

УДК 519.246.8

УРАВНЕНИЯ ГАЛАКТИЧЕСКОГО ДИНАМО СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. А. Михайлов¹, И. И. Модяев²

Рассматривается задача, возникающая при изучении магнитных полей галактик. Их эволюция описывается механизмом динамо, работающим за счет альфа-эффекта и дифференциального вращения. Эти явления характеризуются безразмерными коэффициентами, входящими в уравнения динамо. В отличие от большинства работ в данной области, считающих эти параметры детерминированными величинами, полагается, что один из этих коэффициентов описывается случайным процессом и обновляется с некоторым малым интервалом времени, принимая с определенной вероятностью и дисперсией одно из двух значений, каждое из которых характеризует один из компонентов межзвездной среды. Вычислена скорость роста статистических моментов магнитного поля. Показано, что в данной задаче присутствует явление перемежаемости, заключающееся в том, что старшие моменты растут быстрее младших. Рассмотрена как задача, содержащая зависимость только от времени, так и случай зависимости от пространственных переменных. Показано, что при добавлении зависимости от пространственных координат скорость роста уменьшается, что может быть объяснено дополнительной диссипацией энергии магнитного поля по сравнению со случаем использования обыкновенного дифференциального уравнения. Рассмотрена также нелинейная модификация задачи.

Ключевые слова: магнитные поля галактик, уравнения со случайными коэффициентами, теория динамо, перемежаемость.

1. Введение. В ряде задач астрофизики возникает необходимость решения дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами [1]. В частности, к ним можно отнести исследование процессов генерации галактического магнитного поля. Рост магнитного поля в галактиках (как и во многих других астрофизических объектах) описывается так называемым *механизмом динамо* [2]. Его суть состоит в “перекачке” кинетической энергии межзвездного газа в энергию магнитного поля. Это обусловлено совокупностью двух эффектов: дифференциального вращения (угловая скорость вращения галактики зависит от расстояния до центра) и альфа-эффекта (характеризует турбулентные движения) [3, 4]. Эти явления описываются безразмерными параметрами, входящими в уравнения динамо. Они выражаются через кинематические характеристики межзвездной среды: полутолщину галактического диска, угловую скорость вращения, скорость турбулентных движений и др. [5]. В галактиках, в которых не наблюдаются какие-либо активные процессы, эти величины обычно мало меняются в пределах всего галактического диска и при расчетах можно считать их постоянными. Однако в ситуации, когда в галактиках происходят явления, связанные со звездообразованием, взрывами сверхновых звезд и т.п., заметно меняется соотношение между различными фазами межзвездной среды [6]. В то время как в “спокойных” галактиках основную роль играет атомарный водород, в галактиках с такими бурными процессами образуется большое число областей ионизованного водорода. Они имеют более высокую температуру, поэтому и значения кинематических параметров в данных областях будут отличаться. Их расположение в первом приближении может быть описано случайным законом: “сгустки” ионизованного водорода возникают в случайных местах в галактике и существуют ограниченное время. Тем не менее, хотя в некоторых относящихся к теории динамо работах и делались попытки учета флуктуаций альфа-эффекта [7–9], многие проблемы остаются актуальными. Например, необходим аккуратный учет того, что значения флуктуирующего коэффициента могут заметно отличаться в различных частях галактики.

Мы рассматриваем уравнения галактического динамо в рамках так называемого по- z приближения [10–12]. Полагается, что полутолщина галактического диска намного меньше его радиуса, поэтому можно заменить частные производные вдоль направления, перпендикулярного к плоскости диска, алгебраическими выражениями. Один из коэффициентов в данной модели описывает турбулентные движения

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; аспирант, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; студент, e-mail: ygrekus@gmail.com

и альфа-эффект, второй — дифференциальное вращение галактики. Мы полагаем, что первый из этих коэффициентов описывается случайным процессом и является кусочно-постоянной функцией координат и времени. Он принимает с определенной вероятностью и дисперсией одно из двух заданных значений, первое из которых соответствует ионизованному водороду, а второе — атомарному. Вероятность того, что коэффициент принимает первое значение, характеризует интенсивность соответствующих процессов, вызывающих неоднородность.

В рамках настоящей работы мы решаем численно три различных модификации упомянутой задачи. Первая предполагает отсутствие диссипации магнитного поля в плоскости диска и сводится к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Для исследования таких систем может быть использован аппарат, разработанный для перемножения случайных матриц. Действительно, решение может быть получено при помощи фундаментальной матрицы, представляющей собой произведение большого числа переходных матриц, каждая из которых соответствует одному интервалу обновления случайной величины. Теория предсказывает [13, 14], что начиная с определенного момента наблюдается экспоненциальный рост решения, что подтверждается нашими численными результатами. Далее мы решаем аксиально-симметричную задачу — астрономические наблюдения показывают, что звездообразование иногда сосредоточено в кольцах, поэтому данное упрощение тоже вполне оправдано. Наконец, решается задача, в которой присутствует зависимость от двух пространственных координат (расстояние до центра галактики и полярный угол). Для каждой из этих задач мы вычисляем критическое значение вероятности, при котором наблюдается устойчивый рост магнитного поля. Эти значения отличаются в связи с тем, что в задачах с большим числом пространственных переменных учитывается дополнительная диссипация, которая замедляет рост магнитного поля.

Таким образом, мы получаем механизм, позволяющий в простейшем случае описывать рост магнитного поля в галактике с неоднородным межзвездным газом. С другой стороны, предлагается прозрачная физическая интерпретация результатов, полученных при исследовании роста мультипликативных случайных величин.

2. Основные уравнения. Уравнения для эволюции галактического магнитного поля в рамках по- z приближения выглядят следующим образом [12, 15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_r + \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь B_r и B_φ — соответственно радиальная и угловая компоненты магнитного поля; r и φ — полярные координаты, связанные с центром галактики; R_α — коэффициент, характеризующий альфа-эффект; R_ω — коэффициент, характеризующий дифференциальное вращение галактики; $\lambda = h/R$ — величина, характеризующая толщину галактического диска, где h — полутолщина диска и R — его радиус. Данная система уравнений записана в безразмерных единицах измерения: в частности, расстояние до центра галактики измеряется в ее радиусах (т.е. $0 \leq r \leq 1$). Время измеряется в единицах h^2/η , где η — вязкость среды [10, 12].

Поскольку рост магнитного поля происходит за счет перехода кинетической энергии турбулентных движений газа в энергию магнитного поля, этот процесс не может продолжаться бесконечно долго. Если необходимо учесть насыщение роста магнитного поля при приближении к определенному значению B^* (определяемому, как правило, из энергетических соображений [5]), то мы можем рассмотреть нелинейное обобщение задачи (1). Один из возможных способов введения нелинейности состоит в следующей замене коэффициента R_α [11]: $R_\alpha \rightarrow \frac{R_\alpha}{1 + (B_r^2 + B_\varphi^2)/B^{*2}}$. Если мы выберем для магнитного поля единицы измерения, в которых $B^* = 1$, то рассматриваемая система уравнений примет вид [11, 12]

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -\frac{R_\alpha}{1 + B_r^2 + B_\varphi^2} B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_r + \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right); \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Обычно в детерминированных задачах считается, что $R_\alpha \approx 1$, $R_\omega \approx 10$. Коэффициент λ , как правило, имеет порядок 10^{-2} [10, 11]. Мы полагаем, что R_α принимает случайные значения, обновляющиеся на

каждом интервале времени длины Δt и подчиняющиеся следующей плотности распределения $\rho(x)$:

$$\rho(x) = \frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - R_1)^2}{2\sigma^2}\right\} + \frac{(1 - p)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - R_2)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (3)$$

Для определенности выбраны значения $R_1 = 0.1$, $R_2 = 1$, $\sigma = 0.1$, а значение p варьируется и характеризует интенсивность происходящих в галактике процессов, связанных, например, со звездообразованием. В случае задачи с зависимостью от расстояния r до центра галактики будем полагать, что для каждого из колец, определяемых из условия $n\Delta r < r < (n + 1)\Delta r$, имеется свое значение коэффициента R_α , определяемое по формуле (3). Для случая учета зависимости также и от полярного угла φ значение коэффициента отличается для каждого сектора кольца шириной $\Delta\varphi$.

Конечно, для галактик, в которых происходят взрывы сверхновых и другие бурные процессы, можно было бы рассматривать флуктуации и других параметров, например B^* [16], но наиболее важные явления описываются флуктуациями коэффициента, отвечающего за альфа-эффект.

3. Одномерная задача. Наиболее простой в рассмотрении является одномерная задача, которая получается из (1) при $\lambda = 0$. В таком случае магнитное поле описывается системой из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_r; \quad \frac{dB_\varphi}{dt} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi. \quad (4)$$

При детерминированных значениях коэффициентов решение этой задачи описывается экспоненциальным законом $\exp(\gamma t)$, где $\gamma = -\frac{\pi^2}{4} \pm \sqrt{R_\alpha R_\omega}$. Если $R_\alpha R_\omega > \frac{\pi^4}{16}$, то возможен рост магнитного поля, иначе будет наблюдаться лишь его затухание. Мы полагаем, что $R_\omega = 10$, а R_α является кусочно-постоянным случайным процессом с интервалом обновления Δt с плотностью распределения (3).

Введем вектор-строку $\mathbf{B} = (B_r, B_\varphi)$. Тогда при переходе от одной точки обновления случайного процесса $t_n = n\Delta t$ к другой $t_{n+1} = (n + 1)\Delta t$ вектор \mathbf{B} будет преобразовываться с помощью матрицы G_{n+1} [14]:

$$\mathbf{B}(t_{n+1}) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\Delta t\right)\mathbf{B}(t_n)G_{n+1},$$

где матрица G_{n+1} имеет вид

$$G_{n+1} = \begin{pmatrix} \text{ch}(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \Delta t) & -\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} \text{sh}(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \Delta t) \\ -\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \text{sh}(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \Delta t) & \text{ch}(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \Delta t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вектор \mathbf{B} на произвольном шаге задается при помощи формулы

$$\mathbf{B}(t_n) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t_n\right)\mathbf{B}(0)G(n),$$

где $G(n) = G_1 G_2 \dots G_n$.

Можно показать [13, 14], что матрица $G(n)$ может быть представлена в виде произведения трех матриц: $G(n) = Z(n)D(n)U(n)$, где матрицы имеют следующий вид:

$$Z(n) = \begin{pmatrix} 1 & z(n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(n) = \begin{pmatrix} e^{-\tau(n)} & 0 \\ 0 & e^{+\tau(n)} \end{pmatrix}, \quad U(n) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(n) & \sin \varphi(n) \\ -\sin \varphi(n) & \cos \varphi(n) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при росте n функция $z(n)$ сходится к постоянной случайной величине, а $\tau(n)$ становится функцией, близкой к линейной [14]. Поэтому следует ожидать, что на больших временах решение будет иметь экспоненциальный рост.

Для расчета брался интервал обновления $\Delta t = 0.01$. Использовался генератор псевдослучайных чисел, который называется вихрем Мерсенна [17]. Его период равен $2^{19937} - 1$, что при расчетах гарантировало статистическую однородность выборок размером порядка 10^5 , при этом генерируемые им псевдослучайные последовательности показывают одни из лучших результатов в сериях различных статистических

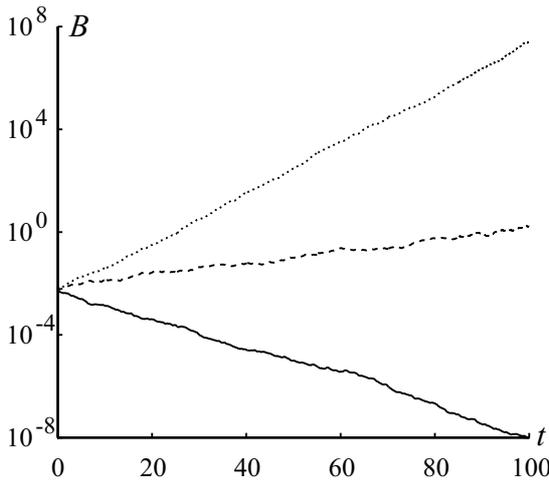


Рис. 1. Зависимость напряженности магнитного поля от времени для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4). Пунктирная линия соответствует $p = 0.30$, штриховая — $p = 0.40$, сплошная — $p = 0.50$

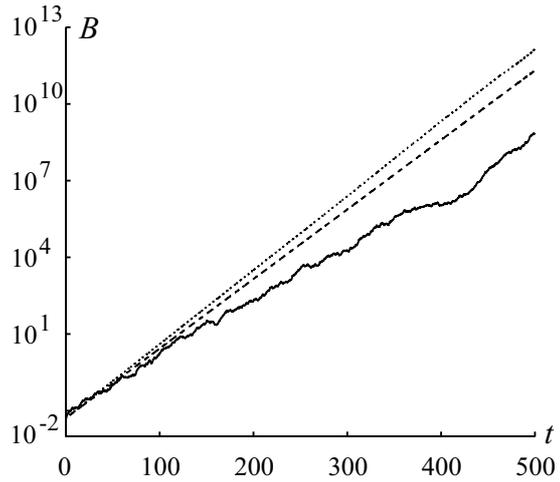


Рис. 2. Различные моменты магнитного поля для линейной системы дифференциальных уравнений (4) при $p = 0.40$. Сплошная линия — типичное решение B , штриховая — среднее поле $\langle B \rangle$, пунктирная — среднее квадратичное значение $\sqrt{\langle B^2 \rangle}$

тестов. Таким образом, данные особенности гарантировали нам статистическую однородность выборочных значений R_α при длительных расчетах, связанных с усреднением получаемых решений и вычислением показателей роста магнитного поля.

Получено, что устойчивый рост магнитного поля наблюдается при $p < 0.435$. Типичные решения для напряженности магнитного поля $B = \sqrt{B_r^2 + B_\varphi^2}$ при нескольких значениях p показаны на рис. 1. Путем усреднения по большому (порядка 10^5) числу решений были также вычислены средние и среднее-квадратичные поля, проиллюстрированные на рис. 2. Значения показателей экспоненциального роста для типичного решения, среднего и среднее-квадратичного значений приведены в табл. 1. Результаты усреднения показывают, что в данной задаче наблюдается явление перемежаемости [3, 18], которое заключается в том, что старшие статистические моменты решения растут с большей скоростью. Это объясняется существованием маловероятных решений, растущих заметно быстрее остальных и дающих более весомый вклад в моменты высших порядков.

Таблица 1

Показатели роста моментов системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4)

p	B	$\langle B \rangle$	$\sqrt{\langle B^2 \rangle}$
0.30	0.2190	0.2242	0.2271
0.40	0.0406	0.0521	0.0559
0.50	-0.1332	-0.1325	-0.1281

Таблица 2

Показатели роста моментов системы уравнений (6) с зависимостью от одной пространственной координаты

p	B	$\langle B \rangle$	$\sqrt{\langle B^2 \rangle}$
0.30	0.2216	0.2228	0.2236
0.40	0.0495	0.0507	0.0517
0.50	-0.1364	-0.1339	-0.1325

Мы численно решали не только линейную систему дифференциальных уравнений (4), но и ее нелинейную модификацию, соответствующую (2) при $\lambda = 0$:

$$\frac{dB_r}{dt} = -\frac{R_\alpha}{1 + B_r^2 + B_\varphi^2} B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_r; \quad \frac{dB_\varphi}{dt} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi. \tag{5}$$

Типичные решения для этой задачи проиллюстрированы на рис. 3. Нелинейная система уравнений предполагает насыщение при достижении магнитным полем определенного значения. Однако по сравнению с детерминированной задачей, в которой поле после достижения насыщения практически не изменя-

ется, в нашем случае наблюдаются флуктуации, размер которых практически не меняется со временем.

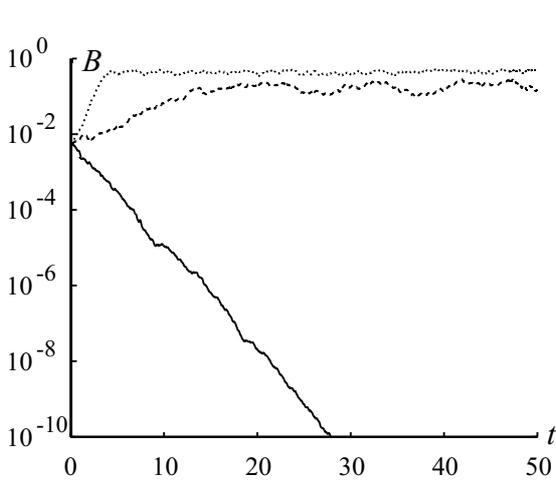


Рис. 3. Зависимость напряженности магнитного поля от времени для нелинейной задачи (5). Пунктирная линия соответствует $p = 0.30$, штриховая — $p = 0.40$, сплошная — $p = 0.50$

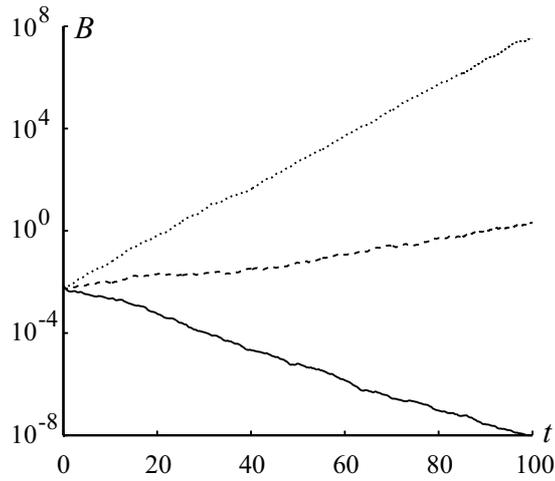


Рис. 4. Зависимость напряженности магнитного поля от времени в задаче (6) с зависимостью от r . Пунктирная линия соответствует $p = 0.30$, штриховая — $p = 0.40$, сплошная — $p = 0.50$

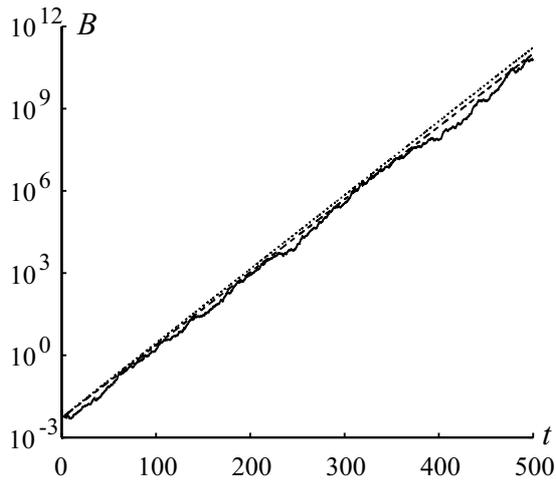


Рис. 5. Различные моменты магнитного поля в задаче (6) с зависимостью от r при $p = 0.40$. Сплошная линия — типичное решение B , штриховая — среднее поле $\langle B \rangle$, пунктирная — среднеквадратичное поле $\sqrt{\langle B^2 \rangle}$

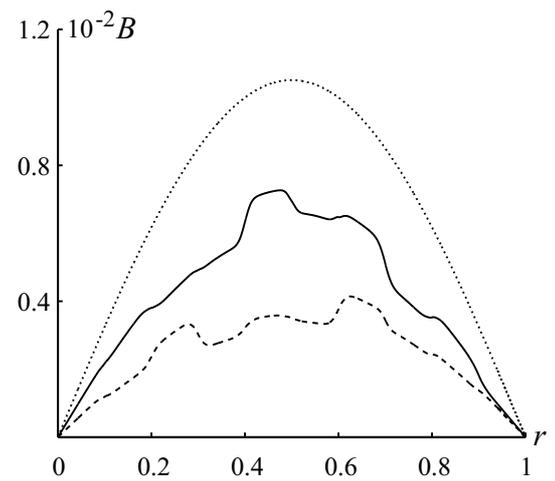


Рис. 6. Зависимость напряженности магнитного поля от расстояния до центра галактики для системы (6) в момент времени $t = 100\Delta t$. Пунктирная линия соответствует магнитному полю в детерминированной задаче. Сплошная линия — $p = 0.30$, штриховая — $p = 0.60$

4. Задача, содержащая зависимость от пространственных переменных. Далее мы рассматриваем более актуальную для приложений задачу, содержащую зависимость от пространственных переменных. Сначала мы решаем вариант задачи (1), содержащий только зависимость от расстояния r до центра галактики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_r + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{r \partial r} (r B_r) \right); \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{r \partial r} (r B_\varphi) \right). \end{aligned} \tag{6}$$

В наших расчетах мы полагали размер колец $\Delta r = 0.1$. Типичные решения для этого случая показаны на рис. 4. Уже при учете зависимости только от одной пространственной переменной возникает качественное различие по сравнению с системой обыкновенных дифференциальных уравнений (4). Учет

магнитной диффузии в плоскости галактического диска понизил скорости роста первого и среднеквадратичного моментов, которые для данной задачи приведены в табл. 2. Их значения показывают, что здесь тоже присутствует явление перемежаемости, хотя оно и выражено менее ярко (см. также рис. 5). Граница устойчивого роста магнитного поля незначительно сместилась — теперь устойчивый рост наблюдается при $p < 0.434$.

Влияние радиальной неоднородности α -эффекта на зависимость магнитного поля от расстояния до центра галактики продемонстрировано на рис. 6. В структуре поля образуются кольца, расположение которых является случайным и зависит от конкретной реализации случайного процесса.

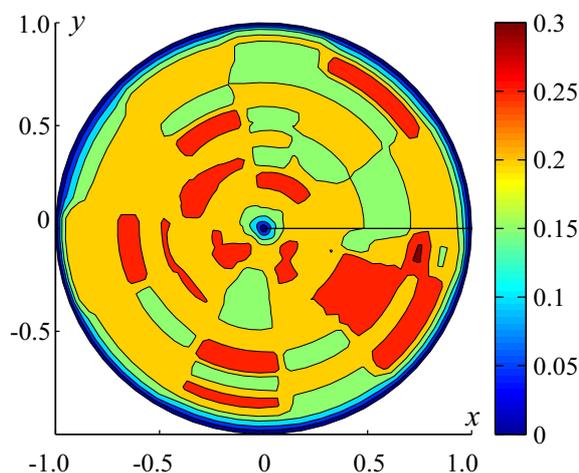


Рис. 7. Уровни напряженности магнитного поля в задаче (2) при $p = 0.40$ и $t = 150$. Шкала справа показывает взаимосвязь между напряженностью поля и цветом области

Наконец, мы рассматриваем задачу (1), содержащую зависимость от двух пространственных переменных — расстояния до центра r и полярного угла φ . Численное моделирование задачи (1) показывает хаотичное появление малых областей, в которых магнитное поле усиливается на некоторое время (рис. 7). В остальном же поведение роста магнитного поля во многом близко к предыдущей задаче. Устойчивый рост снова наблюдается при $p < 0.434$, как и в системе с зависимостью только от одной пространственной переменной (6). Скорости роста магнитного поля также оказываются примерно такими же, как и в задаче (6). В табл. 3 для сравнения приведены скорости роста первого статистического момента магнитного поля для задач с разной размерностью.

Кроме того, были рассмотрены нелинейные модификации пространственно-неоднородных задач. Качественно поведение решений оказалось почти таким же, как и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

5. Заключение. Мы получили ряд решений для уравнений галактического динамо со случайными коэффициентами. Получено, что при низкой интенсивности процессов, вызывающих неоднородность (соответствующих малым p), их влияние на скорость роста невелико. При увеличении p происходит замедление среднего показателя роста, а при достижении им некоторого критического значения рост сменяется затуханием. В случае задачи с зависимостью от пространственных переменных критическое значение несколько ниже, что может объясняться наличием дополнительной диссипации энергии магнитного поля. Отметим, что добавление второй пространственной координаты существенно не меняет поведение решения; это позволяет исследовать подобные задачи, не прибегая к “затратному” с вычислительной точки зрения решению многомерных уравнений.

Подтверждены предсказания теории [13], согласно которым при перемножении большого количества матриц, описывающих переход от одного интервала обновления к другому, наблюдается линейный рост. Дополнительно отметим, что в рассмотренных задачах ярко проявляется перемежаемость, характерная для роста мультипликативных случайных величин [18]. Представляется возможным развитие нашей работы при помощи аппарата так называемой инвариантной меры, позволяющей получить асимптотические приближения для скорости роста магнитного поля [19].

Кроме того, следует отметить, что приведенные выше результаты по смыслу соответствуют грубым оценкам, полученным в работе [6], в которой рассматривалось изменение входящих в уравнения коэф-

Таблица 3
Сравнение скоростей роста среднего поля $\langle B \rangle$ для всех трех задач в случае отсутствия нелинейности в коэффициенте R_α

p	Система ОДУ	Задача с зависимостью от r	Задача с зависимостью от r и φ
0.30	0.2242	0.2228	0.2228
0.40	0.0521	0.0507	0.0507
0.50	-0.1325	-0.1339	-0.1335

фициентов при наличии звездообразования. Это означает, что рассмотренная в настоящей статье модель дает адекватные с физической точки зрения результаты.

Авторы выражают благодарность Д. Д. Соколову за ценные советы при подготовке статьи. Работа выполнена при поддержке Фонда некоммерческих программ “Династия”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б. Наблюдения во Вселенной, однородной лишь в среднем // *Астрономический журнал*. 1964. **41**, № 1. 19–24.
2. Beck R. Magnetic fields in galaxies // *Space Sci. Rev.* 2012. **166**, N 1–4. 215–230.
3. Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Кинематическое динамо в случайном потоке // *Успехи физических наук*. 1985. **145**, № 4. 593–628.
4. Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D. Galactic magnetism: recent development and perspectives // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1996. **34**. 155–206.
5. Arshakian T.G., Beck R., Krause M., Sokoloff D. Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array // *Astron. Astrophys.* 2009. **494**, N 1. 21–32.
6. Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Ефремов Ю.Н. Темп звездообразования и магнитные поля спиральных галактик // *Письма в Астрономический журнал*. 2012. **38**, № 9. 611–616.
7. Proctor M.R.E. Effects on fluctuations on $\alpha\Omega$ dynamo models // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2007. **382**, N 1. L39–L42.
8. Sur S., Subramanian K. Galactic dynamo action in presence of stochastic α and shear // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2009. **392**, N 1. L6–L10.
9. Richardson K.J., Proctor M.R.E. Fluctuating $\alpha\Omega$ dynamos by iterated matrices // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2012. **422**, N 1. L53–L56.
10. Moss D. On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1995. **275**, N 1. 191–194.
11. Phillips A. A comparison of the asymptotic and no-z approximations for galactic dynamos // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 2001. **94**, N 1–2. 135–150.
12. Moss D., Sokoloff D. Magnetic field reversals and galactic dynamos // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 2013. **107**, N 5. 497–505.
13. Tutubalin V.N. A central limit theorem for products of random matrices and some of its applications // *Symposia Mathematica*. 1977. **XXI**. 101–116.
14. Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н. Фундаментальная матрица для уравнения Якоби со случайными коэффициентами // *Вычислительные методы и программирование*. 2010. **11**. 261–268.
15. Moss D. Modelling magnetic fields in spiral galaxies // *Astronomy & Geophysics*. 2012. **53**, N 5. 5.23–5.28.
16. Lacki B.C., Beck R. The equipartition magnetic field formula in starburst galaxies: accounting for pionic secondaries and strong energy losses // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2013. **430**, N 4. 3171–3186.
17. Matsumoto M., Nishimura T. Mersenne Twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator // *ACM Trans. on Modelling and Computer Simulation*. 1998. **8**, N 1. 3–30.
18. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Переमेжаемость в случайной среде // *Успехи физических наук*. 1987. **152**, Вып. 1. 3–32.
19. Илларионов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н. Стационарное распределение произведения матриц со случайными коэффициентами // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 218–225.

Поступила в редакцию
11.05.2014

Galactic Dynamo Equations with Random Coefficients

E. A. Mikhailov¹ and I. I. Modyaev²

¹ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Graduate Student, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru*

² *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Student, e-mail: ygrekus@gmail.com*

Received May 11, 2014

Abstract: A problem connected with magnetic fields of galaxies is considered. Their evolution is described by the dynamo mechanism existing due to the alpha-effect and the differential rotation. These phenomena

are characterized by dimensionless coefficients of the dynamo equations. Usually, it is assumed that these parameters are deterministic. We assume that one of them is described by a random process and is renewed on some small time interval. We also assume that this parameter can take one of two values with some dispersion and probability. Each of these values characterizes a component of the interstellar medium. The growth rates of statistical moments of the magnetic field are evaluated. It is shown that there exists the intermittency phenomenon in this problem (the higher moments grow faster). The problem that has only a time dependence and the problem that has a spatial dependence are also considered. It is shown that the spatial dependence lowers the magnetic field growth rate, which can be explained by some extra dissipation of the magnetic field energy. A nonlinear modification of the problem is discussed.

Keywords: galaxy magnetic fields, equations with random coefficients, dynamo theory, intermittency.

References

1. Ya. B. Zel'dovich, "Observations in a Universe Homogeneous in the Mean," *Astron. Zh.* **41** (1), 19–24 (1964) [*Sov. Astron.* **8** (1), 13–16 (1964)].
2. R. Beck, "Magnetic Fields in Galaxies," *Space Sci. Rev.* **166**, Nos. 1–4, 215–230 (2012).
3. S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov, "Kinematic Dynamo in Random Flow," *Usp. Fiz. Nauk* **145** (4), 593–628 (1985) [*Sov. Phys. Usp.* **28** (4), 307–327 (1985)].
4. R. Beck, A. Brandenburg, D. Moss, et al., "Galactic Magnetism: Recent Development and Perspectives," *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 155–206 (1996).
5. T. G. Arshakian, R. Beck, M. Krause, and D. Sokoloff, "Evolution of Magnetic Fields in Galaxies and Future Observational Tests with the Square Kilometre Array," *Astron. Astrophys.* **494** (1), 21–32 (2009).
6. E. A. Mikhailov, D. D. Sokoloff, and Yu. N. Efremov, "Star Formation Rate and Magnetic Fields in Spiral Galaxies," *Pis'ma Astron. Zh.* **38** (9), 611–616 (2012) [*Astron. Lett.* **38** (9), 543–548 (2012)].
7. M. R. E. Proctor, "Effects on Fluctuations on $\alpha\Omega$ Dynamo Models," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **382** (1), L39–L42 (2007).
8. S. Sur and K. Subramanian, "Galactic Dynamo Action in Presence of Stochastic α and Shear," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **392** (1), L6–L10 (2009).
9. K. J. Richardson and M. R. E. Proctor, "Fluctuating $\alpha\Omega$ Dynamos by Iterated Matrices," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **422** (1), L53–L56 (2012).
10. D. Moss, "On the Generation of Bisymmetric Magnetic Field Structures in Spiral Galaxies by Tidal Interactions," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **275** (1), 191–194 (1995).
11. A. Phillips, "A Comparison of the Asymptotic and no- z Approximations for Galactic Dynamos," *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **94**, Nos. 1–2, 135–150 (2001).
12. D. Moss and D. Sokoloff, "Magnetic Field Reversals and Galactic Dynamos," *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **107** (5), 497–505 (2013).
13. V. N. Tutubalin, "A Central Limit Theorem for Products of Random Matrices and Some of Its Applications," *Symposia Mathematica* **XXI**, 101–116 (1977).
14. E. A. Mikhailov, D. D. Sokoloff, and V. N. Tutubalin, "The Fundamental Matrix for the Jacobi Equation with Random Coefficients," *Vychisl. Metody Programm.* **11**, 261–268 (2010).
15. D. Moss, "Modelling Magnetic Fields in Spiral Galaxies," *Astron. Geophys.* **53** (5), 5.23–5.28 (2012).
16. B. C. Lacki and R. Beck, "The Equipartition Magnetic Field Formula in Starburst Galaxies: Accounting for Pionic Secondaries and Strong Energy Losses," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **430** (4), 3171–3186 (2013).
17. M. Matsumoto and T. Nishimura, "Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator," *ACM Trans. Model. Comput. Simul.* **8** (1), 3–30 (1998).
18. Ya. B. Zel'dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov, "Intermittency in Random Media," *Usp. Fiz. Nauk* **152** (1), 3–32 (1987) [*Sov. Phys. Usp.* **30** (5), 353–369 (1987)].
19. E. A. Illarionov, D. D. Sokoloff, and V. N. Tutubalin, "Stationary Distribution of Product of Matrices with Random Coefficients," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 218–225 (2012).