УДК 519.632.4

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ

С. В. Гаврилов[1]

Рассматривается двумерная задача электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянного коэффициента электрической проводимости, принимающего два известных значения. Требуется определить неизвестную границу, разделяющую области с различной проводимостью. В качестве исходной информации используются измерения характеристик электрического поля на внешней границе исследуемой среды. Проводится численный анализ обусловленности рассматриваемой задачи в зависимости от характера возбуждения потенциала электрического поля на внешней границе среды, а также в зависимости от количества таких возбуждений. Делается предположение о принадлежности кривой, определяющей неизвестную границу раздела, к классу кривых, задаваемых конечным набором параметров. В этом классе кривых при определенном уровне погрешности, вносимой в исходные данные, численно находятся решения задачи электроимпедансной томографии.

Ключевые слова: электроимпедансная томография, кусочно-постоянная проводимость, численный анализ обусловленности.

1. Введение. Метод электроимпедансной томографии заключается в определении электрической проводимости среды по измерениям характеристик электрического поля на ее границе [1, 2]. Важное значение для электроимпедансной томографии имеет математическая обработка и интерпретация экспериментальных данных, которая сопряжена с решением определенного класса математических задач. Исследование таких математических задач началось с работы А. Кальдерона [3] и было продолжено во многих последующих работах [4–7].

В настоящей статье рассматривается двумерная задача электроимпедансной томографии в случае среды с кусочно-постоянной проводимостью, значения которой предполагаются известными. Задача сводится к определению неизвестной границы неоднородности, разделяющей области с различной проводимостью, по измерениям характеристик электрического поля на внешней границе исследуемой среды.

Численному решению задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости посвящено достаточно много работ [8–16]. Результаты, полученные в этих работах, свидетельствуют о высокой сложности и плохой обусловленности задачи численного определения неизвестной границы неоднородности. В связи с этим актуальным является исследование различных способов улучшения обусловленности этой задачи. В настоящей работе проводится численный анализ обусловленности задачи электроимпедансной томографии в зависимости от характера возбуждения потенциала электрического поля на внешней границе среды, а также в зависимости от количества таких возбуждений.

Перейдем к описанию математической постановки исследуемой задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости. Пусть Ω — односвязная ограниченная область на плоскости с границей Γ_0 и Ω_1 — односвязная область с границей Γ_1, такая, что $\overline{\Omega}_1 \in \Omega$. Кривые Γ_0 и Γ_1 достаточно гладкие. Обозначим через Ω_0 область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$. Пусть функция $u(M)$ такова, что $u \in C\big(\overline{\Omega}\big)$, $u(M) = u_i(M)$, $M \in \Omega_i$ $(i = 0, 1)$, где $u_i \in C^2(\Omega_i) \cap C^1\big(\overline{\Omega}_i\big)$ $(i = 0, 1)$ и

$$\Delta u_i(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \tag{1}$$

$$u_0(M) = u_1(M), \quad M \in \Gamma_1, \tag{2}$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \tag{3}$$

$$u_0(M) = f(M), \quad M \in \Gamma_0. \tag{4}$$

Здесь σ_0, σ_1 — заданные положительные постоянные, а $f(M)$ — известная функция, непрерывная и не постоянная на Γ_0.

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, 119991, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: gvrlserg@gmail.com

Сформулируем задачу электроимпедансной томографии, представляющую собой обратную задачу для краевой задачи (1)–(4). Пусть кривая Γ_0 и постоянные σ_0, σ_1 заданы, а кривая Γ_1 не известна. Требуется определить кривую Γ_1 и функцию $u(M)$, если на кривой Γ_0 задана следующая информация о решении задачи (1)–(4):

$$\frac{\partial u_0(M)}{\partial n} = g(M), \quad M \in \Gamma_0. \tag{5}$$

Здесь $g(M)$ — известная функция, непрерывная на Γ_0, а n — внешняя нормаль к Γ_0.

В данной работе проводится численный анализ обусловленности поставленной обратной задачи. Делается предположение о принадлежности кривой Γ_1 к классу кривых, задаваемых конечным набором параметров. В этом классе кривых при определенном уровне погрешности, вносимой в условие (5), численно находятся решения обратной задачи (1)–(5).

В первой части работы проводится численный анализ обусловленности поставленной обратной задачи в зависимости от вида функции $f(M)$ в условии (4). В качестве класса кривых Γ_1 рассматривается множество окружностей с различным радиусом и положением центра.

Во второй части работы рассматривается более общая постановка обратной задачи, в которой для определения неизвестной кривой Γ_1 используется несколько пар значений потенциала $u_0(M)$ и его нормальной производной $\dfrac{\partial u_0(M)}{\partial n}$ на границе Γ_0, соответствующих различным функциям $f(M)$ и $g(M)$:

$$u_0^j(M) = f^j(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_0^j(M)}{\partial n} = g^j(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Делается предположение о принадлежности кривой Γ_1 к классу эллипсов, параметризуемых величинами и углом поворота главных осей, а также положением центра. Задача определения неизвестной границы численно решается для разного количества m условий (6) и (7).

2. Анализ обусловленности в зависимости от характера возбуждения на внешней границе. Пусть кривая Γ_1 принадлежит классу окружностей, определяемых радиусом r: $r_{\min} \leqslant r \leqslant r_{\max}$ и координатами центра $M_0(x_0, y_0)$: $M_0 \in \Omega_2 \subset \Omega$.

Воспользуемся принципами построения уравнений для неизвестной границы Γ_1 и функции $u(M)$, предложенными в работах [17, 18], и будем искать решение краевой задачи (1)–(4) в виде суммы потенциалов простого слоя

$$u(M) = \int\limits_{\Gamma_0} \mu(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P + \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \int\limits_{\Gamma_1} \nu(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P, \tag{8}$$

где точка M с координатами (x, y) принадлежит области Ω, а плотности $\mu(P)$ и $\nu(P)$ являются решениями системы интегральных уравнений

$$\int\limits_{\Gamma_0} \mu(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P + \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \int\limits_{\Gamma_1} \nu(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P = f(M), \quad M \in \Gamma_0, \tag{9}$$

$$\pi\nu(M) - \int\limits_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P - \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \int\limits_{\Gamma_1} \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P = 0, \quad M \in \Gamma_1, \tag{10}$$

где n_m — внешняя нормаль к кривой Γ_1 в точке M.

Используя представление (8) и свойства потенциала простого слоя, получим

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_m} = \pi\mu(M) - \int\limits_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P - \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \int\limits_{\Gamma_1} \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P, \quad M \in \Gamma_0, \tag{11}$$

где n_m — внешняя нормаль к кривой Γ_0 в точке M.

Решение уравнений (9), (10) при фиксированных значениях параметров r, x_0 и y_0, задающих окружность Γ_1, и при известной функции $f(M)$ на контуре Γ_0 позволяет определить $\mu(M)$, $\nu(M)$ и вычислить по формуле (11) значение $\dfrac{\partial u(M)}{\partial n_m} = g_{\text{err}}(M; r, x_0, y_0)$ нормальной производной функции $u(M)$ на границе Γ_0.

Для численного анализа обусловленности обратной задачи (1)–(5) проводится серия вычислительных экспериментов, в которых оценивается множество ее приближенных решений. Окружность, задаваемая параметрами r, x_0 и y_0, считается приближенным решением задачи (1)–(5), если выполнено неравенство

$$\frac{\left\| g(M) - g_{\text{err}}(M, r, x_0, y_0) \right\|_{L_2[\Gamma_0]}}{\left\| g(M) \right\|_{L_2[\Gamma_0]}} \leqslant \delta,$$

где $\delta > 0$ — уровень погрешности.

Перейдем к результатам проведенных вычислительных экспериментов. Были проведены четыре вычислительных эксперимента, которые имели следующие общие параметры. Контур Γ_0 представлял собой окружность радиуса 50. В качестве неизвестного контура Γ_1 была также выбрана окружность радиуса 17, смещенная относительно внешней окружности (рис. 1). Постоянные $\sigma_0 = 10$, $\sigma_1 = 1$. Класс окружностей, в котором находилось приближенное решение обратной задачи, определялся радиусом $r^t = 6 + 2t$, $t = 0, 1, \ldots, 20$, и положением центра $x_0^k = \pm 2k$, $k = 0, 1, \ldots, 10$, $y_0^l = \pm 2l$, $l = 0, 1, \ldots, 10$.

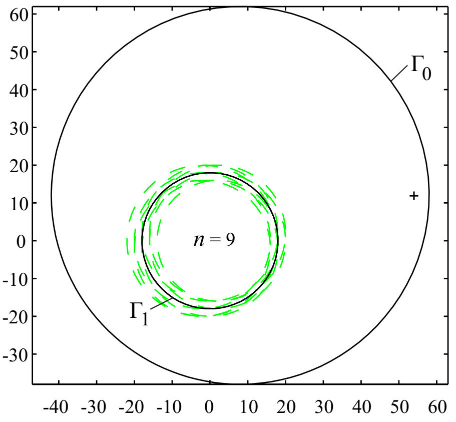

Рис. 1

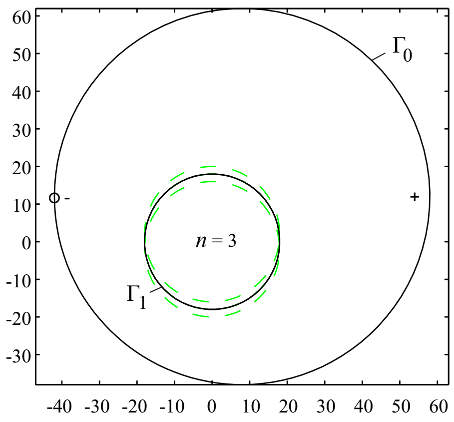

Рис. 2

Различными для проведенных вычислительных экспериментов были значения функции $f(M)$ в условии (5), с которыми решалась обратная задача. В вычислительных экспериментах значения функции $u(M) = u(x, y)$ на Γ_0 задавались в полярной системе координат с центром, совпадающим с центром окружности Γ_0, функциями полярного угла $u(50\cos\psi, 50\sin\psi) = f_s(\psi)$, $\psi \in [0, 2\pi]$, где $s = 1$–4 — номер эксперимента и

$$f_1(\psi) = 150\Big(\exp\big[-4\sin^2(\psi/2)\big]\Big),$$
$$f_2(\psi) = 150\Big(\exp\big[-4\sin^2(\psi/2)\big] - \exp\big[-4\cos^2(\psi/2)\big]\Big),$$
$$f_3(\psi) = 150\Big(\exp\big[-8\sin^2(\psi/2)\big] - \exp\big[-8\sin^2(\psi/2 - \pi/3)\big] - \exp\big[-8\sin^2(\psi/2 - 2\pi/3)\big]\Big),$$
$$f_4(\psi) = 150\Big(\exp\big[-4\sin^2(\psi)\big] - \exp\big[-4\cos^2(\psi)\big]\Big).$$

Характерным различием между функциями $f_s(\psi)$ является количество локальных максимумов модуля $\big|f_s(\psi)\big|$ на отрезке $[0, 2\pi]$, которое совпадает с номером s эксперимента.

Схема проведения вычислительных экспериментов была такова. С заданными Γ_0, Γ_1, σ_0, σ_1 и $f_s(M)$ решалась задача (1)–(4) и находилась функция $g_s(M)$, представляющая собой значение нормальной производной $u(M)$ на контуре Γ_0. Затем определялось множество приближенных решений обратной задачи, для которых

$$\frac{\left\| g_s(M) - g_{s_{\text{err}}}\left(M, r^t, x_0^k, y_0^l\right) \right\|_{L_2[\Gamma_0]}}{\left\| g_s(M) \right\|_{L_2[\Gamma_0]}} \leqslant 0.01.$$

На рис. 1–4 приведены результаты вычислительных экспериментов для $s = 1$, 2, 3, 4 соответственно. Пунктиром изображены окружности из множества приближенных решений обратной задачи, а параметр n, значение которого указано на изображении, равен количеству элементов этого множества.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов свидетельствуют о сильной зависимости обусловленности задачи электроимпедансной томографии (1)–(5) от вида функции $f(M)$ в условии (4). Дальнейшее увеличение числа экстремумов возбуждения, начиная с функции $f_2(M)$, не позволило добиться повышения точности определения неизвестной границы.

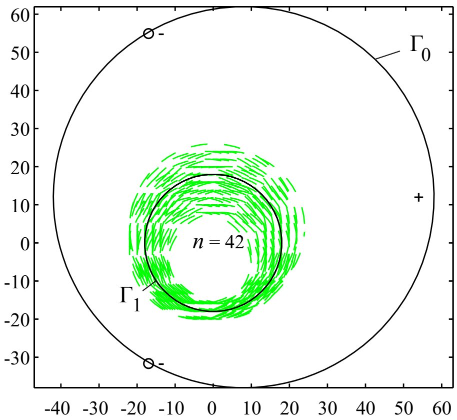

Рис. 3

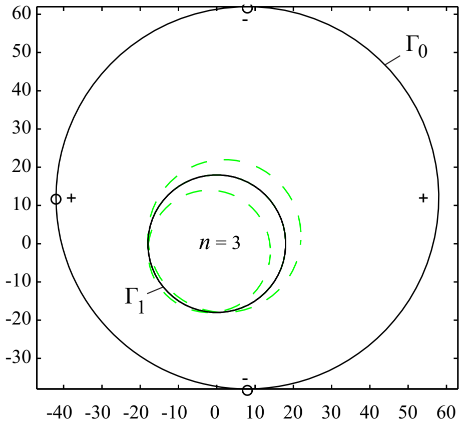

Рис. 4

3. Анализ обусловленности в зависимости от количества возбуждений на внешней границе. Сформулируем более общую постановку задачи электроимпедансной томографии, в которой для определения неизвестной границы, разделяющей области с различной электропроводностью, используется несколько различных возбуждений потенциала на внешней границе [18, 19].

Рассмотрим на плоскости односвязную ограниченную область Ω с границей Γ_0. Пусть Ω_1 односвязная область с границей Γ_1, такая, что $\overline{\Omega}_1 \in \Omega$. Кривые Γ_0 и Γ_1 достаточно гладкие. Обозначим через Ω_0 область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$. Пусть функции $u^j(M)$ таковы, что $u^j \in C\big(\overline{\Omega}\big)$, $u^j(M) = u_i^j(M)$, $M \in \Omega_i$ $(i = 0, 1)$, где $u_i^j \in C^2(\Omega_i) \cap C^1\big(\overline{\Omega}_i\big)$ $(i = 0, 1)$ и

$$\Delta u_i^j(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \tag{12}$$

$$u_0^j(M) = u_1^j(M), \quad M \in \Gamma_1, \tag{13}$$

$$\sigma_0 \, \frac{\partial u_0^j(M)}{\partial n} = \sigma_1 \, \frac{\partial u_1^j(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \tag{14}$$

$$u_0^j(M) = f^j(M), \quad M \in \Gamma_0. \tag{15}$$

Здесь $j = 1, 2, \ldots, m$ — число возбуждений на внешней границе; σ_0, σ_1 — заданные положительные постоянные, а $f^j(M)$ — известные функции, непрерывные и не постоянные на Γ_0.

Сформулируем обратную задачу. Пусть в краевых задачах (12)–(15) кривая Γ_0 и постоянные σ_0, σ_1 заданы, а кривая Γ_1 не известна. Требуется определить Γ_1, если для $j = 1, 2, \ldots, m$ задана дополнительная информация о решениях $u^j(M)$ задач (12)–(15):

$$\frac{\partial u^j(M)}{\partial n} = g^j(M), \quad M \in \Gamma_0. \tag{16}$$

Здесь $g^j(M)$ — известные функции, непрерывные на Γ_0, а n — внешняя нормаль к Γ_0.

Будем предполагать, что кривая Γ_1 принадлежит классу эллипсов, параметризуемых координатами центра $M_0(x_0, y_0)$, величинами главных осей l и αl, а также углом поворота эллипса β:

$$\big((x - x_0)\cos\beta + (y - y_0)\sin\beta\big)^2 + \alpha^2\big((y - y_0)\cos\beta - (x - x_0)\sin\beta\big)^2 = l^2.$$

Здесь $M_0(x_0, y_0)$: $M_0 \in \Omega_2 \subset \Omega$; $l_{\min} \leqslant l \leqslant l_{\max}$; $1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}$ и $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$.

Будем искать приближенные решения обратной задачи (12)–(16) в описанном классе эллипсов. Рассмотрим при фиксированном j функцию $f^j(M)$ как правую часть в условии (4) краевой задачи (1)–(4). Решив систему уравнений (9), (10) при заданном контуре Γ_1, определяемом набором параметров x_0, y_0, l, α и β, вычислим по формуле (11) значение $\dfrac{\partial u^j(M)}{\partial n_m} = g^j_{\text{err}}(M; x_0, y_0, l, \alpha, \beta)$ нормальной производной функции $u^j(M)$ на границе Γ_0.

Эллипс $\Gamma_1(x_0, y_0, l, \alpha, \beta)$ считается приближенным решением обратной задачи (12)–(16), если выполнены неравенства

$$\frac{\left\| g^j(M) - g^j_{\text{err}}(M, x_0, y_0, l, \alpha, \beta)\right\|_{L_2[\Gamma_0]}}{\left\| g^j(M)\right\|_{L_2[\Gamma_0]}} \leqslant \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\delta > 0$ — уровень погрешности.

Для численного анализа обусловленности рассматриваемой обратной задачи проводится серия вычислительных экспериментов, в которых при различном числе измерений m оценивается множество приближенных решений.

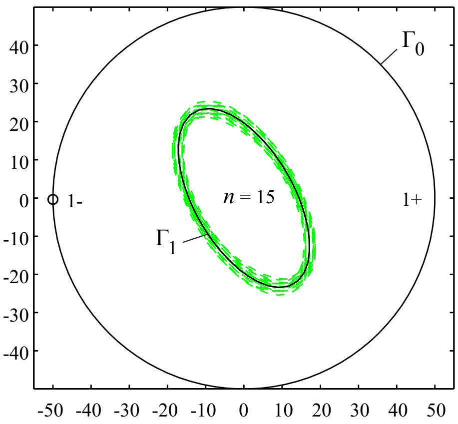

Рис. 5

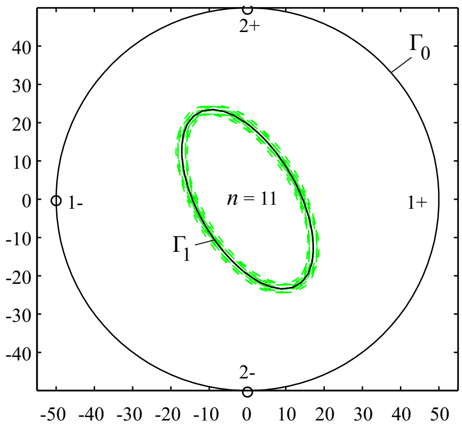

Рис. 6

Перейдем к описанию проведенных вычислительных экспериментов. Общие для четырех проведенных экспериментов параметры были таковы. Контур Γ_0 представлял собой окружность радиуса 50. В качестве неизвестного контура Γ_1 был выбран эллипс с главными осями величиной 50 и 25 (рис. 5). Постоянные $\sigma_0 = 10$, $\sigma_1 = 1$. Множество значений параметров, описывающих класс эллипсов, в котором находилось приближенное решение обратной задачи, таково: $$\begin{cases} x_0^k = \pm 2k, & k = 0, 1, \ldots, 5; \\ y_0^z = \pm 2z, & z = 0, 1, \ldots, 5; \\ l^s = 18 + 2s, & s = 0, 1, \ldots, 5; \\ \alpha^t = 1 + 1/2t, & t = 0, 1, \ldots, 4; \\ \beta^q = 0 + \pi/30q, & q = 0, 1, \ldots, 29. \end{cases}$$

Различие в проведенных вычислительных экспериментах состояло в числе возбуждений m, которое совпадало с номером 1, 2, 3 и 4 вычислительного эксперимента. Значения функций $u^j(M) = u^j(x, y)$ на Γ_0 задавались в полярной системе координат с центром, совпадающим с центром окружности Γ_0, функциями полярного угла $u^j(50\cos\psi, 50\sin\psi) = f^j(\psi)$, $\psi \in [0, 2\pi]$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$:

$$\begin{aligned} f^1(\psi) &= 150\Big(\exp\big[-4\sin^2(\psi/2)\big] - \exp\big[-4\cos^2(\psi/2)\big]\Big), \\ f^2(\psi) &= 150\Big(\exp\big[-4\sin^2(\psi/2 - \pi/4)\big] - \exp\big[-4\cos^2(\psi/2 - \pi/4)\big]\Big), \\ f^3(\psi) &= 150\Big(\exp\big[-4\sin^2(\psi/2 - \pi/8)\big] - \exp\big[-4\cos^2(\psi/2 - \pi/8)\big]\Big), \\ f^4(\psi) &= 150\Big(\exp\big[-4\sin^2(\psi/2 - 3\pi/8)\big] - \exp\big[-4\cos^2(\psi/2 - 3\pi/8)\big]\Big). \end{aligned}$$

В первом вычислительном эксперименте $m = 1$ и $u^1(M) = f^1(M)$.

Во втором эксперименте $m = 2$ и $u^1(M) = f^1(M)$, $u^2(M) = f^2(M)$.

В третьем эксперименте $m = 3$ и $u^1(M) = f^1(M)$, $u^2(M) = f^2(M)$, $u^3(M) = f^3(M)$.

В четвертом эксперименте $m = 4$ и $u^1(M) = f^1(M)$, $u^2(M) = f^2(M)$, $u^3(M) = f^3(M)$, $u^4(M) = f^4(M)$.

Схема проведения вычислительных экспериментов была следующей. С заданными Γ_0, Γ_1, σ_0, σ_1 и $f^j(M)$ решались задачи (12)–(15) и находились функции $g^j(M)$, представляющие собой значения нормальной производной $u^j(M)$ на контуре Γ_0. Затем определялось множество приближенных решений обратной задачи, для которых

$$\frac{\left\|g^j(M) - g^j_{\mathrm{err}}(M, x_0, y_0, l, \alpha, \beta)\right\|_{L_2[\Gamma_0]}}{\left\|g^j(M)\right\|_{L_2[\Gamma_0]}} \leqslant 0.01, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

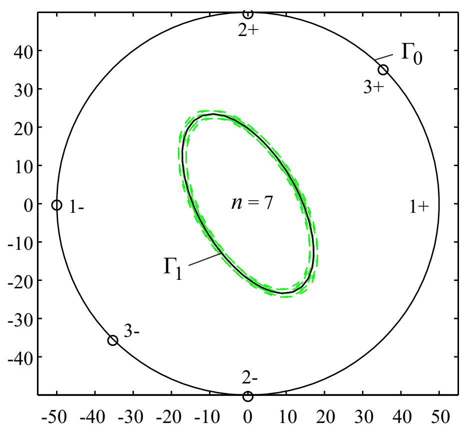

Рис. 7

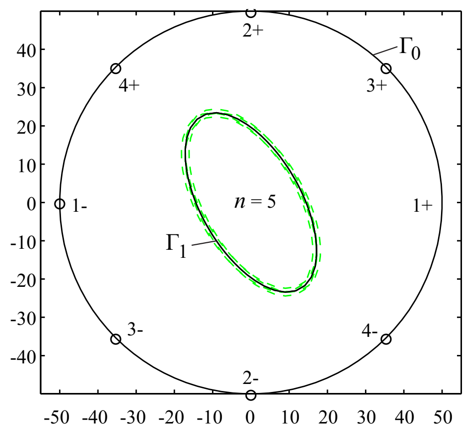

Рис. 8

На рис. 5–8 приведены результаты вычислительных экспериментов для $m = 1, 2, 3, 4$ соответственно. Пунктиром изображены эллипсы из множества приближенных решений обратной задачи, а параметр n, значение которого указано на изображении, равен количеству элементов этого множества.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов свидетельствуют о возможности повышения точности определения неизвестной границы за счет увеличения числа измерений m в обратной задаче электроимпедансной томографии (12)–(16).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 14–01–00244).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borcea L.* Electrical impedance tomography // Inverse Problems. 2002. **18**. 99–136.
2. *Holder D.S. (Ed.)* Electrical impedance tomography: methods, history and applications. Bristol: Institute of Physics Publishing, 2005.
3. *Calderón A.P.* On an inverse boundary value problem // Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics. Rio de Janeiro: Soc. Brasileira de Matematica, 1980. 65–73.
4. *Alessandrini G., Isakov V.* Analyticity and uniqueness for the inverse conductivity problem // Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste. 1996. **28**. 351–369.
5. *Barceló B., Fabes E., Seo J.K.* The inverse conductivity problem with one measurement: uniqueness for convex polyhedra // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. **122**, N 1. 183–189.
6. *Bellout H., Friedman A., Isakov V.* Stability for an inverse problem in potential theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. **332**, N 1. 271–296.
7. *Astala K., Päivärinta L.* Calderón's inverse conductivity problem in the plane // Ann. Math. 2006. **163**. 265–299.
8. *Kang H., Seo J.K.* The layer potential technique for the inverse conductivity problem // Inverse Problems. 1996. **12**, N 3. 267–278.
9. *Brühl M., Hanke M.* Numerical implementation of two noniterative methods for locating inclusions by impedance tomography // Inverse Problems. 2000. **16**, N 4. 1029–1042.
10. *Eckel H., Kress R.* Nonlinear integral equations for the inverse electrical impedance problem // Inverse Problems. 2007. **23**, N 2. 475–491.
11. *Ts M.-E., Lee E., Seo J.K., Harrach B., Kim S.* Projective electrical impedance reconstruction with two measurements // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2013. **73**, N 4. 1659–1675.
12. *Lee E., Ts M.-E., Seo J.K., Woo E.J.* Breast EIT using a new projected image reconstruction method with multi-frequency measurements // Physiological Measurement. 2012. **33**, N 5. 751–765.
13. *Seo J.K., Kwon O., Ammari H., Woo E.J.* A mathematical model for breast cancer lesion estimation: electrical impedance technique using TS2000 commercial system // IEEE Trans. Biomed. Eng. 2004. **51**, N 11. 1898–1906.
14. *Kwon O., Seo J.K., Yoon J.R.* A real-time algorithm for the location search of discontinuous conductivities with one measurement // Comm. Pure Appl. Math. 2002. **55**, N 1. 1–29.
15. *Kang H., Seo J.K., Sheen D.* Numerical identification of discontinuous conductivity coefficients // Inverse Problems. 1997. **13**, N 1. 113–123.

16. *Knudsen K., Lassas M., Mueller J.L., Siltanen S.* Regularized D-bar method for the inverse conductivity problem // Inverse Problems and Imaging. 2009. **3**, N 4. 599–624.
17. *Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин А.В., Калинин В.В.* Численные методы решения некоторых обратных задач электрофизиологии сердца // Дифференциальные уравнения. 2009. **45**, № 7. 1014–1022.
18. *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Численные методы определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. **51**, № 8. 1476–1489.
19. *Гаврилов С.В.* Итерационный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и нескольких измерений на границе // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 26–30.

Поступила в редакцию
15.04.2014

Numerical Conditioning Analysis of Two-Dimensional Problems in Electrical Impedance Tomography

S. V. Gavrilov [1]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Junior Scientist, e-mail: gvrlserg@gmail.com*

Received April 15, 2014

Abstract: A two-dimensional problem of electrical impedance tomography with a piecewise constant electrical conductivity with two known values is considered. It is required to determine the unknown boundary between the domains of different conductivities. The measurements of electric field characteristics on the outer boundary of the medium under study are used as initial data. The numerical conditioning analysis of this problem is performed with a respect to the type and number of electrical potential excitations at the outer boundary. It is assumed that the class of curves representing the unknown inhomogeneity boundary is defined by a finite set of parameters. With a certain accuracy of initial data, the electrical impedance problem is solved numerically in this class of curves.

Keywords: electrical impedance tomography, piecewise constant conductivity, numerical conditioning.

References

1. L. Borcea, “Electrical Impedance Tomography,” Inverse Problems **18**, 99–136 (2002).
2. D. S. Holder (Ed.), *Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications* (Institute of Physics Publishing, Bristol, 2005).
3. A. P. Calderón, “On an Inverse Boundary Value Problem,” in *Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics* (Soc. Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro, 1980), pp. 65–73.
4. G. Alessandrini and V. Isakov, “Analyticity and Uniqueness for the Inverse Conductivity Problem,” Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **28**, 351–369 (1996).
5. B. Barceló, E. Fabes, and J. K. Seo, “The Inverse Conductivity Problem with one Measurement: Uniqueness for Convex Polyhedra,” Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1), 183–189 (1994).
6. H. Bellout, A. Friedman, and V. Isakov, “Stability for an Inverse Problem in Potential Theory,” Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1), 271–296 (1992).
7. K. Astala and L. Päivärinta, “Calderón’s Inverse Conductivity Problem in the Plane,” Ann. Math. **163**, 265–299 (2006).
8. H. Kang and J. K. Seo, “The Layer Potential Technique for the Inverse Conductivity Problem,” Inverse Problems **12** (3), 267–278 (1996).
9. M. Brühl and M. Hanke, “Numerical Implementation of Two Noniterative Methods for Locating Inclusions by Impedance Tomography,” Inverse Problems **16** (4), 1029–1042 (2000).
10. H. Eckel and R. Kress, “Nonlinear Integral Equations for the Inverse Electrical Impedance Problem,” Inverse Problems **23** (2), 475–491 (2007).
11. M.-E. Ts, E. Lee, J. K. Seo, et al., “Projective Electrical Impedance Reconstruction with Two Measurements,” SIAM J. Appl. Math. **73** (4), 1659–1675 (2013).

12. E. Lee, M.-E. Ts, J. K. Seo, and E. J. Woo, "Breast EIT Using a New Projected Image Reconstruction Method with Multi-Frequency Measurements," Physiol. Meas. **33** (5), 751–765 (2012).

13. J. K. Seo, O. Kwon, H. Ammari, and E. J. Woo, "A Mathematical Model for Breast Cancer Lesion Estimation: Electrical Impedance Technique Using TS2000 Commercial System," IEEE Trans. Biomed. Eng. **51** (11), 1898–1906 (2004).

14. O. Kwon, J. K. Seo, and J. R. Yoon, "A Real-Time Algorithm for the Location Search of Discontinuous Conductivities with One Measurement," Comm. Pure Appl. Math. **55** (1), 1–29 (2002).

15. H. Kang, J. K. Seo, and D. Sheen, "Numerical Identification of Discontinuous Conductivity Coefficients," Inverse Problems **13** (1), 113–123 (1997).

16. K. Knudsen, M. Lassas, J. L. Mueller, and S. Siltanen, "Regularized D-Bar Method for the Inverse Conductivity Problem," Inverse Probl. Imaging **3** (4), 599–624 (2009).

17. A. M. Denisov, E. V. Zakharov, A. V. Kalinin, and V. V. Kalinin, "Numerical Methods for Some Inverse Problems of Heart Electrophysiology," Differ. Uravn. **45** (7), 1014–1022 (2009) [Differ. Equ. **45** (7), 1034–1043 (2009)].

18. S. V. Gavrilov and A. M. Denisov, "Numerical Methods for Determining the Inhomogeneity Boundary in a Boundary Value Problem for Laplace's Equation in a Piecewise Homogeneous Medium," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **51** (8), 1476–1489 (2011) [Comput. Math. Math. Phys. **51** (8), 1377–1390 (2011)].

19. S. V. Gavrilov, "An Iterative Method for Solving a 3D Electrical Impedance Tomography Problem in The Case of Piecewise Constant Conductivity and Several Measurements on the Boundary," Vychisl. Metody Programm. **14**, 26–30 (2013).