omega z_R/c_2} \end{pmatrix}, \quad R_{23} = \frac{c_2 - c_3}{c_2 + c_3},$$

$$F_{\theta\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c_2}{2i\omega} \left((\xi_1 - \theta_1) \frac{du}{dz} + (\xi_2 - \theta_2) \frac{i\omega}{c_2} u \right) \Big|_{z=z_R} \end{pmatrix}.$$

Объединяя полученные выражения, оператор перехода запишем в виде

$$\begin{pmatrix} C_L^{N+1} \\ C_R^{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M_L^{-1} P_L \\ M_R^{-1} P_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L^N \\ C_R^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_L^{-1} F_{\alpha\eta} \\ M_R^{-1} F_{\theta\xi} \end{pmatrix}.$$

В силу того что рассуждения проводятся для аддитивного метода декомпозиции области с разбиением на две подобласти, удобно перейти к рассмотрению квадрата полученного оператора:

$$\begin{pmatrix} C_L^{N+2} \\ C_R^{N+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_L^{-1} P_L M_R^{-1} P_R & 0 \\ 0 & M_R^{-1} P_R M_L^{-1} P_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L^N \\ C_R^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & M_L^{-1} P_L \\ M_R^{-1} P_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_L^{-1} F_{\alpha\eta} \\ M_R^{-1} F_{\theta\xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_L^{-1} F_{\alpha\eta} \\ M_R^{-1} F_{\theta\xi} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Обозначим $C_N = \begin{pmatrix} C_L^N \\ C_R^N \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} M_L^{-1} P_L M_R^{-1} P_R & 0 \\ 0 & M_R^{-1} P_R M_L^{-1} P_L \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & M_L^{-1} P_L \\ M_R^{-1} P_R & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} M_L^{-1} F_{\alpha\eta} \\ M_R^{-1} F_{\theta\xi} \end{pmatrix}$, тогда система (4) может быть переписана в виде: $C_{N+2} = S C_N + (A+I)F$, где I — единичная матрица. Используя полученное рекуррентное соотношение, погрешность на итерации с номером $2k$, где k — натуральное число, представим в виде

$$C_{2k} = S^k C_0 + \sum_{j=0}^{k-1} S^j (A+I)F. \tag{5}$$

Матрица S имеет два собственных значения кратности два каждое. Первое — нулевое, второе представляется в виде

$$\lambda = A_\xi A_\eta A_\alpha^{-1} A_\theta^{-1} = \frac{(\xi_- e^{-i\omega(z_R-z_1)/c_2} - R_{12} \xi_+ e^{i\omega(z_R-z_1)/c_2}) (\eta_- e^{-i\omega(z_2-z_L)/c_2} - R_{23} \eta_+ e^{i\omega(z_2-z_L)/c_2})}{(\alpha_+ e^{-i\omega(z_L-z_1)/c_2} - R_{12} \alpha_- e^{i\omega(z_L-z_1)/c_2}) (\theta_+ e^{-i\omega(z_2-z_R)/c_2} - R_{23} \theta_- e^{i\omega(z_2-z_R)/c_2})}, \tag{6}$$

при этом, в силу блочно-диагональной структуры матрицы, жордановых клеток не возникает. Более того, можно показать, что выполняется соотношение $S^Q = \lambda^{Q-1} S$, что позволяет не переходить в базис собственных векторов, а переписать (5) в форме

$$C_{2k} = \lambda^{k-1} S C_0 + \sum_{j=0}^{k-2} \lambda^j S (A+I)F + (A+I)F. \tag{7}$$

Данная последовательность сходится тогда и только тогда, когда $|\lambda| < 1$, при этом пределом является

$$C_{2k} \rightarrow \left(\frac{1}{1-\lambda} S + I \right) (A+I)F. \tag{8}$$

Из этого соотношения следует, что если правая часть F не принадлежит ядру полученного оператора, то решение, полученное с помощью метода декомпозиции области, будет содержать неустранимую погрешность, определяемую формулой (8).

Несложно заметить, что решение задачи (2) сходится к решению следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2(z)} u_L + \frac{d^2 u_L}{dz^2} &= f_L(z), & \frac{\omega^2}{c^2(z)} u_R + \frac{d^2 u_R}{dz^2} &= f_R(z), \\ \frac{du_L}{dz} + \frac{i\omega}{c(z)} u_L &= 0 \Big|_{z=0}, & l_R[u_R] - l_L[u_L] &= 0 \Big|_{z=z_R}, \\ r_L[u_L] - r_R[u_R] &= 0 \Big|_{z=z_L}, & \frac{du_R}{dz} - \frac{i\omega}{c(z)} u_R &= 0 \Big|_{z=H}, \\ z &\in [0, z_L], & z &\in [z_R, H], \end{aligned} \quad (9)$$

при этом решения u_L и u_R в перекрытии могут не совпадать, т.е. $u_L(z) \neq u_R(z)$ при $z \in [z_R, z_L]$.

4. Невязка. Выше было показано, что наличие возмущений в условиях согласования при использовании метода декомпозиции области приводит к возникновению неустранимой погрешности, однако в большинстве случаев не нарушает сходимости. При этом решения в перекрытии не обязаны совпадать, поэтому в данном разделе рассматривается невязка.

Подставляя решение (2), вычисленное на N -й итерации, в систему (9) и вычитая правую часть системы (9), получим

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2(z)} u_L^N + \frac{d^2 u_L^N}{dz^2} - f_L(z) &= 0, & \frac{\omega^2}{c^2(z)} u_R^N + \frac{d^2 u_R^N}{dz^2} - f_R(z) &= 0, \\ \frac{du_L^N}{dz} + \frac{i\omega}{c(z)} u_L^N \Big|_{z=0} &= 0, & l_R[u_R^N] - l_L[u_L^N] \Big|_{z=z_R} &= q_R^N, \\ r_L[u_L^N] - r_R[u_R^N] \Big|_{z=z_L} &= q_L^N, & \frac{du_R^N}{dz} - \frac{i\omega}{c(z)} u_R^N \Big|_{z=H} &= 0, \\ z &\in [0, z_L], & z &\in [z_R, H]. \end{aligned}$$

Невязка отлична от нуля только для уравнений, содержащих условия согласования, при этом она определяется следующим образом:

$$q_L^N = r_R[u_R^{N-1}] - r_R[u_R^N] \Big|_{z=z_L}, \quad q_R^N = l_L[u_L^{N-1}] - l_L[u_L^N] \Big|_{z=z_R}.$$

В силу представлений $u_L^N = u + \varepsilon_L^N$ при $z \in [0, z_L]$ и $u_R^N = u + \varepsilon_R^N$ при $z \in [z_R, H]$, где u — точное решение задачи (1), и в силу линейности операторов r_R и l_L , можно записать

$$q_L^N = r_R[\varepsilon_R^{N-1} - \varepsilon_R^N] \Big|_{z=z_L}, \quad q_R^N = l_L[\varepsilon_L^{N-1} - \varepsilon_L^N] \Big|_{z=z_R}. \quad (10)$$

Из явных формул для представления погрешности (7) следует сходимость невязки к нулю при $N \rightarrow \infty$.

5. Численные эксперименты.

5.1. Ошибка аппроксимации производных. Самым простым и показательным примером влияния ошибки аппроксимации условий передачи на сходимость метода декомпозиции области является ошибка, связанная с аппроксимацией производных конечно-разностными операторами. Рассматривалась задача (1) в области $z \in [0, 1]$; скорость — кусочно-постоянная: $c(z) = 1$ при $z < 1/3$ и $c(z) = 0.3$ при $z > 1/3$; частота $\omega = 2\pi \times 5$. Для аппроксимации уравнения Гельмгольца внутри расчетной области использовалась схема второго порядка с шагом $1/300$, т.е. дискретизация составляла 20 точек на минимальную длину волны. Источник располагался в точке $z = 1/6$. В качестве точного решения выбрано решение конечно-разностной задачи, полученное без использования метода декомпозиции области, т.е. в качестве невозмущенного оператора использовался конечно-разностный оператор, что позволяет выделять только ошибки, связанные с возмущением условий согласования, и исключать влияние иных ошибок (например, ошибки аппроксимации уравнения Гельмгольца внутри подобластей).

Для исследования сходимости метода декомпозиции области были проведены две серии расчетов. Первая — с использованием одинаковых операторов аппроксимации первых производных в заданных точках согласования, а именно:

$$\begin{aligned} l_L[v] = l_R[v] &= \frac{\partial v(z_R)}{\partial z} + \frac{i\omega}{c} v(z_R) = \frac{v_{j_R+1} - v_{j_R}}{h} + \frac{i\omega}{c} v_{j_R} + O(h), \\ r_R[v] = r_L[v] &= \frac{\partial v(z_L)}{\partial z} - \frac{i\omega}{c} v(z_L) = \frac{v_{j_L} - v_{j_L-1}}{h} - \frac{i\omega}{c} v_{j_L} + O(h), \end{aligned}$$

где v – сеточная функция, которая может обозначаться как u^L , так и u^R . Индексы j_R и j_L такие, что $z_R = j_R h$ и $z_L = j_L h$. Данный случай соответствует внесению одинаковых возмущений в операторы согласования; как следствие, решение сходится к решению исходной задачи. На рис. 1 приведены графики относительной невязки, вычисляемой по формулам (10) с нормировкой, и погрешности.

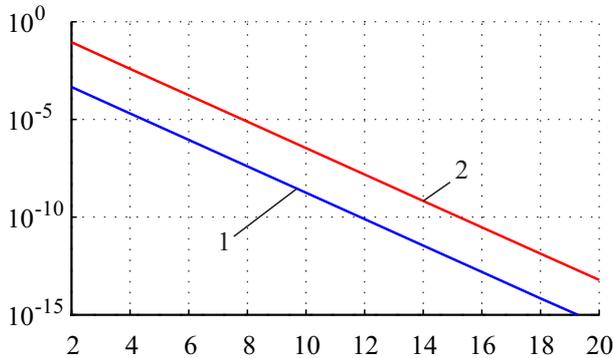


Рис. 1. Невязка (синяя линия 1) и погрешность (красная линия 2) в задаче с одинаковым возмущением условий согласования

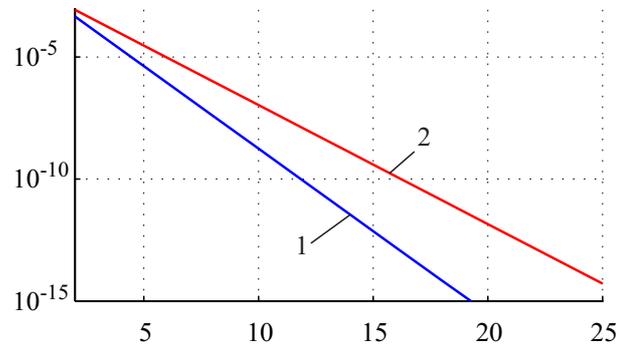


Рис. 2. Невязки для задачи с симметричным (синяя линия 1) и несимметричным (красная линия 2) возмущением условий согласования

Для моделирования несимметричного возмущения операторов согласования использовался наиболее распространенный способ аппроксимации этих операторов – односторонние разности: для левой подобласти – разности назад, а для правой – разности вперед:

$$\begin{aligned}
 l_L[u_L] &= \frac{\partial u_L(z_R)}{\partial z} + \frac{i\omega}{c} u_L(z_R) = \frac{(u_L)_{j_R} - (u_L)_{j_R-1}}{h} + \frac{i\omega}{c} (u_L)_{j_R} + O(h), \\
 l_R[u_R] &= \frac{\partial u_R(z_R)}{\partial z} + \frac{i\omega}{c} u_R(z_R) = \frac{(u_R)_{j_R+1} - (u_R)_{j_R}}{h} + \frac{i\omega}{c} (u_R)_{j_R} + O(h), \\
 r_L[u_L] &= \frac{\partial u_L(z_L)}{\partial z} - \frac{i\omega}{c} u_L(z_L) = \frac{(u_L)_{j_L} - (u_L)_{j_L-1}}{h} - \frac{i\omega}{c} (u_L)_{j_L} + O(h), \\
 r_R[u_R] &= \frac{\partial u_R(z_L)}{\partial z} - \frac{i\omega}{c} u_R(z_L) = \frac{(u_R)_{j_L+1} - (u_R)_{j_L}}{h} - \frac{i\omega}{c} (u_R)_{j_L} + O(h).
 \end{aligned}$$

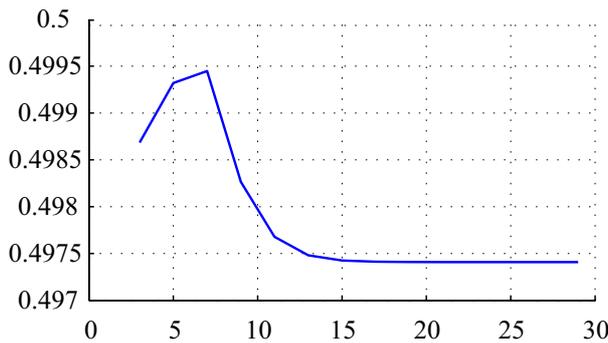


Рис. 3. Погрешность для задачи с несимметричным возмущением условий согласования

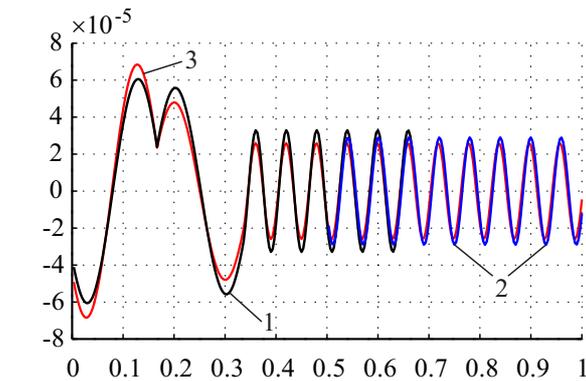


Рис. 4. Решение, рассчитанное с использованием метода декомпозиции области с несимметричным возмущением условий согласования: 1) решение в левой подобласти u_L (черное), 2) в правой подобласти u_R (синее), 3) точное решение (красное)

В этом случае величина и свойства возмущений аналогичны предыдущему примеру, но симметрии нет, в результате правая часть системы (3) не равна нулю. На рис. 2 приведены графики невязок для задачи с симметричным и несимметричным возмущением условий согласования. Видно, что при несимметричном возмущении скорость сходимости меньше, при этом погрешность (рис. 3) стабилизируется на отличном от нуля значении. Дополнительно на рис. 4 приведено решение, рассчитанное с использованием метода

декомпозиции области после 20 итераций, в сравнении с решением исходной задачи, что иллюстрирует наличие неустранимой погрешности.

В рассматриваемом примере погрешности, вносимые в условия согласования, связаны с конечно-разностными аппроксимациями производных. Как следует из приведенных выше формул, аппроксимация производных проводилась с первым порядком. Согласно формулам (6) и (8), неустранимая погрешность линейно зависит от малых возмущений условий согласования. Для проверки этого свойства была проведена серия экспериментов для задачи с несимметричным возмущением на серии вложенных сеток с шагами $1/150, 1/300, \dots, 1/2400$, что соответствовало дискретизациям 10, 20, \dots , 160 точек на минимальную длину волны. Для каждой дискретизации решение рассчитывалось методом декомпозиции области с несимметричными аппроксимациями условий согласования, после чего вычислялась предельная погрешность относительно решения, рассчитанного на той же сетке, но без использования декомпозиции области. На рис. 5 приведена зависимость предельного значения погрешности от шага; видно, что достигается первый порядок сходимости.

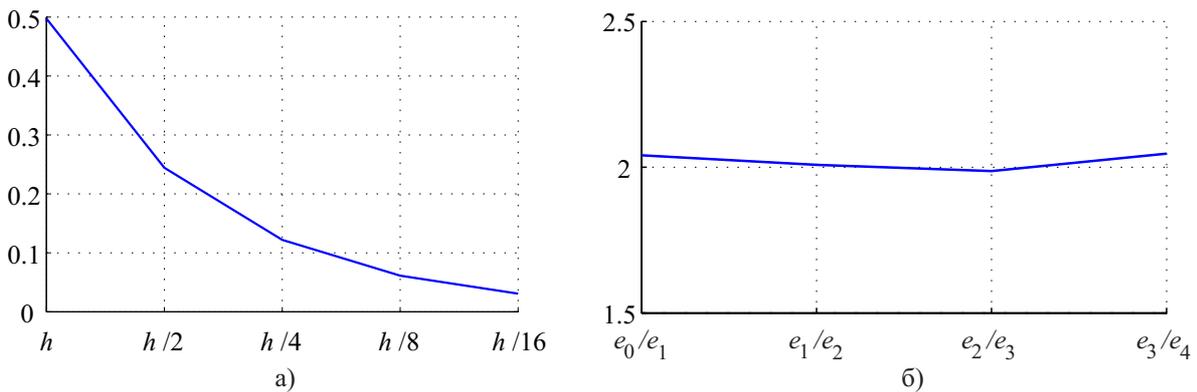


Рис. 5. Предельное значение погрешности решения для задачи с несимметричной аппроксимацией условий согласования в зависимости от шага сетки (а). Отношение ошибок на сетках с шагами, отличающимися в два раза (б)

Как уже отмечалось выше, в рассмотренных примерах возмущения зависят от шага сетки, что приводит к зависимости собственных значений матрицы перехода от шага сетки; как следствие, скорость сходимости также определяется шагом сетки. На рис. 6 приведены графики невязок для задачи с симметричным возмущением условий согласования для разных пространственных дискретизаций (линии 1–5 соответствуют шагам сетки $h = 1/150, h = 1/300, h = 1/600, h = 1/1200, h = 1/2400$). Видно, что скорость сходимости увеличивается с уменьшением шага сетки.

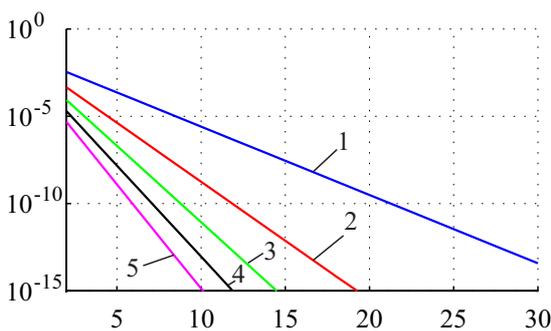


Рис. 6. Невязки для задачи с симметричным возмущением условий согласования в зависимости от номера итерации для различных пространственных дискретизаций

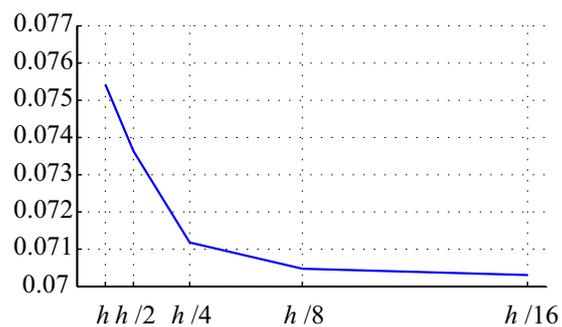


Рис. 7. Предельные значения погрешности для задачи с возмущением, не зависящим от дискретизации, при различных шагах сетки

5.2. Ошибки, не связанные с дискретизацией. Приведенные выше примеры внесения ошибок напрямую связаны с выбором аппроксимации дифференциальных операторов, входящих в условия согласования, и не нарушают (за исключением понижения порядка) сходимости численного решения к решению исходной дифференциальной задачи при уменьшении шага. В данном разделе приведен пример возмущений, не зависящих от дискретизации. В качестве основного примера таких возмущений следует выделить

ошибки аппроксимации оператора Пуанкаре–Стеклова. В частности, в случае двумерной постановки задачи для однородной среды оператор Пуанкаре–Стеклова представляет собой псевдодифференциальный оператор, который формально можно записать в виде $D = \sqrt{\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\omega^2}{c^2}}$. Если в подобласти применяется, например, псевдоспектральный метод [10, 11, 20] решения уравнения Гельмгольца, то возможно использование исходного нелокального оператора. В случае применения сеточных методов (метод конечных разностей [21], метод конечных элементов [4] или разрывный метод Галеркина [5, 14, 19]) оператор Пуанкаре–Стеклова обычно локализуется. При использовании рациональных аппроксимаций этот прием аналогичен тому, как это делается для построения поглощающих граничных условий [15, 16, 23], либо для применения операторов “близкой” задачи (например, DtN для идеально согласованных слоев [6, 24]), либо при комбинировании указанных подходов [3, 17].

Для моделирования эффекта ошибок аппроксимации оператора Пуанкаре–Стеклова был проведен численный эксперимент, аналогичный описанному выше, но со следующими условиями согласования:

$$\begin{aligned} l_L[u_L] &= \frac{\partial u_L(z_R)}{\partial z} + \frac{i\omega}{c} u_L(z_R) = \frac{(u_L)_{j_R+1} - (u_L)_{j_R}}{h} + \frac{i\omega}{c} (u_L)_{j_R} + O(h), \\ l_R[u_R] &= \frac{\partial u_R(z_R)}{\partial z} + \frac{i\omega}{c} u_R(z_R) = \frac{(u_R)_{j_R+1} - (u_R)_{j_R}}{h} + (1 + \theta_2) \frac{i\omega}{c} (u_R)_{j_R} + O(h), \\ r_L[u_L] &= \frac{\partial u_L(z_L)}{\partial z} - \frac{i\omega}{c} u_L(z_L) = \frac{(u_L)_{j_L} - (u_L)_{j_L-1}}{h} - \frac{i\omega}{c} (u_L)_{j_L} + O(h), \\ r_R[u_R] &= \frac{\partial u_R(z_L)}{\partial z} - \frac{i\omega}{c} u_R(z_L) = \frac{(u_R)_{j_L} - (u_R)_{j_L-1}}{h} - (1 + \eta_2) \frac{i\omega}{c} (u_R)_{j_L} + O(h). \end{aligned}$$

Иными словами, предполагается, что в левой подобласти ошибки, соответствующие аппроксимации оператора Пуанкаре–Стеклова, не вносятся, а справа они на уровне 10%. Аналогично предыдущему примеру были проведены вычисления на серии вложенных сеток. Зависимость погрешности от шага сетки приведена на рис. 7. В отличие от предыдущего эксперимента, погрешность не уменьшается с уменьшением шага сетки, поскольку возмущение от шага сетки не зависит.

6. Заключение. В настоящей статье проведен анализ влияния возмущений условий согласования на скорость сходимости метода декомпозиции области в применении к уравнению Гельмгольца. На простом одномерном примере показано, что внесение несимметричных возмущений приводит к тому, что решение, полученное методом декомпозиции области, сходится к решению задачи, отличной от исходного уравнения Гельмгольца. При этом уровень вносимого возмущения влияет не только на скорость сходимости итерационного процесса, но и на величину неустранимой погрешности. В частности, показано, что собственные значения матрицы перехода рассматриваемого итерационного процесса зависят линейно от малых возмущений условий согласования относительно условий, основанных на использовании оператора Пуанкаре–Стеклова. Аналогичный характер поведения наблюдается и у неустранимой погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоносов М.А., Костов К., Решетова Г.В., Соловьев С.А., Чеверда В.А. Организация параллельных вычислений для моделирования сейсмических волн с использованием аддитивного метода Шварца // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 525–535.
2. Вишнеvский Д.М., Лисица В.В., Решетова Г.В. Численное моделирование распространения сейсмических волн в средах с вязкоупругими включениями // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 155–165.
3. Asvadurov S., Druskin V., Guddati M.N., Knizhnerman L. On optimal finite-difference approximation of PML // SIAM J. Numer. Anal. 2003. **41**, N 1. 287–305.
4. Babuška I., Strouboulis T., Gangaraj S.K., Upadhyay C.S. Pollution error in the h -version of the finite element method and the local quality of the recovered derivatives // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1997. **140**, N 1–2. 1–37.
5. Baldassari C., Barucq H., Calandra H., Diaz J. Numerical performances of a hybrid local-time stepping strategy applied to the reverse time migration // Geophysical Prospecting. 2011. **59**, N 5. 907–919.
6. Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // J. Comput. Phys. 1994. **114**, N 2. 185–200.
7. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity: an introduction. New York: Academic, 1971.
8. Collino F., Ghanemi S., Joly P. Domain decomposition method for harmonic wave propagation: A general presentation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2000. **184**, N 2–4. 171–211.
9. Engquist B., Ying L. Fast algorithms for high frequency wave propagation // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Vol. 83. Heidelberg: Springer, 2012. 127–161.

10. *Fornberg B.* The pseudospectral method: Comparisons with finite differences for the elastic wave equation // *Geophysics*. 1987. **52**, N 4. 483–501.
11. *Fornberg B.* The pseudospectral method: Accurate representation of interfaces in elastic wave calculations // *Geophysics*. 1988. **53**, N 5. 625–637.
12. *Gander M.J., Halpern L., Magoulès F.* An optimized Schwarz method with two-sided Robin transmission conditions for the Helmholtz equation // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2007. **55**, N 2. 163–175.
13. *Gander M.J., Halpern L., Nataf F.* Optimal Schwarz waveform relaxation for the one dimensional wave equation // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2003. **41**, N 5. 1643–1681.
14. *Grote M.J., Schneebeli A., Schötzau D.* Discontinuous Galerkin finite element method for the wave equation // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2006. **44**, N 6. 2408–2431.
15. *Hagstrom T., Lau S.* Radiation boundary conditions for Maxwell's equations: A review of accurate time-domain formulations // *J. Comput. Math.* 2007. **25**, N 3. 305–336.
16. *Hagstrom T., Givoli D., Rabinovich D., Bielak J.* The double absorbing boundary method // *Journal of Computational Physics*. 2014. **259**. 220–241.
17. *Lisitsa V.* Optimal discretization of PML for elasticity problems // *Electron. Trans. Numer. Anal.* 2008. **30**. 258–277.
18. *Magoulès F., Putanowicz R.* Optimal convergence of non-overlapping Schwarz methods for the Helmholtz equation // *Journal of Computational Acoustics*. 2005. **13**, N 3. 525–545.
19. *Melenk J.M., Parsania A., Sauter S.* General DG-methods for highly indefinite Helmholtz problems // *Journal of Scientific Computing*. 2013. **57**, N 3. 536–581.
20. *Neklyudov D., Silvestrov I., Tcheverda V.* A Helmholtz iterative solver with semianalytical preconditioner for the frequency-domain full-waveform inversion // *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2010*. Denver, 2010. 1070–1074 (doi: 10.1190/1.3513031).
21. *Plessix R.-É.* Three-dimensional frequency-domain full-waveform inversion with an iterative solver // *Geophysics*. 2009. **74**, N 6. 149–157.
22. *Pradhan D., Shalini B., Nataraj N., Pani A.K.* A Robin-type non-overlapping domain decomposition procedure for second order elliptic problems // *Advances in Computational Mathematics*. 2011. **34**, N 4. 339–368.
23. *Rabinovich D., Givoli D., Bécache E.* Comparison of high-order absorbing boundary conditions and perfectly matched layers in the frequency domain // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2010. **26**, N 10. 1351–1369.
24. *Stolk C.C.* A rapidly converging domain decomposition method for the Helmholtz equation // *Journal of Computational Physics*. 2013. **241**. 240–252.
25. *Vion A., Geuzaine C.* Double sweep preconditioner for optimized Schwarz methods applied to the Helmholtz problem // *Journal of Computational Physics*. 2014. **266**. 171–190.
26. *Virieux J., Calandra H., Plessix R.-É.* A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging // *Geophysical Prospecting*. 2011. **59**, N 5. 794–813.
27. *Virieux J., Operto S., Ben-Hadj-Ali H., Brossier R., Etienne V., Sourbier F., Giraud L., Haidar A.* Seismic wave modeling for seismic imaging // *The Leading Edge*. 2009. **28**, N 5. 538–544.
28. *White R.E.* The accuracy of estimating Q from seismic data // *Geophysics*. 1992. **57**, N 11. 1508–1511.

Поступила в редакцию
15.07.2014

Influence of Perturbations in Transmission Conditions on the Convergence of the Domain Decomposition Method for the Helmholtz Equation

A. F. Zaitseva¹ and V. V. Lisitsa²

¹ *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Koptyug prospekt 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Engineer, e-mail: zaf1990@mail.ru*

² *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Koptyug prospekt 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Head of Laboratory, e-mail: lisitsavv@ipgg.sbras.ru*

Received July 15, 2014

Abstract: The domain decomposition is a widely used technique applied in parallel iterative solvers of the Helmholtz equation with the convergence rate controlled by the quality of transmission conditions. The optimal conditions are those based on the Dirichlet-to-Neumann map. However, if grid-based numerical methods are used to solve the Helmholtz equation, this map needs to be localized, which induces artificial grid-independent perturbations in the transmission conditions. In this paper it is proved that if the perturbations

are nonsymmetric, i.e. different errors are induced in the adjoint subdomains, then the domain decomposition method converges to a solution of a problem differing from the original one. In other words, there exists an irreducible error.

Keywords: domain decomposition method, Helmholtz equation, Dirichlet-to-Neumann map, finite difference method, method of small perturbations, convergence of iterative processes

References

1. M. A. Belonosov, K. Kostov, G. V. Reshetova, et al., "Parallel Computations for the Simulation of Seismic Waves on the Basis of the Additive Schwartz Method," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 525–535 (2012).
2. D. M. Vishnevsky, V. V. Lisitsa, and G. V. Reshetova, "Numerical Simulation of Seismic Wave Propagation in Media with Viscoelastic Intrusions," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 155–165 (2013).
3. S. Asvadurov, V. Druskin, M. N. Guddati, and L. Knizhnerman, "On Optimal Finite-Difference Approximation of PML," *SIAM J. Numer. Anal.* **41** (1), 287–305 (2003).
4. I. Babuška, T. Strouboulis, S. K. Gangaraj, and C. S. Upadhyay, "Pollution Error in the h -Version of the Finite Element Method and the Local Quality of the Recovered Derivatives," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **140** (1–2), 1–37 (1997).
5. C. Baldassari, H. Barucq, H. Calandra, and J. Diaz, "Numerical Performances of a Hybrid Local-Time Stepping Strategy Applied to the Reverse Time Migration," *Geophys. Prospect.* **59** (5), 907–919 (2011).
6. J.-P. Berenger, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves," *J. Comput. Phys.* **114** (2), 185–200 (1994).
7. R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity: An Introduction* (Academic, New York, 1971).
8. F. Collino, S. Ghanemi, and P. Joly, "Domain Decomposition Method for Harmonic Wave Propagation: A General Presentation," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **184** (2–4), 171–211 (2000).
9. B. Engquist and L. Ying, "Fast Algorithms for High Frequency Wave Propagation," in *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* (Springer, Heidelberg, 2012), Vol. 83, pp. 127–161.
10. B. Fornberg, "The Pseudospectral Method: Comparisons with Finite Differences for the Elastic Wave Equation," *Geophys.* **52** (4), 483–501 (1987).
11. B. Fornberg, "The Pseudospectral Method: Accurate Representation of Interfaces in Elastic Wave Calculations," *Geophys.* **53** (5), 625–637 (1988).
12. M. J. Gander, L. Halpern, and F. Magoulès, "An Optimized Schwarz Method with Two-Sided Robin Transmission Conditions for the Helmholtz Equation," *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **55** (2), 163–175 (2007).
13. M. J. Gander, L. Halpern, and F. Nataf, "Optimal Schwarz Waveform Relaxation for the One-Dimensional Wave Equation," *SIAM J. Numer. Anal.* **41** (5), 1643–1681 (2003).
14. M. J. Grote, A. Schneebeli, and D. Schötzau, "Discontinuous Galerkin Finite Element Method for the Wave Equation," *SIAM J. Numer. Anal.* **44** (6), 2408–2431 (2006).
15. T. Hagstrom and S. Lau, "Radiation Boundary Conditions for Maxwell's Equations: A Review of Accurate Time-Domain Formulations," *J. Comput. Math.* **25** (3), 305–336 (2007).
16. T. Hagstrom, D. Givoli, D. Rabinovich, and J. Bielak, "The Double Absorbing Boundary Method," *J. Comput. Phys.* **259**, 220–241 (2014).
17. V. Lisitsa, "Optimal Discretization of PML for Elasticity Problems," *Electron. Trans. Numer. Anal.* **30**, 258–277 (2008).
18. F. Magoulès and R. Putanowicz, "Optimal Convergence of Non-Overlapping Schwarz Methods for the Helmholtz Equation," *J. Comput. Acoust.* **13** (3), 525–545 (2005).
19. J. M. Melenk, A. Parsania, and S. Sauter, "General DG-Methods for Highly Indefinite Helmholtz Problems," *J. Sci. Comput.* **57** (3), 536–581 (2013).
20. D. Neklyudov, I. Silvestrov, and V. Tcheverda, "A Helmholtz Iterative Solver with Semianalytical Preconditioner for the Frequency-Domain Full-Waveform Inversion," in *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, pp. 1070–1074 (2010). doi: 10.1190/1.3513031
21. R.-É. Plessix, "Three-Dimensional Frequency-Domain Full-Waveform Inversion with an Iterative Solver," *Geophys.* **74** (6), 149–157 (2009).
22. D. Pradhan, B. Shalini, N. Nataraj, and A. K. Pani, "A Robin-Type Non-Overlapping Domain Decomposition Procedure for Second Order Elliptic Problems," *Adv. Comput. Math.* **34** (4), 339–368 (2011).
23. D. Rabinovich, D. Givoli, and E. Bécache, "Comparison of High-Order Absorbing Boundary Conditions and Perfectly Matched Layers in the Frequency Domain," *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Eng.* **26** (10), 1351–1369 (2010).

24. C. C. Stolk, "A Rapidly Converging Domain Decomposition Method for the Helmholtz Equation," *J. Comput. Phys.* **241**, 240–252 (2013).
25. A. Vion and C. Geuzaine, "Double Sweep Preconditioner for Optimized Schwarz Methods Applied to the Helmholtz Problem," *J. Comput. Phys.* **266**, 171–190 (2014).
26. J. Virieux, H. Calandra, and R.-É. Plessix, "A Review of the Spectral, Pseudo-Spectral, Finite-Difference and Finite-Element Modelling Techniques for Geophysical Imaging," *Geophys. Prospect.* **59** (5), 794–813 (2011).
27. J. Virieux, S. Operto, H. Ben-Hadj-Ali, et al., "Seismic Wave Modeling for Seismic Imaging," *The Leading Edge* **28** (5), 538–544 (2009).
28. R. E. White, "The Accuracy of Estimating Q from Seismic Data," *Geophys.* **57** (11), 1508–1511 (1992).