

УДК 517.988.68

НОВЫЕ АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Б. Бакушинский¹, А. С. Леонов²

Дается краткий обзор полученных к настоящему времени апостериорных оценок погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений. К их числу относятся апостериорные оценки на некоторых дескриптивных расширяющихся компактах (А. Г. Ягола и др.), оценки с помощью апостериорных значений невязки и регуляризирующего функционала (А. С. Леонов), оценки, учитывающие более детальные априорные предположения о решении уравнения (А. Б. Бакушинский и др.), оценки точности решений коэффициентных обратных задач для уравнений в частных производных, использующие специфику метода регуляризации А. Н. Тихонова и адаптивного метода конечных элементов (L. Veilina, M. Klibaov и др.). Предлагается новый способ получения апостериорных оценок точности приближенных решений, вычисляемых с помощью итерационных процедур для нерегулярных операторных уравнений. Оценки используют другие апостериорные функционалы от приближенных решений, чем в указанных работах. В этом способе можно отслеживать эволюцию апостериорных оценок в процессе решения уравнения, что позволяет делать выводы о сходимости итераций и вводить коррективы в сами итерационные процедуры в процессе их выполнения.

Ключевые слова: нерегулярные операторные уравнения, апостериорные оценки точности, итеративно регуляризованные процессы типа Гаусса–Ньютона.

1. Введение. Апостериорные оценки погрешности приближенных решений операторных уравнений представляют не только теоретический интерес, но и могут быть использованы в практических приложениях. Эти оценки делаются на основе информации, полученной в процессе реализации алгоритма решения, при некоторых дополнительных априорных предположениях. Сравнительно недавно было обращено внимание на то, что такие оценки возможны и для нерегулярных (некорректных) операторных уравнений. Первой работой, специально посвященной апостериорным оценкам погрешности в нерегулярном (некорректном) случае, по-видимому, была работа [1], в которой предлагался один из возможных подходов к получению таких оценок. Этот подход получил дальнейшее развитие в работах [2–4], в которых предложен метод расширяющихся компактов и даны апостериорные оценки точности на некоторых дескриптивных компактах. Другой подход к апостериорной оценке погрешности предложен в [5–9]. Наиболее полно результаты этого направления исследований отражены в недавней работе [8]. Кратко опишем суть этого подхода.

Предметом интереса является операторное уравнение

$$F(x) = 0. \quad (1)$$

Оператор F предполагается действующим в паре нормированных пространств. Предполагается также единственность решения уравнения (1). Пусть в процессе поиска приближенного решения оператор уравнения (1) известен с погрешностью, характеризуемой числовым параметром η , и приближенное решение z_η уравнения (1) получено с помощью некоторого регуляризирующего алгоритма. Используя значения функционалов невязки и регуляризатора на элементе z_η , можно описать множество, стягивающееся при $\eta \rightarrow 0$ к точному решению уравнения (1). Диаметр этого множества и будет искомым апостериорной оценкой погрешности.

В работах [10, 11] предложен метод построения апостериорных оценок точности для регуляризованных решений общего вида, опирающийся на некоторые более детальные априорные предположения о решении уравнения (1) по сравнению с подходами [1, 2, 8]. Однако главной апостериорной информацией

¹ Институт системного анализа РАН, просп. 60-летия Октября, 9, 117312, Москва; главный науч. сотр., e-mail: bakush@isa.ru

² Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), физико-технический факультет, Каширское ш., 31, 115409, Москва; профессор, e-mail: asleonov@mephi.ru

там является также величина невязки, которая получается при подстановке полученного приближенного решения в оператор, аппроксимирующий F в процессе приближенного решения.

Представляется интересным также направление, развитое в работах [12–15], в которых получены апостериорные оценки точности решений коэффициентных обратных задач для уравнений в частных производных. При этом авторы используют специфику применяемого ими метода регуляризации А. Н. Тихонова, который реализован с помощью адаптивного метода конечных элементов.

Апостериорные оценки из работ [1, 2, 5, 10] характерны тем, что они даются для финального решения некорректной задачи. Вместе с тем, интересно отслеживать эволюцию таких оценок в процессе решения уравнения (1) итерационными методами. Это позволяет делать выводы о сходимости процесса и вводить коррективы в сам процесс при его реализации. Именно на это направлена предлагаемая работа, примыкающая к направлению [10, 11] получения апостериорных оценок погрешности. В ней мы предполагаем, что приближенное решение уравнения (1) находится с помощью какого-либо варианта итеративно регуляризованного метода Гаусса–Ньютона [16], а в качестве апостериорной информации вместо нормы невязки используем норму разности между двумя соседними членами итерационной последовательности.

В “классическом” случае регулярного операторного уравнения подобные апостериорные оценки для методов Ньютона и Гаусса–Ньютона используются в вычислительной практике давно, часто без аккуратного формального обоснования. В настоящей статье мы показываем возможность таких оценок и для нерегулярных уравнений. Обсуждается также одна простая адаптивная стратегия проведения и коррекции итераций, которая в некоторых случаях удобна при решении операторных уравнений.

2. Основной теоретический результат. При численном анализе уравнения (1) часто невозможно использовать сам оператор F . Реалистично предположить, что в численных алгоритмах вместо этого оператора используется некоторый оператор Φ , действующий в паре действительных конечномерных евклидовых пространств E_N и E_M , размерности N и M которых, вообще говоря, различны. Мы предполагаем, что оператор Φ в определенном смысле аппроксимирует первоначальный оператор F и включает в себя разнообразные ошибки, связанные с неточным заданием данных в первоначальной задаче (1). Мы предполагаем далее, что оператор Φ (не $F!$) дифференцируем и для его производной Фреше Φ' выполнено условие Липшица

$$\|\Phi'(u) - \Phi'(v)\| \leq M\|u - v\|, \quad u, v \in D. \quad (2)$$

Здесь D — множество априорных ограничений на искомое решение задачи (1). Чтобы избежать не принципиальных технических усложнений, будем предполагать при получении теоретических оценок выполнимость неравенства (2) во всем пространстве E_N . Используем для нахождения приближенного решения уравнения (1) какой-либо из итеративных процессов, описанных в [16–18] и имеющих вид

$$x_{n+1} = \xi_n - \theta[\Phi'^*(x_n)\Phi'(x_n), \alpha_n]\Phi'^*(x_n)\{\Phi(x_n) - \Phi'(x_n)(x_n - \xi_n)\}. \quad (3)$$

При выполнении итераций (3) мы можем вычислять величины различных функционалов, определенных на элементах этой последовательности, в частности и величину

$$\|x_{n+1} - x_n\|. \quad (4)$$

Пусть $x^* = Pz^*$ — образ интересующего нас решения z^* уравнения (1) в пространстве E_N , получаемый с помощью некоторого оператора P . В конкретных ситуациях оператор P удается, как правило, эффективно задать. Нас будет интересовать вопрос: можно ли, зная величину (4), сделать какие-то выводы о близости x_{n+1} к x^* в пространстве E_N , т.е. оценить величину

$$\|x_{n+1} - x^*\|, \quad (5)$$

если известна величина (4). Для дальнейшего анализа потребуются некоторые априорные предположения. Первое из них — выполнение неравенства

$$\|\Phi(Pz^*)\| \leq \delta. \quad (6)$$

Схема оценки величины δ приведена в [10, 11] и базируется на том, что мы можем априорно оценить уклонение $\|Pz^* - z^*\|$.

Порождающая процесс (3) операторная функция θ может быть выбрана различными способами [7]. Ради наглядности мы ограничимся здесь наиболее употребительным на практике вариантом:

$$\theta(\Phi'^*\Phi', \alpha) = (\Phi'^*\Phi' + \alpha)^{-1}. \quad (7)$$

Пусть λ_{\min} — минимальное ненулевое собственное значение конечномерного оператора $\Phi'^* \Phi'$. Стандартным образом из (7) получим

$$\|\theta(\Phi'^* \Phi', \alpha) \Phi'^*\| = \sup \frac{\lambda^{1/2}}{\lambda + \alpha} = \beta.$$

Супремум в правой части формулы (6) берется по спектру оператора $\Phi'^* \Phi'$. Если величина β определяется на текущей итерации, то она будет зависеть еще и от номера итерации n , т.е. $\beta = \beta_n$. Поскольку оператор $\Phi'^*(x_n) \Phi'(x_n)$ конечномерный, мы можем использовать для нахождения его спектра известные алгоритмы SVD-разложения и вычислять числа β_n непосредственно.

При любом выборе управляющего параметра ξ_n в конечномерном случае справедливо разложение

$$x^* - \xi_n = \Phi'^*(x_n)v_n + \Delta_n, \quad \Delta_n \in \text{Ker } \Phi'(x_n), \quad v_n \in E_M. \tag{8}$$

Предположим, что мы знаем оценки норм величин v_n, Δ_n . В работах [16–18] получены базовые соотношения, из которых для рассматриваемого случая непосредственно следует неравенство

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \beta_n M \|x_n - x^*\|^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_n} \|v_n\| + \delta \beta_n + \|\Delta_n\|. \tag{9}$$

Используя неравенство $\|x_n - x^*\| \leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x^*\|$ вместе с (9), получим после элементарных преобразований оценку

$$\|x_{n+1} - x^*\| (1 - 2M\beta_n \|x_{n+1} - x^*\|) \leq 2M\beta_n \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_n} \|v_n\| + \delta \beta_n + \|\Delta_n\|. \tag{10}$$

К сожалению, нетривиальная оценка для $\|x_{n+1} - x^*\|$ в зависимости от оценки величины $\|x_{n+1} - x_n\|$ получается из неравенства (10) лишь при некоторых дополнительных априорных предположениях о “малости” уклонения $\|x_{n+1} - x^*\|$. Однако такая ситуация вполне обычна. Если мы хотим использовать величину $\|x_{n+1} - x_n\|$ для апостериорной оценки нормы $\|x_{n+1} - x^*\|$, то приходится делать дополнительные априорные предположения даже в случае использования метода Ньютона в одномерном случае. В инженерных расчетах часто используется неформальное предположение о том, что $\|x_{n+1} - x^*\|^2 \ll \|x_{n+1} - x^*\|$.

Дополнительное априорное предположение заключается в том, что выполняется неравенство

$$0 < 1 - 2M\beta_n \|x_{n+1} - x^*\| = q_n < 1. \tag{11}$$

Тогда из (10) и (11) получим

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \frac{1}{q_n} \left(2M\beta_n \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_n} \|v_n\| + \delta \beta_n + \|\Delta_n\| \right). \tag{12}$$

Для эффективного использования неравенства (12), кроме выполнения условия (11), нужны еще априорные оценки норм элементов v_n и Δ_n .

Замечание. Теоретически, в некоторых типичных ситуациях можно обойтись и без оценок этих норм. Приведем пример. Предположим, что

$$\text{Ker } \Phi'(x_n) = 0. \tag{13}$$

Условие (13) — эффективно проверяемое апостериорное условие, которое обычно в численных расчетах выполнено. Если оно выполняется, то для получения следующей итеративной точки x_{n+1} в (3) можно положить

$$\alpha_n = 0. \tag{14}$$

Непосредственно проверяется, что тогда x_{n+1} не будет зависеть от выбора ξ_n . Итерация (3) на этом конкретном шаге превращается в стандартный метод Гаусса–Ньютона, и апостериорный анализ погрешности упрощается. Оказывается ненужным априорное условие (8), а оценка (12) принимает вид

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \frac{1}{q_n} (2M\beta_n \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \delta \beta_n). \tag{15}$$

Остается единственное априорное условие существования нетривиальной апостериорной оценки — условие (11). Кроме того, если условие (13) выполнено на n -й итерации, то можно использовать следующую

адаптивную стратегию проведения дальнейших итераций. Пусть из каких-то соображений нам известно, что $\|x_n - x^*\| \leq d_n$. Сделаем из этой точки шаг стандартного метода Гаусса–Ньютона. Так как при этом $\alpha_n = 0$ и $\Delta_n = 0$, то из неравенства (9) получим оценку

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq M\beta_n d_n^2 + \delta\beta_n. \quad (16)$$

Эта оценка позволяет найти допустимые границы величины d_n , при соблюдении которых целесообразно делать следующий итеративный шаг. Например, будем выполнять $(n+1)$ -ю итерацию, если правая часть неравенства (16) строго меньше d_n . В этом случае положим $d_{n+1} = M\beta_n d_n^2 + \delta\beta_n$, сделаем следующий шаг и получим оценку типа (16). Для анализа возможности продолжения процесса используем теперь d_{n+1} , и т.д. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, несложно получить нижнюю границу чисел d_n и оценить наилучшую возможную точность приближений, достигаемую в таком адаптивном процессе.

Подчеркнем еще раз: малость величины (4) не гарантируется без дополнительных априорных условий или без каких-либо нетривиальных оценок величины (5).

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема. Для итерационного процесса (3) с порождающей функцией (7) при выполнении условий (2), (6), (8) и (11) справедлива оценка (12), а при выполнении условий (13), (14), (2), (6) и (11) — соответственно оценка (15).

3. Численные эксперименты. Приведем результаты численных экспериментов по получению апостериорных оценок вида (12) для итерационного процесса (3), (7) при решении различных нелинейных модельных обратных задач. В частности, будет выяснен вопрос о выполнении предположения (11), а также оценен вклад каждого из слагаемых

$$R_1 = \frac{2\beta_n M}{q_n} \|z_n - z_{n+1}\|^2, \quad R_2 = \frac{1}{2q_n} \sqrt{\alpha_n} \|v_n\|, \quad R_3 = \frac{\delta\beta_n}{q_n}, \quad R_4 = \frac{\|\Delta_n\|}{q_n},$$

входящих в правую часть формулы (12). Для всех рассмотренных обратных задач константа Липшица из условия (2) вычислялась непосредственно путем решения экстремальной задачи

$$M = \sup \left\{ \frac{\|\Phi'(u) - \Phi'(v)\|}{\|u - v\|} : u, v \in D \right\}$$

с помощью модулей оптимизации пакета МАТЛАБ. Величины $\beta_n = \sup \left\{ \frac{s}{s^2 + \alpha} : s \in S_n \right\}$ вычислялись непосредственно после нахождения множества сингулярных чисел S_n матрицы $\Phi'^*(x_n)\Phi'(x_n)$ с помощью SVD-разложения. Элементы v_n и Δ_n для известных модельных решений x^* тоже определялись с помощью SVD-разложения из равенства (8).

3.1. Обратная задача гравиметрии. Решалась двумерная задача гравиметрии [19, с. 22], заключающаяся в определении функции $z(s)$ при $t \in [c, d]$ из нелинейного интегрального уравнения

$$F(z) = \int_a^b \ln \frac{(t-s)^2 + H^2}{(t-s)^2 + (z(s)-H)^2} ds - u(t) = 0. \quad (17)$$

Расчеты проводились при $a = -2$, $b = 2$, $c = -7$, $d = 7$, $H = -3$. Точное модельное решение имело следующий вид: $z^*(s) = \left\{ (1-s^2)^2, s \in [-1, 1]; 0, s \notin [-1, 1] \right\}$. Соответствующая функция $u(t)$ вычислялась аналитически. Использовалась следующая конечномерная аппроксимация уравнения (17). Приближенное решение считалось заданным на равномерной сетке по s из 11 точек как вектор x . Затем оно с помощью аппроксимации кубическими сплайнами интерполировалось на равномерной сетке из 31 точки. На этой сетке по переменной s и на равномерной сетке по t из 101 точки аппроксимировался по формуле трапеций интегральный оператор из (17). Функция $u(t)$ на сетке

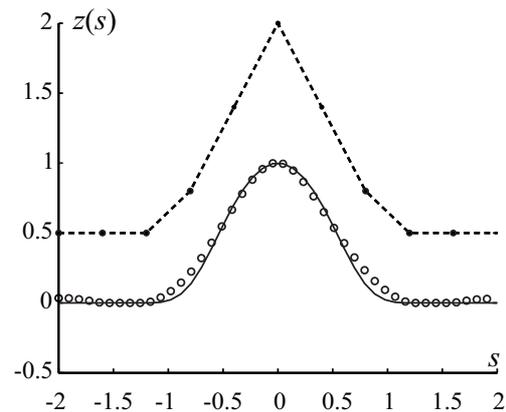


Рис. 1. Точное решение задачи (17) (сплошная линия), начальное приближение процесса (3), (7) (пунктирная линия) и финальное приближенное решение (кружки)

Функция $u(t)$ на сетке

по t возмущалась нормально распределенными случайными числами так, чтобы выполнялось соотношение (6) с $\delta = 0.001$. В итоге этой процедуры получался конечномерный оператор $\Phi(x)$. Для вычисления константы Лишшица использовалась априорная информация о решении: $D = \{z(s) : 0 \leq z(s) \leq 2\}$. Оказалось, что $M = 0.4606$.

Для решения конечномерного операторного уравнения $\Phi(x) = 0$ применялся итерационный процесс (3), (7) при $\xi_n = 0$ и $\alpha_n = 0.1/(n + 1)^5$ с проектированием на множество D . Так как числа q_n в вычислениях периодически оказывались отрицательными, апостериорная оценка (11) находилась с учетом априорного предположения, что $q_n \geq 0.1$, т.е. из условия $q_n = \max\{0.1, 1 - 2M\beta_n\|x_{n+1} - x^*\|\}$, в котором вектор x^* состоит из значений функции $z^*(s)$ на сетке из 11 точек по s . На рис. 1 сплошной линией изображено точное решение задачи (17). Начальное приближение итерационного процесса обозначено точками на пунктирной линии. Приближение, найденное на 42-й итерации, показано кружками. Это решение представляет собой результат сплайновой интерполяции приближенного решения, полученного на сетке из 11 точек, на сетку из 31 точки.

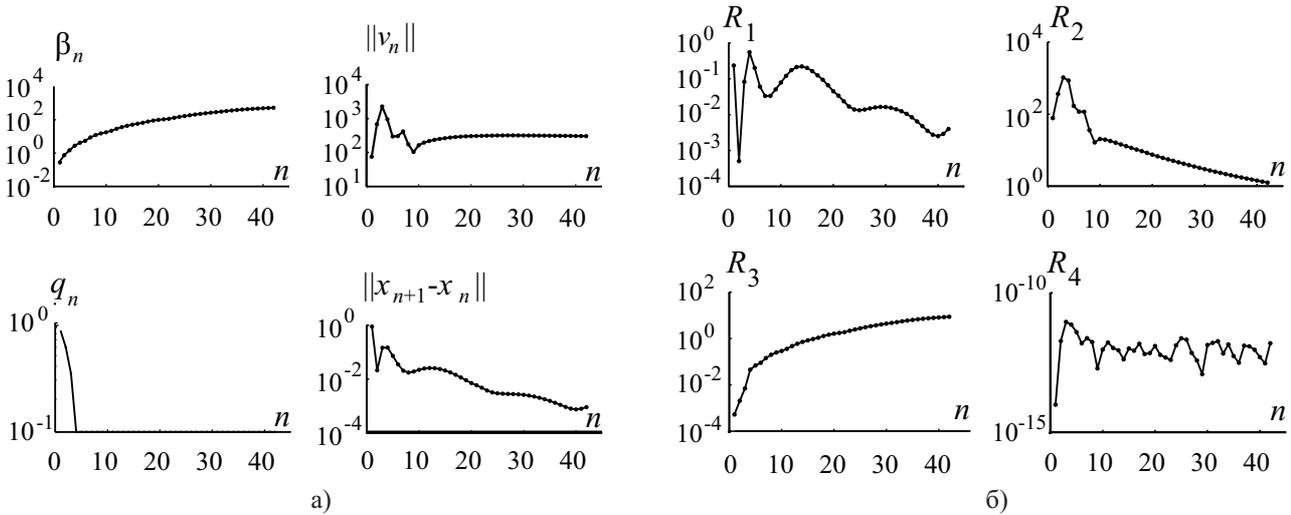


Рис. 2. Изменение величин, входящих в оценку (12), в зависимости от номера итерации (а).
Поведение слагаемых $R_i, i = 1, 2, 3, 4$, оценки (12) (б)

На рис. 2а изображено поведение основных величин, фигурирующих в оценке (12), в зависимости от номера итерации. В частности, можно видеть рост величины β_n , а также стабилизацию величины q_n на уровне 0.1, связанную с нарушением соотношения (11). Отметим относительно большие значения величин β_n и $\|v_n\|$, а также сравнительную “малость” величины $\|z_{n+1} - z_n\|$ на последних итерациях.

Отдельно поведение слагаемых $R_i, i = 1, 2, 3, 4$, оценки (12) показано на рис. 2б. Видно, что основной вклад в оценку на первых итерациях вносит член $R_2 = \frac{1}{2q_n} \sqrt{\alpha_n} \|v_n\|$, а затем его вклад сопоставим со слагаемым $R_3 = \frac{\delta\beta_n}{q_n}$. В этом примере член R_2 не может быть исключен из алгоритма путем применения равенства (14), так как в противном случае алгоритм перестает сходиться. Отметим также незначительное влияние члена $R_4 = \frac{\|\Delta_n\|}{q_n}$. Это связано с практическим равенством $\|\Delta_n\| \approx 0$.

На рис. 3 показана истинная точность $\|x_n - x^*\|$ получаемого на каждой итерации приближенного решения в сравнении с соответствующей апостериорной оценкой точности (12). Последняя оказывается достаточно “грубой”, и связано это главным образом с нарушением условия (11), а также со значительностью чисел β_n и $\|v_n\|$, которая вызвана малыми величинами $(\lambda_{\min})_n$.

3.2. Уравнение Гаммерштейна. Решалось нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна

$$F(z) = \int_{-1}^1 \frac{ds}{((t-s)^2 + H^2)(1 + s^2 + z^2(s))} - u(t) = 0, \quad |x| \leq 2, \quad H = 3,$$

с точным решением $z(s) = 1 - s^2$ и соответствующей функцией $u(t)$, вычисляемой аналитически. Конечномерная аппроксимация и возмущение правой части проводились так же, как и в предыдущем примере.

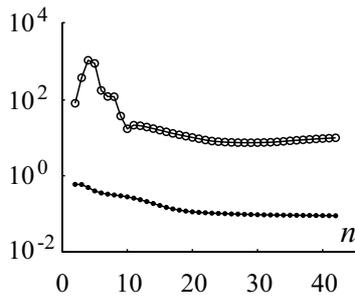


Рис. 3. Истинная точность получаемых приближенных решений (линия с точками) и апостериорная оценка точности (12) (линия с кружками)

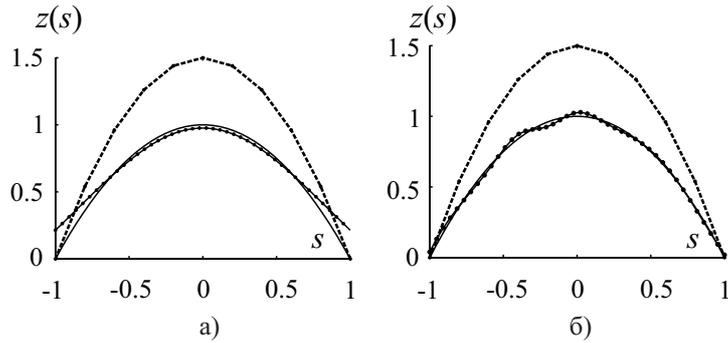


Рис. 4. Точное решение задачи (непрерывная линия), начальное приближение (пунктир) и приближенное решение для процесса (3), (7) с $\alpha_n = \frac{30}{(n+1)^2}$ (линия с точками) (а); б) аналогично для процесса с $\alpha_n = 30 \times 0.5^{n+1}$

Константа Липшица вычислялась на множестве $D = \{z(s) : 0 \leq z(s) \leq 4\}$. Оказалось, что $M = 0.7925$. Результаты расчетов приводятся на рис. 4–6, аналогичных рис. 1–3.

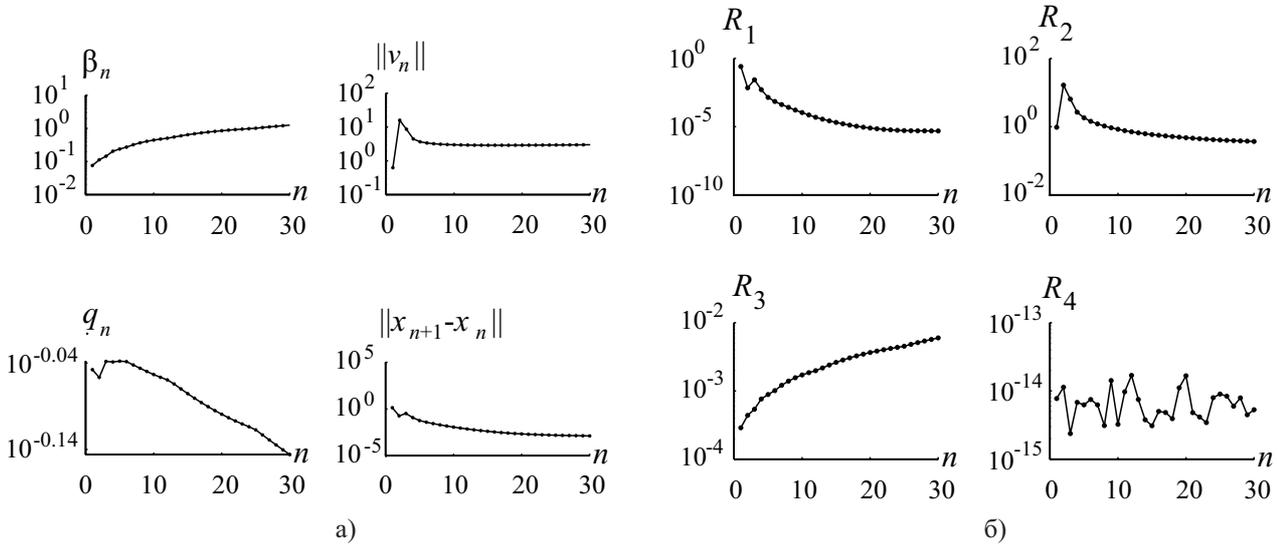


Рис. 5. Характеристики $\beta_n, q_n, \|v_n\|, \|x_{n+1} - x_n\|$ для процесса (3), (7) с $\alpha_n = \frac{30}{(n+1)^2}$ (а); б) слагаемые R_i в случае $\alpha_n = \frac{30}{(n+1)^2}$

Применялись различные стратегии выбора параметров α_n . В частности, использовалась зависимость $\alpha_n = \frac{30}{(n+1)^2}$. Характерной особенностью такого итеративного процесса оказывается то, что условие (11) выполнено для всех рассмотренных итераций (рис. 5а). Это ведет к малому влиянию слагаемых R_1 и R_3 оценки (12) при определяющем вкладе члена R_2 (рис. 5б). Однако апостериорная оценка, получающаяся в итоге, снова достаточно “груба” (рис. 6).

На рис. 6 видно, что сходимость итераций при $\alpha_n = \frac{30}{(n+1)^2}$ относительно медленная. Ее можно ускорить, выбирая параметр по правилу $\alpha_n = \alpha_0 \gamma^{n+1}, 0 < \gamma < 1$. В результате получаются апостериорные оценки, показанные на рис. 7. Как видно из сравнения этих графиков, при ускорении сходимости итераций апостериорная оценка ухудшается. Это связано с нарушением условия (11) для итераций, подчиненных закону $\alpha_n = \alpha_0 \gamma^{n+1}$ с достаточно малым γ .

3.3. Обратная коэффициентная задача для уравнения в частных производных. Еще один тестовый пример связан с решением обратной задачи определения младшего коэффициента в эллиптическом уравнении в частных производных [20, гл. 5]. Поставим в области $\Pi = [-d_1, d_1] \times [0, d_2]$ краевую

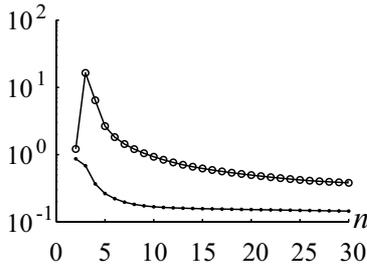


Рис. 6. Оценка точности для процесса (3), (7) с $\alpha_n = \frac{30}{(n+1)^2}$

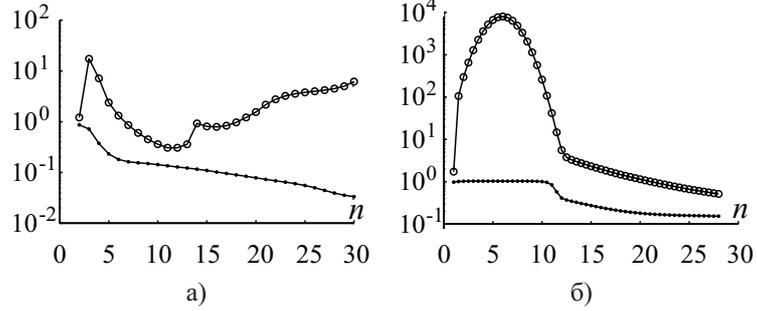


Рис. 7. Оценки для $\alpha_0 = 30, \gamma = 0.5$ (а); б) аналогично для процесса с $\alpha_0 = 30, \gamma = 0.9$

задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = c(y)u(x, y) + f(x, y), & (x, y) \in \Pi \setminus \partial\Pi, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Pi} = [-q(x, y)u(x, y) + g(x, y)] \Big|_{\partial\Pi}, \end{cases} \quad (18)$$

в которой по заданным функциям $c(y) \in C[0, d_2], f(x, y) \in C(\Pi), q(x, y), g(x, y) \in C(\partial\Pi)$ требуется найти классическое решение $u(x, y)$. Подобная задача возникает при моделировании стационарных процессов переноса вещества, причем $c(y)$ имеет смысл коэффициента переноса, функция $f(x, y)$ определяет плотность источников, порождающих вещество, а функции $q(x, y), g(x, y)$ задают поток вещества на границе области.

Обратная задача состоит в следующем. Пусть величины $f(x, y)$ и $q(x, y), g(x, y)$ известны. Требуется найти пару функций $\{c(y), u(x, y)\}$ из указанных функциональных пространств так, чтобы удовлетворялись условия (18) и дополнительное условие $u|_{\partial\Pi} = U(x, y)|_{\partial\Pi} \in C(\partial\Pi)$ на границе с известной функцией U . Таким образом, в рамках задачи о переносе вещества мы хотим, зная функцию источника $f(x, y)$, определить коэффициент переноса $c(y)$ по измерениям концентрации вещества и его потока на границе. Вопросы существования и единственности решения для такой обратной задачи исследованы в работе [21].

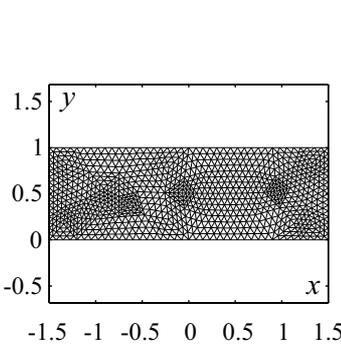


Рис. 8. Сетка метода конечных элементов

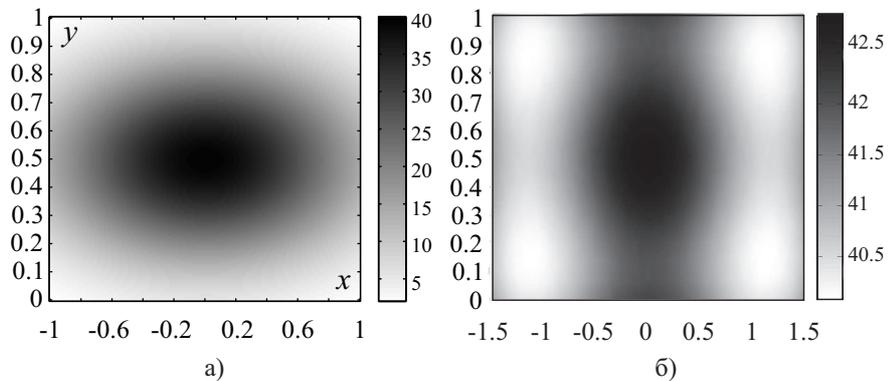


Рис. 9. Функция $f(x, y)$ (а); б) решение задачи (18) для данных (19)

Поставленную обратную задачу можно формально свести к операторному уравнению (1), вводя оператор $F(c)$, реализующий для любой допустимой функции $c = c(y)$ процедуру вычисления величины $u|_{\partial\Pi} - U(x, y)|_{\partial\Pi}$ при решении прямой задачи (18). В результате обратная задача принимает вид уравнения $F(c) = 0$, и его можно решить с помощью алгоритма (3), (7). Здесь возникает проблема эффективного (с точки зрения скорости) метода решения прямой задачи, т.е. вычисления оператора $F(c)$. Проблема решается путем использования разностных схем для эллиптических краевых задач или путем применения метода конечных элементов, как это делается, например, в программах из PDF toolbox пакета МАТЛАБ. Именно такой подход использован ниже.

В нашем модельном примере принято:

$$d_1 = 1.5, \quad d_2 = 1, \quad f(x, y) = 40 \exp\{-x^2 - 8(y - 0.5)^2\}, \quad q = 0.1, \quad g = 0. \quad (19)$$

Модельное решение имеет вид $c(y) = 1.1 - \sin^2 \pi y$. На рис. 8 показана сетка метода конечных элементов, использованная в расчетах. На рис. 9а показана плотность источников $f(x, y)$. Решая прямую задачу (18) с помощью метода конечных элементов, получим функцию $u(x, y)$, изображенную на рис. 9б.

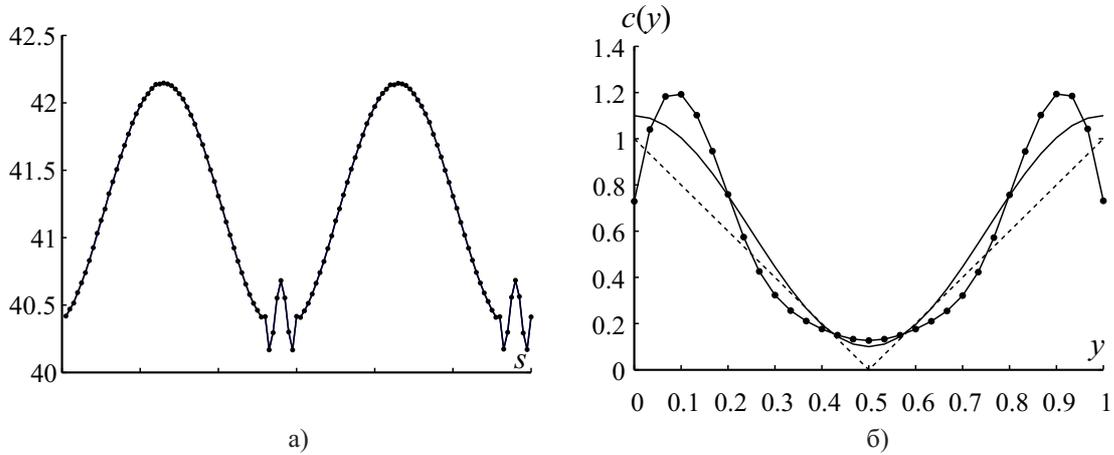


Рис. 10. Данные обратной задачи (а): точные данные — непрерывная линия, приближенные данные с относительной точностью $\delta_{rel} = 0.001$ — точки; б) точное решение — непрерывная линия, начальное приближение итераций — пунктирная линия, приближенное решение на 11-й итерации — линия с точками

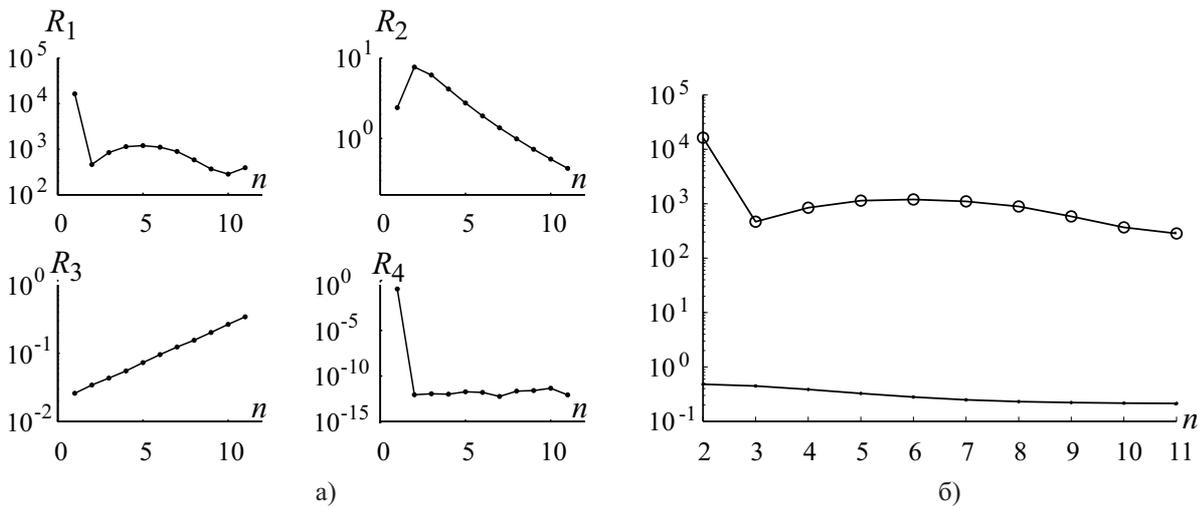


Рис. 11. Слагаемые оценки (12) (а); б) оценка (12) (линия с кружками) и истинная точность решения модельной задачи (непрерывная линия)

Точные данные обратной задачи — функция $U(x, y)|_{\partial\Pi} = U(s)$, вычисленная при решении прямой задачи как граничные значения функции $u(x, y)$, показаны на рис. 10а (непрерывная линия), на котором s — натуральный параметр, отсчитываемый против часовой стрелки вдоль границы области Π начиная с точки $(-1.5, 0)$. Кроме того, изображен график возмущенных данных с относительной ошибкой $\delta_{rel} = 0.001$ (точки). Точное решение обратной задачи $c(y)$ (непрерывная линия) и приближенное решение на 11-й итерации (линия с точками), полученное по методу (3), (7), изображены на рис. 10б. Использовались величины $\alpha_n = (0.6)^{n+1}$. Матрица Φ' вычислялась в итеративном процессе путем линеаризации задачи (18). Была оценена константа Липшица в неравенстве (2) для множества $D = \{c(y) : 0.1 \leq c(y) \leq 1.2\}$. Расчеты показали, что $M = 1.435 \times 10^4$. Такое значение константы ведет к значительному “загрублению” апостериорной оценки (12). Это можно видеть на рис. 11а (как вклад отдельных слагаемых оценки) и рис. 11б (суммарно).

В литературе известна плохая обусловленность обратной коэффициентной задачи для (18) [20]. В этой связи полученное приближенное решение можно считать удовлетворительным при рассматриваемом уровне δ_{rel} относительной погрешности данных.

Выводы. Предлагаемые апостериорные оценки точности для приближенных решений, генерируемых

процессами типа (3), оказались в конкретном случае метода (7) существенно завышенными. Как правило, это связано с тем, что неравенство (11) зачастую не выполнено для рассмотренных задач и приходится искусственно ограничивать нижнее значение чисел q_n . Другой источник завышения оценок — “большие” значения чисел β_n , связанные с “малостью” величин $(\lambda_{\min})_n$, а также большие значения норм $\|v_n\|$. Наконец, значительные величины констант Липшица могут вести к завышенности оценок (12), как это получилось в последнем примере.

Апостериорные оценки (12) могут быть использованы для качественного анализа процесса сходимости итераций типа (3), как это продемонстрировано в приведенных примерах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00239-а, 12-01-90401-Укр.-а, 14-01-00182-а, 14-01-91151-ГФЕН-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Винокуров В.А., Гапоненко Ю.Л.* Апостериорные оценки погрешности решения некорректных обратных задач // Доклады АН СССР. 1982. **263**, № 2. 277–280.
2. *Дорофеев К.Ю., Титаренко В.Н., Ягола А.Г.* Алгоритмы построения апостериорных погрешностей решения для некорректных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2003. **43**, № 1. 12–25.
3. *Dorofeev K.Yu., Yagola A.G.* The method of extending compacts and a posteriori error estimates for nonlinear ill-posed problems // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. **12**, N 6. 627–636.
4. *Yagola A., Titarenko V.* Using *a priori* information about a solution of an ill-posed problem for constructing regularizing algorithms and their applications // Inv. Problems Sci. Eng. 2007. **15**, N 1. 3–17.
5. *Леонов А.С.* Об апостериорных оценках точности решения линейных некорректно поставленных задач и экстраоптимальных регуляризирующих алгоритмах // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 14–24.
6. *Leonov A.S.* Extraoptimal a posteriori estimates of the solution accuracy in the ill-posed problems of the continuation of potential geophysical fields // Izv. Phys. Solid Earth. 2011. **47**, N 6. 531–540.
7. *Leonov A.S.* A posteriori accuracy estimations of solutions to ill-posed inverse problems and extra-optimal regularizing algorithms for their solution // Numer. Analysis and Applications. 2012. **5**, N 1. 68–83.
8. *Leonov A.S.* Extra-optimal methods for solving ill-posed problems // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2012. **20**, N 5–6. 637–665.
9. *Леонов А.С.* Поточечно экстраоптимальные регуляризирующие алгоритмы // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 215–228.
10. *Бакушинский А.Б.* Апостериорные оценки погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений // Доклады АН. 2011. **437**, № 4. 439–440.
11. *Bakushinsky A., Smirnova A., Liu H.* A posteriori error analysis for unstable models // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2012. **20**, N 4. 411–428.
12. *Becker R., Rannacher R.* An optimal control approach to *a posteriori* error estimation in finite element method // Acta Numerica. 2001. **10**. 1–102.
13. *Beilina L., Johnson C.* *A posteriori* error estimation in computational inverse scattering // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2005. **15**, N 1. 23–37.
14. *Beilina L., Klivanov M.V.* A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem // SIAM J. Sci. Comput. 2008. **31**, N 1. 478–509.
15. *Beilina L., Klivanov M.V.* *A posteriori* error estimates for the adaptivity technique for the Tikhonov functional and global convergence for a coefficient inverse problem // Inverse Problems. 2010. **26**, N 4. Article Number: 045012.
16. *Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu.* Iterative methods for approximate solution of inverse problems. Dordrecht: Springer, 2004.
17. *Bakushinsky A., Smirnova A.* Irregular operator equations by iterative methods with undetermined reverse connection // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2010. **18**, N 2. 147–165.
18. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2012.
19. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
20. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
21. *Соловьёв В.В.* Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2007. **47**, № 8. 1365–1377.

Поступила в редакцию
17.05.2014

New a Posteriori Error Estimates for Approximate Solutions to Irregular Operator Equations

A. B. Bakushinsky¹ and A. S. Leonov²

¹ *Institute for Systems Analysis, Russian Academy of Sciences; prospekt 60-letiya Oktyabrya, 9, Moscow, 117312, Russia; Professor, Principal Scientist, e-mail: bakush@isa.ru*

² *National Research Nuclear University, Physicotechnical Faculty; Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia; Professor, e-mail: asleonov@mephi.ru*

Received May 17, 2014

Abstract: A brief overview of developed up to date a posteriori error estimates for approximate solutions to irregular operator equations is given. Among them are a posteriori estimates for some descriptive expanding compacts (A. G. Yagola, etc.), the evaluation using a posteriori residual values and regularizing functionals (A. S. Leonov), the estimates with more detailed a priori assumptions about solutions (A. B. Bakushinsky, etc.), estimating the accuracy of solutions to coefficient inverse problems for partial differential equations using the specifics of the Tikhonov regularization and the adaptive finite element method (L. Beilina, M. Klivanov, etc.). In this paper a new method for a posteriori estimates of the accuracy of approximate solutions calculated using the iterative procedures for irregular operator equations is proposed. The estimates are found using other a posteriori functionals of approximate solutions than in the overviewed papers. In this method, one can track the evolution of a posteriori estimates in solving the equation, which allows one to draw conclusions about iteration convergence and to introduce adequate improvements in the iterative procedures during their implementation.

Keywords: irregular operator equations, a posteriori estimation of the accuracy, iteratively regularized processes of Gauss–Newton type.

References

1. V. A. Vinokurov and Yu. L. Gaponenko, “A posteriori Estimates of the Solutions of Ill-Posed Inverse Problems,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **263** (2), 277–280 (1982) [*Sov. Math. Dokl.* **25** (2), 325–328 (1982)].
2. K. Yu. Dorofeev, V. N. Titarenko, and A. G. Yagola, “Algorithms for Constructing a Posteriori Errors of Solutions to Ill-Posed Problems,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **43** (1), 12–25 (2003) [*Comput. Math. Math. Phys.* **43** (1), 10–23 (2003)].
3. K. Yu. Dorofeev and A. G. Yagola, “The Method of Extending Compacts and a Posteriori Error Estimates for Nonlinear Ill-posed Problems,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **12** (6), 627–636 (2004).
4. A. Yagola and V. Titarenko, “Using *a Priori* Information about a Solution of an Ill-Posed Problem for Constructing Regularizing Algorithms and Their Applications,” *Inverse Probl. Sci. Eng.* **15** (1), 3–17 (2007).
5. A. S. Leonov, “On a Posteriori Accuracy Estimates for Solutions of Linear Ill-Posed Problems and Extra-Optimal Regularizing Algorithms,” *Vychisl. Metody Programm.* **11**, 14–24 (2010).
6. A. S. Leonov, “Extraoptimal a Posteriori Estimates of the Solution Accuracy in the Ill-Posed Problems of the Continuation of Potential Geophysical Fields,” *Fiz. Zemli* **47** (6), 69–78 (2011) [*Izv. Phys. Solid Earth* **47** (6), 531–540 (2011)].
7. A. S. Leonov, “A Posteriori Accuracy Estimations of Solutions to Ill-Posed Inverse Problems and Extra-Optimal Regularizing Algorithms for Their Solution,” *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* **15** (1), 83–100 (2012) [*Num. Anal. Appl.* **5** (1), 68–83 (2012)].
8. A. S. Leonov, “Extra-Optimal Methods for Solving Ill-Posed Problems,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **20**, Nos. 5–6, 637–665 (2012).
9. A. S. Leonov, “Pointwise Extra-Optimal Regularizing Algorithms,” *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 215–228 (2013).
10. A. B. Bakushinsky, “A Posteriori Error Estimates for Approximate Solutions of Irregular Operator Equations,” *Dokl. Akad. Nauk* **437** (4), 439–440 (2011) [*Dokl. Math.* **83** (2), 192–193 (2011)].
11. A. B. Bakushinsky, A. Smirnova, and H. Liu, “A Posteriori Error Analysis for Unstable Models,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **20** (4), 411–428 (2012).
12. R. Becker and R. Rannacher, “An Optimal Control Approach to a *Posteriori* Error Estimation in Finite Element Method,” *Acta Numerica* **10**, 1–102 (2001).

13. L. Beilina and C. Johnson, “*A Posteriori* Error Estimation in Computational Inverse Scattering,” *Math. Models Methods Appl. Sci.* **15** (1), 23–37 (2005).

14. L. Beilina and M. V. Klibanov, “A Globally Convergent Numerical Method for a Coefficient Inverse Problem,” *SIAM J. Sci. Comput.* **31** (1), 478–509 (2008).

15. L. Beilina and M. V. Klibanov, “*A Posteriori* Error Estimates for the Adaptivity Technique for the Tikhonov Functional and Global Convergence for a Coefficient Inverse Problem,” *Inverse Probl.* **26** (4), Article No. 045012 (2010).

16. A. B. Bakushinsky and M. Yu. Kokurin, *Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems* (Springer, Dordrecht, 2004).

17. A. Bakushinsky and A. Smirnova, “Irregular Operator Equations by Iterative Methods with Undetermined Reverse Connection,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **18** (2), 147–165 (2010).

18. A. B. Bakushinsky and M. Yu. Kokurin, *Algorithmic Analysis of Irregular Operator Equations* (Lenand, Moscow, 2012) [in Russian].

19. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].

20. A. S. Leonov, *The Solution of Ill-Posed Inverse Problems: Outline of the Theory, Practical Algorithms and Demonstrations in MATLAB* (Librokom, Moscow, 2010) [in Russian].

21. V. V. Solov’ev, “Source and Coefficient Inverse Problems for an Elliptic Equation in a Rectangle,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **47** (8), 1365–1377 (2007) [*Comput. Math. Math. Phys.* **47** (8), 1310–1322 (2007)].