УДК 517.958; 519.632.8

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. А. Морозов[1], А. Н. Марковский[2], В. Г. Лежнев[3]

Предложен алгоритм регуляризации обратной задачи теплопроводности, опирающийся на метод Фурье. В отличие от многих алгоритмов, предлагаемый алгоритм не увеличивает порядок дифференциального уравнения. Доказана корректность регуляризационной задачи и получены оценки решения. Сформулирована задача другого типа, состоящая в определении таких источников, что решение полученной краевой задачи асимптотически удовлетворяет финальному распределению. Эта предельная задача может рассматриваться как естественная альтернатива обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности, некорректные задачи, регуляризация, теплопроводность, проекционный алгоритм, полные системы потенциалов.

1. Задача обратной теплопроводности. В ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $x = (x_1, \dots, x_n)$, с достаточно гладкой границей $\partial Q = S$ рассматривается следующая задача обратной теплопроводности:

$$u_t = \Delta u(x,t), \quad x \in Q, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$u\big|_S = \varphi(x,t), \tag{2}$$

$$u\big|_{t=T} = y(x), \quad x \in Q, \tag{3}$$

где $y(x) \in L_2(Q)$ — заданная финальная функция. Требуется найти начальное распределение $u(x,0)$.

Задача (1)–(3) восходит к проблеме реликтовой температуры Земли, к задачам ретроспективной диффузии, примыкает к классу задач об управлении температурой и имеет различные технические приложения. Сформулированная обратная эволюционная задача является некорректной. Для исследования и решения таких задач разрабатывались различные методы и алгоритмы [1–6], в [19] излагается проекционный алгоритм разложения по решениям прямой задачи.

Одним из первых методов решения обратной задачи теплопроводности был метод квазиобращения [7]. В уравнение дополнительно вводилось слагаемое с бигармоническим оператором $\delta\Delta^2$, $0 < \delta \ll 1$, а также дополнительное граничное условие. А именно, задача (1)–(3) заменялась следующей краевой задачей более высокого порядка:

$$v_t - \Delta v - \delta\Delta^2 v = 0, \quad (x,t) \in Q \times (0,T), \tag{4}$$

$$v\big|_S = \varphi_1(x,t), \quad \Delta v\big|_S = \varphi_2(x,t), \tag{5}$$

$$v\big|_{t=T} = y(x), \quad x \in Q. \tag{6}$$

Можно показать, например, методом Фурье при нулевых краевых условиях, что эта задача корректна. При этом для решения $v(x,0)$ в норме пространства $L_2(Q)$ выполняется оценка [8]

$$\|v(x,0)\| \leqslant \exp\left(\frac{T}{8\delta}\right) \|y(x)\|\,.$$

Выписанная оценка точна, т.е. выполняется для некоторых специального вида функций $y(x)$. Заметим, что эта оценка выполняется и для погрешностей; иными словами, метод квазиобращения может давать весьма низкую точность приближенного решения при определенных входных данных [8].

Известны различные обобщения задач (1)–(3) и (4)–(6) в банаховых пространствах для уравнений с соответствующими операторами [9–13].

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992, Москва; главный науч. сотр., e-mail: morozov@srcc.msu.ru

[2] Кубанский государственный университет, факультет математики и компьютерных наук, ул. Ставропольская, д. 149, 350040, г. Краснодар; доцент, e-mail: mark@kubsu.ru

[3] Кубанский государственный университет, факультет математики и компьютерных наук, ул. Ставропольская, д. 149, 350040, г. Краснодар; профессор, e-mail: lzhnvv@mail.ru

Отметим, что простой проекционный алгоритм решения краевых задач для бигармонического уравнения представлен в [14].

2. Метод упрощенной регуляризации.

2.1. Для приближенного решения задачи (1)–(3) более простой алгоритм дает следующая краевая задача [15]:

$$v_t = \Delta v, \quad (x,t) \in Q \times (0,T), \tag{7}$$

$$v|_S = \varphi(x,t), \tag{8}$$

$$\alpha v(x,0) + v(x,T) = y(x). \tag{9}$$

Здесь α — малый положительный параметр.

Рассмотрим первую спектральную задачу для оператора Лапласа:

$$\Delta w_k(x) = \lambda_k w_k(x)|_Q\,, \quad w_k(x)|_S = 0.$$

Здесь $\lambda_k < 0$, а $w_k(x)$ — ортонормированный базис в $L_2(Q)$ [16].

Для вычисления решения $v(x,t)$ воспользуемся методом Фурье, положив для простоты $\varphi(x,t) = 0$. Пусть

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k w_k(x).$$

Решение $v(x,t)$ будем представлять в виде

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(t) w_k(x).$$

Подставляя это представление формально в дифференциальное уравнение, получим для коэффициентов $Y_k(t)$ следующую двухточечную краевую задачу для уравнения первого порядка:

$$Y_k'(t) = \lambda_k Y_k(t), \quad t \in (0,T),$$

$$\alpha Y_k(0) + Y_k(T) = y_k.$$

Функции $Y_k(t)$ определяются в явном виде. Для решения $v(x,t)$ регуляризационной краевой задачи (7)–(9) получаем

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(t) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k e^{\lambda_k t}}{\alpha + e^{\lambda_k T}}\, w_k(x).$$

Отсюда следует оценка решения $\|v(x,t)\| < \alpha^{-1} \|y(x)\|$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(Q)$. Таким образом, рассматриваемая задача корректна.

Имеет место также оценка

$$\|v(x,T) - y(x)\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y_k e^{\lambda_k T}}{\alpha + e^{\lambda_k T}} - y_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha + e^{\lambda_k T}} \right)^2.$$

2.2. Рассмотрим теперь приближенное решение обратной задачи (1)–(3). Обозначим через $y^n(x)$ аппроксимацию финальной функции $y(x)$:

$$y^n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k w_k(x).$$

Тогда решение $v^n(x,t)$ задачи (4)–(6) будет иметь вид

$$v^n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(t) w_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k e^{\lambda_k t}}{\alpha + e^{\lambda_k T}}\, w_k(x).$$

Для нормы разности выполняется оценка

$$\|v^n(x,T) - y^n(x)\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha + e^{\lambda_k T}} \right)^2,$$

откуда при $\alpha \to 0$ получаем

$$\|v^n(x,T) - y^n(x)\| \leqslant \frac{\alpha}{\alpha + e^{\lambda_n T}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2} = O(\alpha).$$

Следовательно, функция $v^n(x,T)$ аппроксимирует финальную функцию $y^n(x)$.

3. Предельная задача для задачи (1)–(3).

3.1. В области $Q \times (0,T) \ni (x,t)$ рассмотрим обратную задачу теплопроводности

$$u_t = \Delta u(x,t), \quad u\big|_{\partial Q} = 0, \quad u\big|_{t=T} = y(x),$$

об определении начального распределения

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \tag{10}$$

где задана финальная функция

$$y(x) = u(x,T).$$

Сформулированная задача не вполне естественна, так как решение прямой задачи убывает к нулю экспоненциально при увеличении t [16]. Это обстоятельство порождает плохую обусловленность задачи — малым изменениям финальной функции $y(x)$ могут соответствовать большие изменения в начальном распределении $u_0(x)$.

Более естественной представляется следующая предельная задача теплопроводности: определить граничную функцию $\varphi(x)$ и распределение источников $f(x)$ так, чтобы для решения задачи

$$v_t = \Delta v(x,t) + f(x), \quad x \in Q, \tag{11}$$

$$v\big|_{\partial Q} = \varphi(x), \tag{12}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \tag{13}$$

выполнялось при $t \to \infty$ предельное соотношение

$$v(x,t) \to y(x), \tag{14}$$

где $y(x)$ — заданное финальное распределение. Управление источниками в задаче теплопроводности рассматривалось также в работе [17].

3.2. Если функция $y(x)$ гармоническая и задано ее граничное значение $y_S(x)$:

$$\Delta y(x)\big|_Q = 0, \quad y(x)\big|_{\partial Q} = y_S(x),$$

то в предельной задаче (11)–(13) следует взять функции $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = y_S(x)$. Действительно, функция

$$z(x,t) = v(x,t) - y(x)$$

является решением задачи

$$z_t = \Delta z(x,t), \quad x \in Q, \quad t > 0,$$

$$z\big|_{\partial Q} = 0,$$

$$z\big|_{t=0} = -y(x),$$

и стремится к нулю экспоненциально при $t \to \infty$, поскольку

$$\|z(x,t)\| \leqslant \|y(x)\|\, e^{\lambda_1 t}, \quad t \geqslant 0,$$

где λ_1 — первое наименьшее по модулю собственное значение первой спектральной задачи для оператора Лапласа в области Q [16]; иными словами, $v(x,t) \to y(x)$ при $t \to \infty$.

3.3. Если функция $y(x)$ не гармоническая, то используем разложение пространства $L_2(Q)$ в прямую сумму (разложение Новикова [18, 19]):

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q),$$

где $G(Q)$ — подпространство гармонических функций и $N(Q)$ — его ортогональное дополнение.

Согласно разложению Новикова, для любой функции $y \in L_2(Q)$ имеем

$$y(x) = g(x) + h(x),$$

где $g(x)$ — гармоническая функция, а $h(x) \in N(Q)$. Алгоритм этого разложения методом базисных потенциалов представлен в [19]. Очевидно, функция $h(x)$ является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta h(x) = \Delta y(x), \quad x \in Q,$$

с граничным условием

$$h|_{\partial Q} = (y - g)|_{\partial Q}\,.$$

Теперь в задаче (11)–(13) возьмем $f(x) = \Delta h(x)$ и $\varphi(x) = y(x)|_{\partial Q}$. Функция $y(x) = g(x) + h(x)$ является решением уравнения

$$\Delta y(x)|_Q = f(x).$$

Следовательно, функция

$$z(x,t) = v(x,t) - y(x)$$

и в этом случае является решением задачи

$$z_t = \Delta z(x,t), \quad x \in Q, \quad t > 0,$$

$$z|_{\partial Q} = 0,$$

$$z|_{t=0} = -y(x),$$

и стремится к нулю при $t \to \infty$ в силу оценки

$$\|z(x,t)\| \leqslant \|y(x)\|\, e^{\lambda_1 t}.$$

В частности, если область Q представляет собой единичный куб (или единичный квадрат в $\mathbb{R}^2$), то $\lambda_1 = -3\pi^2$ (или $\lambda_1 = -2\pi^2$). Для областей, вложенных в первоначальную область, модуль $|\lambda_1|$ увеличивается по сравнению с первоначальным значением $|\lambda_1|$ [16].

Работа выполнена в рамках проекта 2.1.1/1292 целевой программы Минобрнауки РФ и поддержана РФФИ (коды проектов 11–01–96511-а и 13–01–00096-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Showalter R.E.* The final value problem for evolution equations // J. Math. Anal. Appl. 1974. **47**, N 3. 563–572.
3. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
4. *Weber C.F.* Analysis and solution of the ill-posed inverse heat conduction problem // Int. J. Heat Mass Transfer. 1981. **24**, N 11. 1783–1792.
5. *Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu.* Iterative methods for approximate solution of inverse problems. Dordrecht: Springer, 2004.
6. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer, 2006.
7. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
8. *Морозов В.А.* О реставрации изображений с гарантированной точностью // Численный анализ на ФОРТРАНе. Методы и алгоритмы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. 46–65.
9. *Ames K.A., Hughes R.J.* Structural stability for ill-posed problems in Banach space // Semigroup Forum. 2005. **70**, N 1. 127–145.
10. *Piskarev S., Shaw S.-Y., Van Casteren J.A.* Approximation of ill-posed evolution problems and discretization of C-semigroups // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2002. **10**, N 5. 513–546.
11. *Huang Y., Zheng Q.* Regularization for ill-posed Cauchy problems associated with generators of analytic semigroups // J. Diff. Eqs. 2004. **203**, N 1. 38–54.
12. *Пискарев С.И.* Оценки скорости сходимости при решении некорректных задач для эволюционных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. **51**, № 3. 676–687.
13. *Tuan N.H., Trong D.D., Quan P.H.* Note on a new regularized method for a ill-posed heat problem // Appl. Comput. Math. 2012. **11**, N 1. 37–45.
14. *Лежнев В.Г., Марковский А.Н.* Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // Вестн. Самарского гос. ун-та. 2008. № 1. 127–139.

15. *Лежнев В.Г.* Лабораторный курс по численной математической физике. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 1989.
16. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
17. *Морозов В.А, Лежнев В.Г., Токарев Н.М.* Управление источниками в задаче теплопроводности // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 77–81.
18. *Новиков П.С.* Об единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. 1938. **XVIII**, № 3. 165–168.
19. *Лежнев А.В., Лежнев В.Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2009.

Поступила в редакцию
24.04.2014

To the Inverse Heat Conduction Problem

V. A. Morozov [1], A. N. Markovskiy [2], and V. G. Lezhnev [3]

[1] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Principal Scientist, e-mail: morozov@srcc.msu.ru*

[2] *Kuban State University, Faculty of Mathematics and Computer Sciences; ulitsa Stavropol'skaya 149, Krasnodar, 350040, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: mark@kubsu.ru*

[3] *Kuban State University, Faculty of Mathematics and Computer Sciences; ulitsa Stavropol'skaya 149, Krasnodar, 350040, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: lzhnvv@mail.ru*

Received April 24, 2014

Abstract: An algorithm for the regularization of the inverse heat conduction problem is proposed on the basis of the Fourier method. Unlike many other algorithms, the proposed algorithm does not increase the order of the differential equation. The correctness of the regularized problem is proved and its solution is estimated. A problem of another type is formulated; this problem consists in the determination of sources such that the solution of the resulting boundary value problem asymptotically satisfies the final distribution. This limit problem can be considered as a natural alternative for the inverse problem.

Keywords: inverse heat conduction problem, ill-posed problems, regularization, heat conduction, projection algorithm, complete systems of potentials.

References

1. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
2. R. E. Showalter, "The Final Value Problem for Evolution Equations," J. Math. Anal. Appl. **47** (3), 563–572 (1974).
3. V. A. Morozov, *Regularization Methods for Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1987; CRC Press, Boca Raton, 1993).
4. C. F. Weber, "Analysis and Solution of the Ill-Posed Inverse Heat Conduction Problem," Int. J. Heat Mass Transfer **24** (11), 1783–1792 (1981).
5. A. B. Bakushinsky and M. Yu. Kokurin, *Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems* (Springer, Dordrecht, 2004).
6. V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations* (Springer, Berlin, 2006).
7. R. Lattés and J.-L. Lions, *The Method of Quasi-Reversibility: Applications to Partial Differential Equations* (American Elsevier Pub. Co., New York, 1969; Mir, Moscow, 1970).
8. V. A. Morozov, "On the Image Restoration with a Guaranteed Accuracy," in *Numerical Analysis in Fortran. Methods and Algorithms* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1979), pp. 46–65.
9. K. A. Ames and R. J. Hughes, "Structural Stability for Ill-Posed Problems in Banach Space," Semigroup Forum **70** (1), 127–145 (2005).
10. S. Piskarev, S.-Y. Shaw, and J. A. Van Casteren, "Approximation of Ill-Posed Evolution Problems and Discretization of C-Semigroups," J. Inverse Ill-posed Probl. **10** (5), 513–546 (2002).

11. Y. Huang and Q. Zheng, “Regularization for Ill-Posed Cauchy Problems Associated with Generators of Analytic Semigroups,” J. Diff. Eqs. **203** (1), 38–54 (2004).

12. S. I. Piskarev, “Estimates of Rate of Convergence in the Case of Solution of Ill-Posed Problems for Evolution Equations,” Izv. Akad. Nauk USSR, Ser. Mat. **51** (3), 676–687 (1987) [Math. USSR-Izv. **30** (3), 639–651 (1988)].

13. N. H. Tuan, D. D. Trong, and P. H. Quan, “Note on a New Regularized Method for a Ill-Posed Heat Problem,” Appl. Comput. Math. **11** (1), 37–45 (2012).

14. V. G. Lezhnev and A. N. Markovskiy, “The Basic Potential Method for an Inhomogeneous Biharmonic Equation,” Vestn. Samar. Gos. Univ., No. 1, 127–139 (2008).

15. V. G. Lezhnev, *A Laboratory Course in Numerical Mathematical Physics* (Kuban. Gos. Univ., Krasnodar, 1989) [in Russian].

16. V. P. Mikhailov, *Partial Differential Equations* (Nauka, Moscow, 1976; Mir, Moscow, 1978).

17. V. A. Morozov, V. G. Lezhnev, and N. M. Tokarev, “The Source Control in the Problem of Heat Conduction,” Vychisl. Metody Programm. **14**, 77–81 (2013).

18. P. S. Novikov, “On the Uniqueness of the Solution to the Inverse Potential Problem,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **XVIII** (3), 165–168 (1938).

19. V. G. Lezhnev, *The Basic Potential Method in the Problems of Mathematical Physics and Hydrodynamics* (Kuban. Gos. Univ., Krasnodar, 2009) [in Russian].