

УДК 519.6; 517.958:5

ЗАДАЧИ ВОЛНОВОЙ ТОМОГРАФИИ С НЕПОЛНЫМ ДИАПАЗОНОМ ДАННЫХ

А. В. Гончарский¹, С. Ю. Романов², С. Ю. Серёжников³

Сравниваются различные схемы волновой томографии с полным и неполным диапазоном данных. Обратные задачи томографии рассматриваются как коэффициентные обратные задачи для волнового уравнения. Алгоритмы решения обратных задач основаны на прямом вычислении градиента функционала невязки на основе решения сопряженной задачи для гиперболического уравнения в частных производных. Анализируются схемы томографии на отражение и прохождение. Модельные расчеты выполнены на графических процессорах суперкомпьютерного вычислительного комплекса МГУ “Ломоносов” как в двумерном, так и в трехмерном представлениях.

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи, волновое уравнение, волновая томография, неполный диапазон данных, GPU, суперкомпьютеры.

1. Введение. Одной из актуальных задач современной медицины является разработка ультразвуковых томографов для диагностики мягких тканей и в первую очередь для дифференциальной диагностики рака молочной железы. Особая важность этой проблемы связана с тем, что смертность от заболевания раком молочной железы стоит на первом месте среди всех заболеваний женской половины человечества.

В настоящее время волновая томография получила мощный импульс для своего развития после разработки алгоритмов решения задачи как коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения. Задачи волновой томографии даже в простейшей модели для волнового уравнения сводятся к нелинейным коэффициентным задачам, решение которых представляет серьезную проблему. По сути дела в волновой томографии приходится иметь дело с трехмерной нелинейной задачей. Существует подход, в рамках которого аналогично рентгеновской томографии обратная задача рассматривается послойно, как набор двумерных задач. Возникающие при этом двумерные задачи все равно являются нелинейными. Разработка эффективных алгоритмов решения двумерных и трехмерных обратных задач волновой томографии — это актуальная задача, которой посвящено большое количество публикаций.

Важным результатом в этой области является открытие возможности явно вычислять градиент функционала невязки итерационного процесса в рассматриваемой нелинейной задаче. Градиент функционала невязки в разных постановках представляется с помощью решения некоторой сопряженной задачи [1–3].

Существуют различные схемы волновой томографии. В литературе используются послойные томографические схемы как на прохождение [4–6], так и на отражение [7, 8]. Часть работ посвящена исследованию алгоритмов решения трехмерных [9–11] и одномерных [12, 13] задач. В настоящее время разработаны макеты ультразвуковых томографов для сравнительной диагностики рака молочной железы [14–16]. Понимание предельных возможностей различных томографических схем важно для создания макетов и для разработки и промышленного изготовления специализированных ультразвуковых томографов. Именно этой задаче и посвящена настоящая работа.

В рамках модели волнового уравнения исследуются томографические схемы на прохождение и отражение как в послойном варианте томографии, так и непосредственно в 3D варианте, где искомой является функция распределения скорости звука в неоднородном объекте. Математическая модель учитывает такие эффекты, как дифракция, рефракция и переотражение волн.

2. Постановка прямой и обратной задачи волновой томографии в двумерном и трехмерном случаях. В работах [1, 2, 17–21] описаны различные постановки коэффициентных обратных задач волновой томографии. В настоящей статье обратная задача рассматривается в скалярном приближении

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1., стр. 4, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru

² Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1., стр. 4, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: romanov60@gmail.com

³ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1., стр. 4, 119992, Москва; электроник, e-mail: s2110sj@gmail.com

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

для уравнения гиперболического типа. Акустическое поле $u(r, t)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$), создаваемое точечным источником, находящимся в точке r_0 и генерирующим импульс, который описывается функцией $f(t)$, удовлетворяет волновому уравнению:

$$c(r)u_{tt}(r, t) - \Delta u(r, t) = \delta(r - r_0)f(t), \tag{1}$$

$$u(r, t = 0) = u_t(r, t = 0) = 0, \quad \partial_n u|_{\Gamma T} = p(r, t), \tag{2}$$

где t — время, $0 < t < T$, u — акустическое давление, $c(r) = v^{-2}(r)$, $v(r)$ — скорость звука в среде, Δ — оператор Лапласа по $r \in \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$), Γ — граница области Ω , $\partial_n u|_{\Gamma T}$ — производная вдоль нормали к поверхности Γ в области $\Gamma \times (0, T)$, $p(r, t)$ — некоторая известная функция.

Скалярная волновая модель позволяет описать дифракцию, рефракцию, переотражение волн в среде. Единственным параметром, описывающим неоднородности среды, является скорость звука $v(r)$. Несмотря на такое упрощение, обратные задачи томографии в волновой модели являются сложными нелинейными, некорректно поставленными задачами.

Рассмотрим обратную по отношению к задаче (1), (2) задачу, которая состоит в нахождении неизвестной скорости звука $v(r)$ по экспериментальным данным измерения акустического давления $U(\gamma, t)$ на границе Γ области Ω за время $(0, T)$ при различных положениях источника r_0 . Время T обычно выбирается с таким расчетом, чтобы все основные отраженные и преломленные волны достигли приемников и вышли за границу Γ . Мы ставим обратную задачу как задачу минимизации функционала невязки:

$$\Phi(u(c)) = \frac{1}{2} \|u|_{\Gamma T} - U\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (u(\gamma, t) - U(\gamma, t))^2 d\gamma dt. \tag{3}$$

Здесь $\|\cdot\|^2$ — квадрат нормы в пространстве $L_2(\Gamma \times (0, T))$, $U(\gamma, t)$ — экспериментальные данные на границе Γ области Ω за время $(0, T)$, $u(r, t)$ — решение прямой задачи (1), (2) при заданной $c(r) = 1/v^2(r)$.

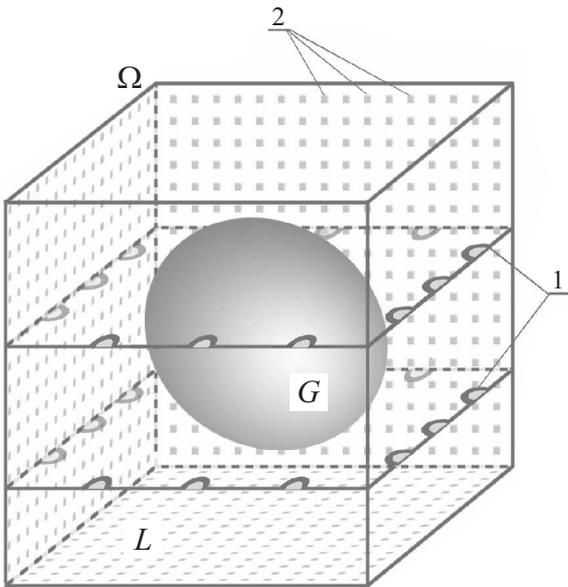


Рис. 1. Схема эксперимента в 3D задаче

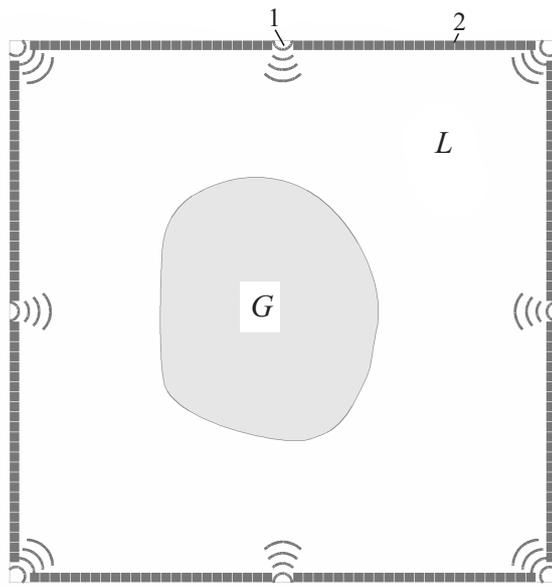


Рис. 2. Послойная схема эксперимента

Рис. 1 иллюстрирует схему расположения источников и приемников для решения трехмерной обратной задачи. Цифрой 1 обозначены источники волнового излучения, приемники излучения обозначены цифрой 2 и расположены на гранях куба Ω . Будем считать, что диагностируемый объект G расположен в кубе Ω . Остальное пространство L заполнено водой с известной скоростью v_0 . Рис. 2 иллюстрирует схему расположения источников и приемников для двумерного варианта волновой томографии. На рис. 2 цифрой 1 обозначены источники, цифрой 2 — приемники, G — исследуемая область, L — область с известной скоростью v_0 .

Прорывные результаты в области решения задач волновой томографии связаны с возможностью прямого вычисления градиента функционала $\Phi(u(c))$. Для такой постановки задачи эти результаты опубликованы в работах [3, 18]. В похожих постановках выражение для градиента получено, например, в

работах [1, 2]. Градиент $\Phi'(u(c))$ имеет вид

$$\Phi'_C(u(c), c) = \int_0^T w_t(r, t) u_t(r, t) dt, \quad (4)$$

где $u(r, t)$ — решение задачи (1), (2), а $w(r, t)$ — решение следующей “сопряженной” задачи при заданной функции $c(r)$:

$$c(r)w_{tt}(r, t) - \Delta w(r, t) = 0, \quad (5)$$

$$w(r, t = 0) = w_t(r, t = 0) = 0, \quad \partial_n w|_{\Gamma T} = u|_{\Gamma T} - U. \quad (6)$$

В тех точках границы Γ , где экспериментальные данные $U(\gamma, t)$ не заданы, ставится граничное условие $\partial_n w|_{\Gamma T} = 0$. Таким образом, для вычисления градиента $\Phi'_C(u)$ необходимо решить основную (1), (2) и “сопряженную” (5), (6) задачи. Зная Φ'_C из (4), можно построить различные итеративные схемы для минимизации функционала невязки (3) [17].

3. Численные алгоритмы решения двумерной и трехмерной задачи. Для решения как двумерной, так и трехмерной обратной задачи был использован конечно-разностный метод во временной области. В такой постановке решение волновых дифференциальных уравнений сводится к решению разностных уравнений. Приведем дискретизацию задачи в трехмерном случае. На области изменения пространственных аргументов (x, y, z) и времени t введем равномерную дискретную сетку с шагом сетки h по пространственным переменным и шагом τ по времени. Для аппроксимации частных производных второго порядка в уравнении (1) используем конечные разности, имеющие второй порядок аппроксимации. В области, не содержащей источников, получаем следующую явную разностную схему для дифференциального уравнения (1):

$$u_{ijl}^{k+1} = \frac{1}{c_{ijl}} \tau^2 \Delta u_{ijl}^k + 2u_{ijl}^k - u_{ijl}^{k-1}, \quad (7)$$

где

$$\Delta u_{ijl}^k = \frac{u_{i+1,j,l}^k - 2u_{ijl}^k + u_{i-1,j,l}^k}{h^2} + \frac{u_{i,j+1,l}^k - 2u_{ijl}^k + u_{i,j-1,l}^k}{h^2} + \frac{u_{i,j,l+1}^k - 2u_{ijl}^k + u_{i,j,l-1}^k}{h^2},$$

u_{ijl}^k — значения функции $u(r, t)$ в точке (i, j, l) в момент времени k , c_{ijl} — значения функции $c(r)$ в точке (i, j, l) . Параметры h и τ связаны условием устойчивости Куранта $c^{-0.5}\tau < \frac{h}{\sqrt{3}}$ для 3D задачи. Расчет сопряженной задачи (5), (6) выполняется по аналогичным разностным формулам.

В качестве граничных условий для модельных расчетов использовано условие неотражения на границе: $\partial_n u|_{\Gamma T} = -c^{0.5} \partial_t u|_{\Gamma T}$.

Для двумерной задачи разностные формулы получаются аналогично и отличаются от приведенных выше отбрасыванием индекса l и переменной z .

В модельных расчетах исследуемая область окружена однородной средой, в которой процесс распространения зондирующего импульса известен, что позволяет вычислить $u(r, t)$ и $u_t(r, t)$ при малом $t = \tau$ для моделирования источника зондирующего импульса. Зондирующий импульс как функция $u(r)$ при фиксированном времени имеет вид, приведенный на рис. 3.

Для проведения модельных расчетов был использован следующий итерационный процесс. В качестве начального приближения выбирается значение $c^{(0)} = c_0 = \text{const}$, соответствующее скорости звука в чистой воде $v_0 = 1.5$ км/с.

На каждой итерации (m) выполняются следующие действия.

1. Расчет начального импульса источника.
2. Решение прямой задачи (1), (2) для текущего итерационного приближения $c^{(m)}$. Расчет распространения волны $u^{(m)}(r, t)$ выполняется по формуле (7). Вычисляются значения $u(r, t)$ на каждом из детекторов.
3. Вычисление невязки $\Phi^{(m)} = \Phi(u^{(m)}(r))$ из формулы (3).
4. Решение сопряженной задачи (5), (6) для $w^{(m)}(r, t)$.
5. Вычисление градиента $\Phi'_C(u^{(m)}(r))$ по формуле (4) для всех источников.
6. Коррекция текущего приближения $c^{(m+1)} = c^{(m)} + \lambda^{(m)} \Phi'_C(u^{(m)}(r))$. Возврат к шагу 2.

Итерационный процесс останавливается, если невязка становится меньше заданной величины, которая соответствует известной априори погрешности входных данных, либо при достижении заданного

$$\text{минимального значения скорости убывания невязки } d\Phi: \frac{|\Phi^{(m)} - \Phi^{(m+1)}|}{\Phi^{(m+1)}} < d\Phi.$$

Шаг метода градиентного спуска $\lambda^{(m)}$ выбирается из априорных соображений. Для более точного определения шага для наискорейшего спуска потребовалось бы выполнять дополнительные итерации, что увеличило бы время расчетов вдвое и более. Если невязка $\Phi^{(m)}$ на следующей итерации оказывается больше, чем $\Phi^{(m-1)}$, то шаг $\lambda^{(m)}$ уменьшается в 1.5 раза.

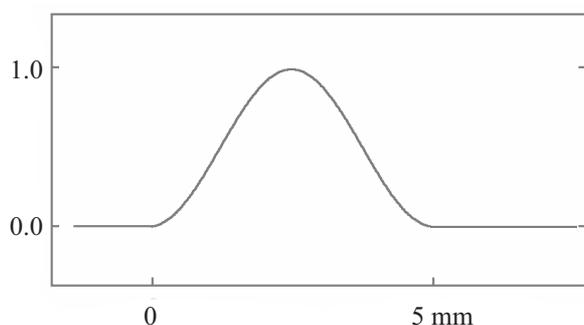


Рис. 3. График зондирующего импульса

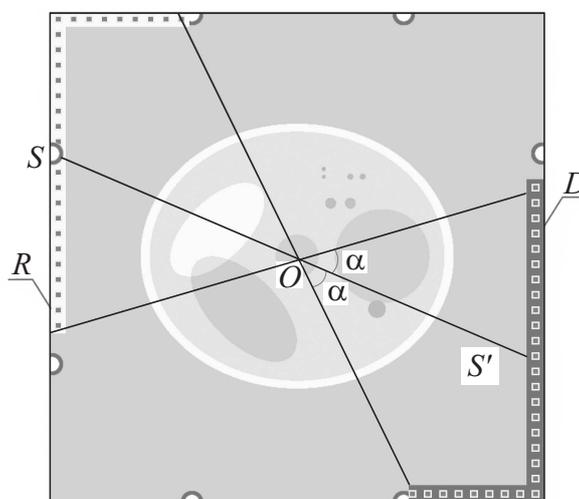


Рис. 4. Схема 2D эксперимента на прохождении и отражение

4. Использование суперкомпьютерных технологий для решения задач волновой томографии. Обратные задачи волновой томографии являются очень сложными с вычислительной точки зрения [22, 23]. Для получения достаточно высокого разрешения необходимо решать 3D задачу восстановления трехмерной функции $c(x, y, z)$ на сетке размерностью до 400^3 точек. Таким образом, необходимо решать нелинейную коэффициентную обратную задачу с общим числом неизвестных порядка 100 млн.

Предлагаемый в работе численный метод с явной разностной схемой относится к SIMD-алгоритмам (Single Instruction — Multiple Data) и имеет высокую степень параллелизма. Такие задачи являются очень распространенными и могут быть эффективно решены на кластерных системах как с процессорами общего назначения, так и с графическими картами (GPU).

В работах [3, 24, 25] приведены результаты распараллеливания 2D задачи на кластерной системе с использованием процессоров общего назначения; эти результаты показали высокую эффективность такого распараллеливания при использовании до десятков тысяч процессорных ядер. Однако такие вычислительные конфигурации с большим количеством процессоров общего назначения достаточно дороги.

Графические процессоры, получившие широкое распространение в последнее время, позволяют получить очень высокую производительность на задачах такого типа и, следовательно, сократить требования к вычислительным ресурсам.

Вычислительная конфигурация, необходимая для решения задач ультразвуковой томографии, может быть реализована в рамках одной стойки с потребляемой мощностью 10–20 кВт, что делает возможным установку небольших, но высокопроизводительных суперкомпьютеров непосредственно в медицинских учреждениях, а также решение задач ультразвуковой томографии на практике за приемлемое для медицинских исследований время. В настоящее время GPU успешно используются в задачах ультразвуковой томографии [26, 27].

Расчеты для настоящей работы проводились на кластере “Ломоносов” суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М. В. Ломоносова [28], при этом в 3D задаче задействовались 24 графических процессора Nvidia Tesla X2070. Несмотря на огромные размеры массивов функций $u(r, t)$ и $w(r, t)$, заданных на сетках размерностью n^2m для 2D задачи и n^3m для 3D задачи, разработанный алгоритм решения таков, что хранить в памяти необходимо только данные небольших размеров $\sim n^2$ и $\sim nm$ для 2D расчетов и $\sim n^3$ и $\sim n^2m$ для 3D расчетов, что позволяет разместить их полностью в высокопроизводительной памяти GPU. В результате применение GPU в такой задаче только за счет более скоростной памяти дает ускорение расчетов по сравнению с обычным процессором до 50 раз в зависимости от конфигурации.

5. Модельные расчеты двумерных задач волновой томографии. Для 2D модели были заданы следующие значения параметров: размер импульса $\lambda = 5$ мм, диапазон значений скорости звука в тестовом объекте — 1.43–1.6 км/с, в окружающей среде — 1.5 км/с, размер расчетной области $h = 204$ мм,

размерность разностной сетки 1024×1024 точек. Схема эксперимента приведена на рис. 4. Во всех модельных расчетах использовалось 8 положений источников S , обозначенных на рисунке по 2 на каждой стороне квадрата. Приемники располагались также по сторонам квадрата с шагом 0.8 мм. В первом эксперименте приемники располагались по всему периметру квадрата (эксперимент с полным диапазоном данных).

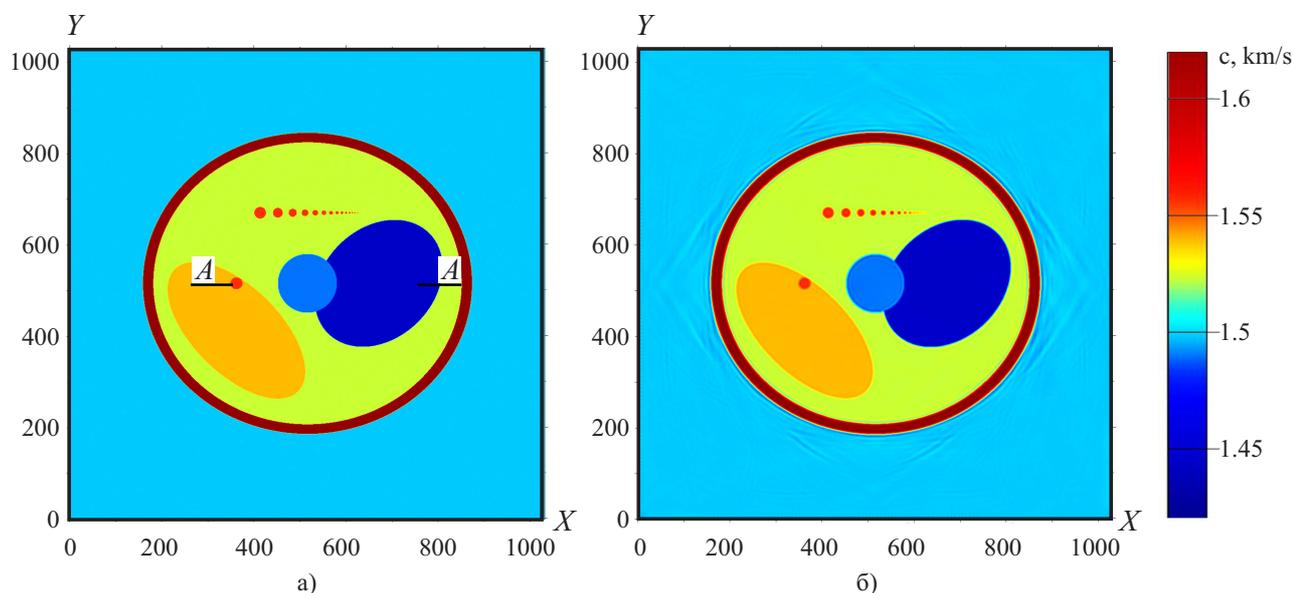


Рис. 5. Эксперимент с полным диапазоном данных: а) исходное 2D изображение; б) восстановленное изображение

На рис. 5а показано исходное изображение тестового объекта, на рис. 5б — восстановленное. Рисунки снабжены справа шкалой значений функции скорости. Как видно из рисунков, в такой конфигурации источников и приемников (томографическая схема с полным диапазоном данных) при маленькой ошибке измерений даже при небольшом количестве источников изображение может быть восстановлено достаточно точно. Время расчета 2D задачи на 8 графических картах составило около 30 мин., проведено 200 итераций.

Рассмотрим схемы томографии на отражение и томографии на прохождение. Восемь источников импульсов в обеих схемах, как и в предыдущем эксперименте, располагаются со всех сторон (рис. 4), но принимаются либо только прошедшие, либо только отраженные волны. При расчете модельной задачи на прохождение приемники располагались с противоположной от источника стороны квадрата в области D на границе расчетной области (рис. 4). Размер области D задавался углом α , причем угол между направлениями из источника S в центр O и из центра O на приемники находится в пределах $\pm\alpha$. При расчете на отражение приемники располагались в области R с той же стороны квадрата, что и источник. Размер области R также задавался углом α .

Восстановленные по схеме на прохождение изображения при $\alpha = 60^\circ$ приведены на рис. 6а. Из сравнения рис. 5 и 6 видно, что томографические схемы на прохождение дают результаты с худшим разрешением, чем томографические схемы с полным диапазоном данных. Достаточно хорошо восстанавливаются абсолютное значение скорости и геометрические очертания неоднородностей.

Задача на отражение возникает во многих приложениях: например, в сейсмических исследованиях, неразрушающем контроле ультразвуком сварных швов [29], томографии неоднородностей морского дна [30], акустической диагностике железнодорожных насыпей [31], ультразвуковой диагностики в медицине [7].

Восстановленные по схеме на отражение изображения при $\alpha = 45^\circ$ приведены на рис. 6б. При использовании только отраженных волн значение скорости звука в среде не восстанавливается, на изображении видны лишь границы, где меняется акустическое сопротивление среды и образуется отраженная волна, что согласуется с результатами работы [8]. Кроме того, изображение границ подвержено геометрическому искажению и виден эффект удвоения контура границ. На физическом уровне строгости этот эффект можно объяснить тем, что одна и та же граница для разных положений источников восстанавливается в разных местах вследствие неправильного абсолютного значения восстановленной скорости в среде.

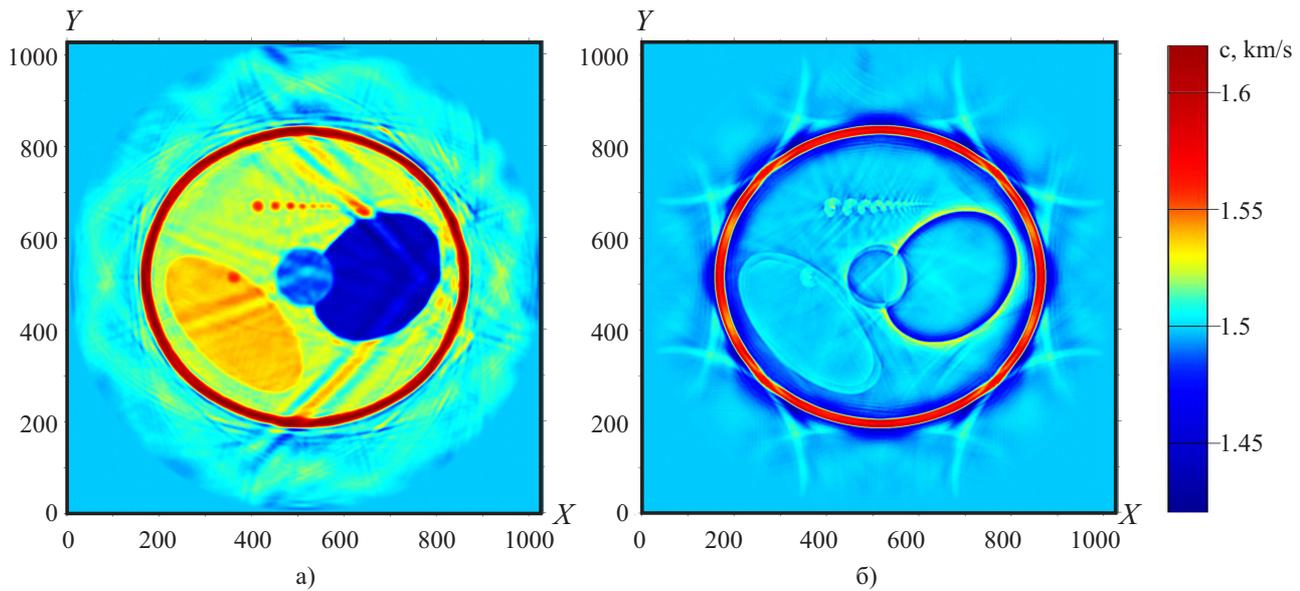


Рис. 6. Восстановленное 2D изображение по схеме: а) на прохождение ($\alpha = 60^\circ$); б) на отражение ($\alpha = 45^\circ$)

Более точное положение границ неоднородностей можно найти, если знать приближенно распределение скорости звука внутри неоднородностей. Эти выводы хорошо согласуются с результатами, полученными в работе [9], в которых на первом этапе в модели волновой томографии на прохождение приближенно восстанавливается скоростной разрез, а затем полученные данные скоростного разреза используются при решении задачи на отражение. Аналогичные результаты типичны для интерпретации данных в геофизике и сейсморазведке, где для точного определения границ неоднородности необходимо иметь априорные оценки скоростного разреза, который может быть найден, например, бурением скважин и т.п.

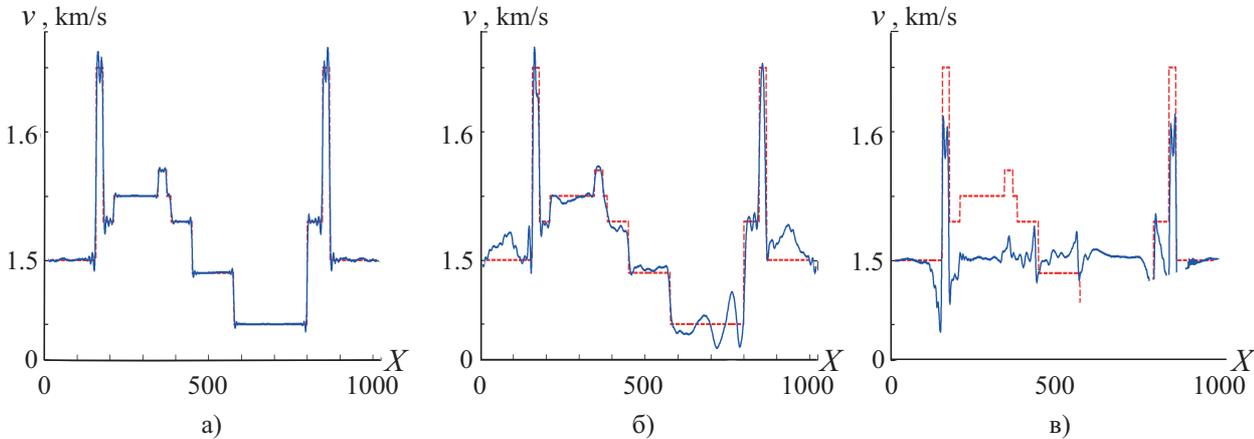


Рис. 7. Графики сечений $A-A$ эталонной и восстановленной скорости звука для расчета: а) с полными данными; б) в схеме на прохождение; в) в схеме на отражение

На рис. 7 приведены графики сечений эталонной и восстановленной в различных схемах эксперимента скорости звука на линии $A-A$ рис. 5а как функции от координаты x . Пунктир соответствует точному решению, а сплошная линия — восстановленному. На рис. 7а — расчет с полными данными, соответствующий изображению на рис. 5б; на рис. 7б — расчет только на прохождение при $\alpha = 60^\circ$, соответствующий рис. 6а; на рис. 7в — расчет только на отражение при $\alpha = 45^\circ$, соответствующий рис. 6б.

Как видно из рисунков, расчет с полными данными или на прохождение позволяет восстанавливать не только форму неоднородности, но и само значение скорости как функции от координаты. Однако точность восстановления с полными данными заметно выше, достаточно хорошо восстанавливаются даже небольшие неоднородности размером 2–3 мм, а значение скорости звука восстанавливается с точностью до 10 м/с и выше. В схеме на отражение восстанавливаются только скачки скорости (границы неоднородностей) с некоторой погрешностью, абсолютное значение скорости звука не восстанавливается.

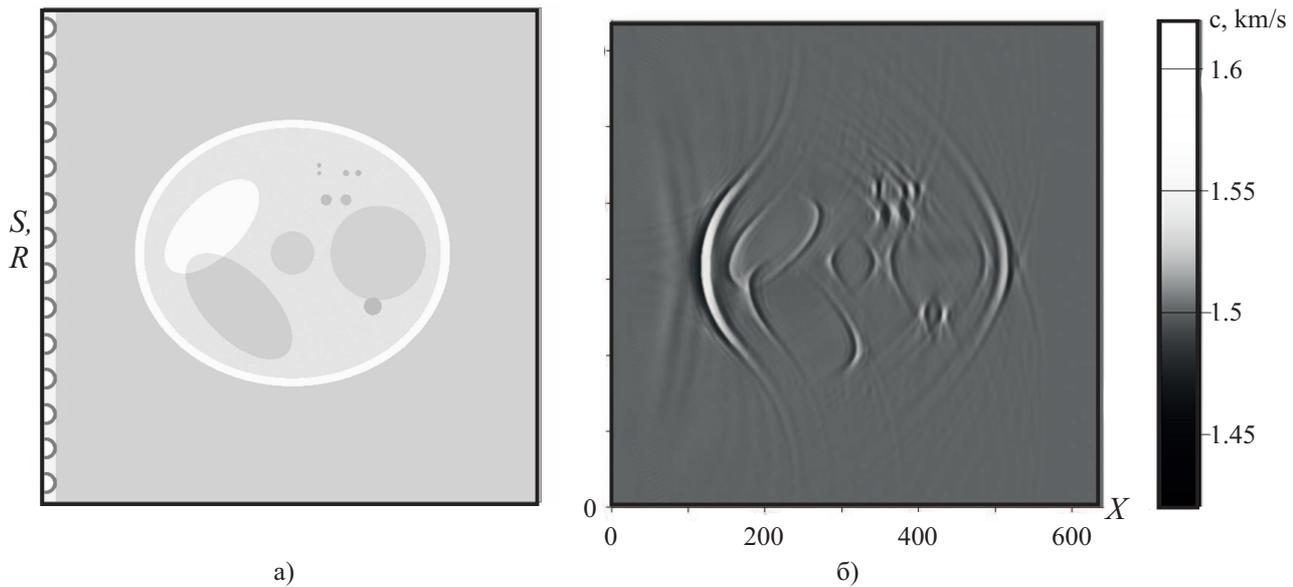


Рис. 8. Эксперимент с линейным массивом трансдюсеров: а) схема 2D; б) восстановленное изображение

Промоделируем работу простейшего аналога широко распространенных медицинских аппаратов для ультразвуковых исследований с линейным массивом трансдюсеров [32].

В линейном массиве трансдюсеров пьезоэлементы используются одновременно как источники и как приемники излучения. Трансдюсеры располагаются не по окружности, как в томографической схеме обследования, а на линии только с одной стороны от объекта исследования. Схема эксперимента показана на рис. 8а, где источники и приемники располагаются на левой вертикальной границе квадрата.

В модельном расчете с простейшим аналогом линейного массива трансдюсеров было использовано 8 источников S и 80 приемников R , расположенных между источниками с шагом 2.5 мм. Результаты расчетов модельной задачи показаны рис. 8б. Из рисунка видно, что в такой схеме измерений, когда источники и приемники расположены только с одной стороны от объекта, можно пытаться восстанавливать только границы неоднородностей, при этом границы, перпендикулярные фронту волны, восстанавливаются гораздо хуже, чем границы, параллельные фронту волны. Аналогичная проблема возникает при электромагнитном зондировании приповерхностных слоев Земли, в сейсморазведке и в инженерной сейсмике.

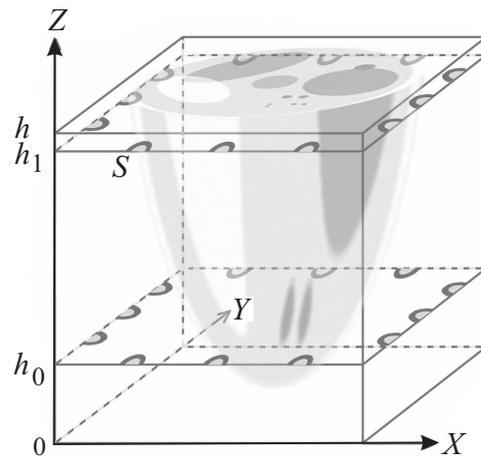


Рис. 9. Схема 3D эксперимента

6. Модельные расчеты трехмерных задач волновой томографии. Томографическое восстановление изображения в трех измерениях дает возможность учитывать рефракцию волн в третьем измерении, которая не может быть учтена при восстановлении сечения реального трехмерного объекта с помощью двумерной схемы и, следовательно, позволяет получить более точное изображение 3D объекта. Для модельных расчетов в 3D использовался импульс размера $\lambda = 5$ мм (рис. 3), диапазон значений скорости звука в тестовом объекте от 1.43 до 1.6 км/с, в окружающей среде скорость звука равна 1.5 км/с. Размер расчетной области $h = 176$ мм, размерность расчетной сетки $352 \times 352 \times 353$ точки. Использовались 24 положения источников S в двух плоскостях $Z = h_0 = 0.33h$ и $Z = h_1 = 0.95h$, по 3 на каждом ребре (рис. 9). Приемники располагались на всех гранях куба расчетной области (схема с полным диапазоном данных) с шагом 2 мм. Сечения восстановленного 3D изображения в плоскостях $Y = 0.6h$, $Y = 0.5h$, $Z = 0.83h$, $Z = 0.36h$ показаны на рис. 10. Время расчета 3D задачи на 24 графических картах составило около 12 часов, проведено 400 итераций.

В модельной задаче с использованием 3D томографической схемы нахождение приемники располагались только на всей противоположной от источника S грани куба, а в модельной задаче на отра-

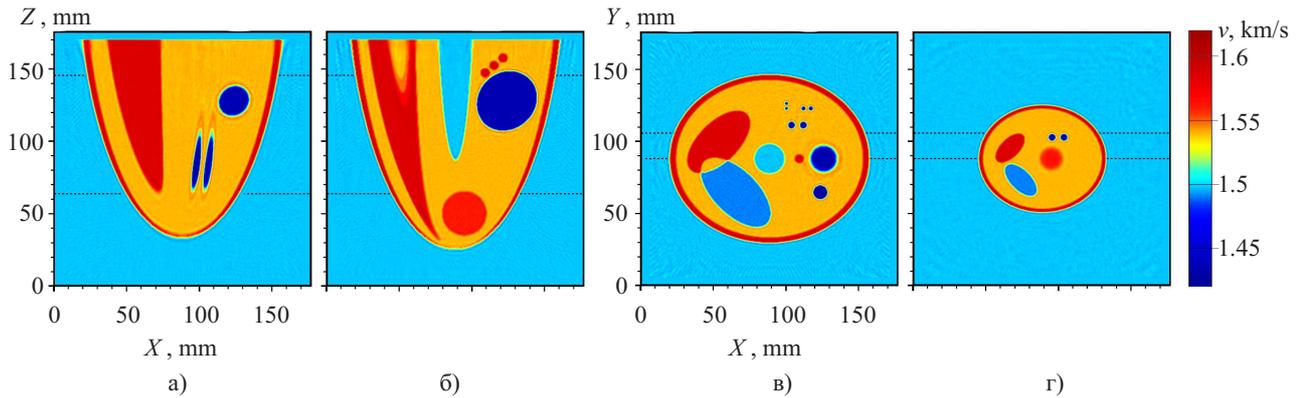


Рис. 10. Сечения восстановленного 3D изображения в плоскостях а) $Y = 0.6h$ (105 мм), б) $Y = 0.5h$ (88 мм), в) $Z = 0.83h$ (146 мм), г) $Z = 0.36h$ (64 мм) в схеме с полным диапазоном данных

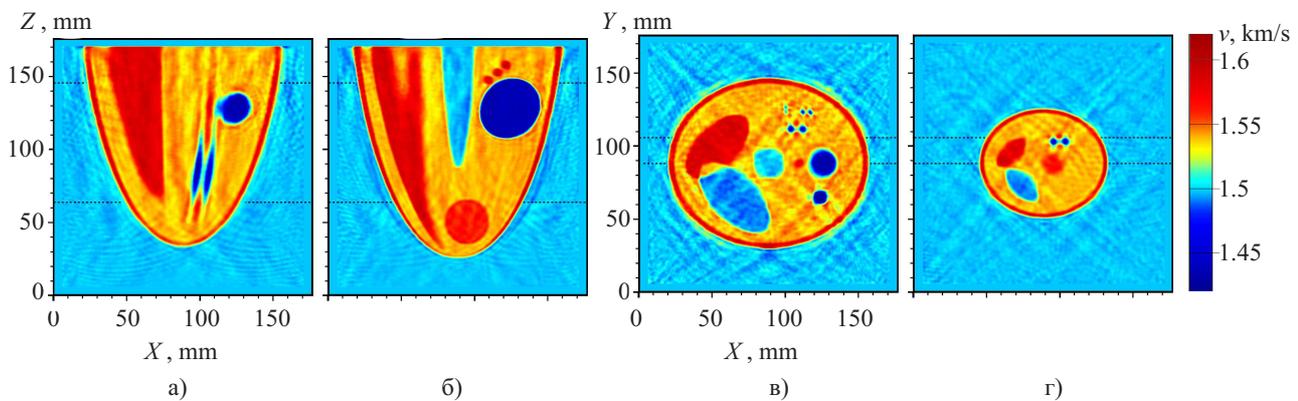


Рис. 11. Сечения восстановленного 3D изображения в плоскостях а) $Y = 0.6h$ (105 мм), б) $Y = 0.5h$ (88 мм), в) $Z = 0.83h$ (146 мм), г) $Z = 0.36h$ (64 мм) при использовании только проходящих волн

жение — только на всей грани куба, на которой расположен источник S . Расположение источников такое же, как и в предыдущей задаче (рис. 9). Восстановленные изображения в тех же плоскостях $Y = 0.6h$, $Y = 0.5h$, $Z = 0.83h$, $Z = 0.36h$ с использованием схемы на прохождение показаны на рис. 11. Так же, как и в расчетах на прохождение для 2D модели (рис. 6а), наблюдается падение разрешающей способности.

Возможности томографических исследований 3D объектов в варианте на отражение, как и в 2D случае, ограничены. Аналогично тому, как было показано в 2D варианте (рис. 6б), в схеме на отражение удается восстанавливать только границы областей неоднородностей.

7. Выводы. Проведенные расчеты как в двумерном, так и в трехмерном случаях показали, что в томографических схемах с полным диапазоном углов, где регистрируются как отраженные, так и проходящие волны, достигается наилучшая точность восстановления неоднородностей.

В томографических схемах, в которых используются только проходящие волны, точность восстановления гораздо хуже, чем в схемах с полным диапазоном углов.

В варианте томографических схем на отражение можно пытаться восстанавливать только границы неоднородных областей, при этом профиль скорости распространения звука внутри неоднородности восстановить не удастся. Точное положение границ неоднородностей можно найти, если априори знать распределение скорости внутри неоднородностей.

В ультразвуковой диагностике с линейным массивом трансдюсеров, когда источники и приемники расположены только с одной стороны от объекта, качество восстановления границ, направленных вдоль распространения волны зондирования, намного хуже, чем поперек.

Суперкомпьютеры на графических процессорах (GPU) позволяют решать за разумное время как двумерные, так и трехмерные задачи волновой диагностики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-07-00078-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Natterer F., Wubbeling F.* A propagation-backpropagation method for ultrasound tomography // *Inverse Problems*. 1995. **11**. 1225–1232.
2. *Beilina L., Klibanov M.V.* Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems. New York: Springer, 2012.
3. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography // *Inverse Problems*. 2013. **29**, N 7. 075004. doi:10.1088/0266-5611/29/7/075004.
4. *Quan Y., Huang L.* Sound-speed tomography using first-arrival transmission ultrasound for a ring array // *Proc. SPIE*. 2007. **6513**. doi: 10.1117/12.709647.
5. *Буров В.А., Шуруп А.С., Зотов Д.И., Румянцева О.Д.* Моделирование функционального решения задачи акустической томографии для данных от квазиточечных преобразователей // *Акустический журнал*. 2013. **59**, № 3. 391–407.
6. *Пижаков В.В., Баландин А.Л., Родионов Д.Г., Власенко М.Г., Князев Б.А.* Терагерцовая томография низкоконтрастных объектов: алгоритмы и экспериментальные измерения // *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика*. 2010. **5**, № 4. 91–97.
7. *Schmidt S., Duric N., Li C., Roy O., Huang Z.F.* Modification of Kirchhoff migration with variable sound speed and attenuation for acoustic imaging of media and application to tomographic imaging of the breast // *Med. Phys.* 2011. **38**, N 2. 998–1007.
8. *Natterer F.* Incomplete data problems in wave equation imaging // *Inverse Problems and Imaging*. 2010. **4**, N 4. 685–691.
9. *Wisikin J., Borup D., Andre M., Johnson S., Greenleaf J., Parisky Y., Klock J.* Three-dimensional nonlinear inverse scattering: quantitative transmission algorithms, refraction corrected reflection, scanner design, and clinical results // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. **133**. doi: 10.1121/1.4800267.
10. *Данилин А.Н., Пестов Л.Н.* Численное решение линеаризованной обратной краевой задачи для динамической системы Ламе // *Вестник Балтийского федерального университета*. 2012. № 10. 81–85.
11. *Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю.* Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 2003. **43**, № 8. 1201–1209.
12. *Ватутьян А.О., Явруян О.В., Богачев И.В.* Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // *Акустический журнал*. 2011. **57**, № 6. 723–730.
13. *Евдокимов Ю.К., Темьянов Б.К.* Обратная операторная задача для гиперболических систем в акустическом зондировании // *Вестник Казанского государственного технического университета*. 2012. **4**, № 2. 121–125.
14. *Wisikin J., Borup D.T., Johnson S.A., Berggren M.* Non-linear inverse scattering: high resolution quantitative breast tissue tomography // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. **131**, N 5. 3802–3813.
15. *Duric N., Littrup P., Poulo L., Babkin A., Pevzner R., Holsapple E., Rama O., et al.* Detection of breast cancer with ultrasound tomography: first results with the Computed Ultrasound Risk Evaluation (CURE) prototype // *Medical Physics*. 2007. **34**, N 2. 773–785.
16. *Gemmeke H., Berger L., Birk M., et al.* Hardware setup for the next generation of 3D ultrasound computer tomography // *IEEE Nucl. Sci. Symp. Conf. Rec. New York: IEEE Press*, 2010. 2449–2454.
17. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-posed problems. Theory and applications. Dordrecht: Kluwer, 1994.
18. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* О двух подходах к решению коэффициентных обратных задач для волновых уравнений // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 2012. **52**, № 2. 263–269.
19. *Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю.* Об одной задаче волновой диагностики // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.* 2010. № 1. 7–13.
20. *Головина С.Г., Романов С.Ю., Степанов В.В.* Об одной обратной задаче сейсмологии // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.* 1994. № 4. 16–21.
21. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Об одной задаче ультразвуковой томографии // *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*. 2011. **12**, № 1. 317–320.
22. *Овчинников С.Л., Романов С.Ю.* Организация параллельных вычислений при решении обратной задачи волновой диагностики // *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*. 2008. **9**, № 1. 338–345.
23. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Об одной задаче компьютерной томографии в волновом приближении // *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*. 2006. **7**. 36–40.
24. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Суперкомпьютерные технологии в разработке методов решения обратных задач в УЗИ-томографии // *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*. 2012. **13**. 235–238.
25. *Романов С.Ю.* К вопросу об масштабируемости программы для обратной задачи волновой томографии // *Вестник Нижегородского университета*. 2013. № 2. 160–167.
26. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data // *Wave Motion*. 2014. **51**, N 3. 389–404.
27. *Roy O., Jovanović I., Hormati A., et al.* Sound speed estimation using wave-based ultrasound tomography: theory

- and GPU implementation // Proc. SPIE. 2010. **7629**. doi: 10.1117/12.844691.
28. Воеводин В.В., Жуматый С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В. Практика суперкомпьютера “Ломоносов” // Открытые системы. 2012. № 7. 36–39.
29. Базулин Е.Г. О возможности использования в ультразвуковом неразрушающем контроле метода максимальной энтропии для получения изображения рассеивателей по набору эхосигналов // Акуст. журн. 2013. **59**, № 2. 235–254.
30. Гайкович П.К., Хилько А.И., Гайкович К.П. Метод многочастотной ближнеполевой акустической томографии объемных неоднородностей морского дна // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2011. **54**, № 6. 431–443.
31. Кругликов А.А., Лазоренко Г.И., Шаповалов В.Л., Хакиев З.Б., Явна В.А. Компьютерное моделирование распространения акустических колебаний в насыпях железных дорог // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. 2012. № 3. 135–140.
32. Schiffner M.F., Schmitz G. Plane wave pulse-echo ultrasound diffraction tomography with a fixed linear transducer array // Acoustical Imaging. 2012. **31**. 19–30.

Поступила в редакцию
07.03.2014

Problems of Limited-Data Wave Tomography

A. V. Goncharsky¹, S. Yu. Romanov², and S. Yu. Seryozhnikov³

¹ *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Professor, Head of Laboratory, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru*

² *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: romanov60@gmail.com*

³ *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Electronic Engineer, e-mail: s2110sj@gmail.com*

Received March 7, 2014

Abstract: A number of schemes of full-range and limited-data wave tomography are compared. Inverse problems of tomography are treated as coefficient inverse problems for the wave equation. The proposed algorithms for solving inverse problems are based on direct computation of the residual functional by solving the conjugate problem for the hyperbolic partial differential equation. Reflection and transmission tomography schemes are analyzed. Numerical simulations are performed both in the two- and three-dimensional versions on the GPU cluster of Lomonosov supercomputing facility of Moscow State University.

Keywords: coefficient inverse problems, wave equation, limited-data wave tomography, GPU, supercomputers.

References

1. F. Natterer and F. Wubbeling, “A Propagation–Backpropagation Method for Ultrasound Tomography,” *Inverse Problems* **11** (6), 1225–1232 (1995).
2. L. Beilina and M. V. Klibanov, *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems* (Springer, New York, 2012).
3. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, “Supercomputer Technologies in Inverse Problems of Ultrasound Tomography,” *Inverse Problems* **29** (7) (2013). doi: 10.1088/0266-5611/29/7/075004
4. Y. Quan and L. Huang, “Sound-Speed Tomography Using First-Arrival Transmission Ultrasound for a Ring Array,” *Proc. SPIE* **6513** (2007). doi: 10.1117/12.709647
5. V. A. Burov, A. S. Shurup, D. I. Zotov, and O. D. Rumyantseva, “Simulation of a Functional Solution to the Acoustic Tomography Problem for Data from Quasi-Point Transducers,” *Akust. Zh.* **59** (3), 391–407 (2013) [*Acoust. Phys.* **59** (3), 345–360 (2013)].
6. V. V. Pikalov, A. L. Balandin, D. G. Rodionov, et al., “Terahertz Tomography of Low Contrast Objects: Algorithms and Experimental Measurements,” *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser.: Fiz.* **5** (4), 91–97 (2010).

7. S. Schmidt, N. Duric, C. Li, et al., "Modification of Kirchhoff Migration with Variable Sound Speed and Attenuation for Acoustic Imaging of Media and Application to Tomographic Imaging of the Breast," *Med. Phys.* **38** (2), 998–1007 (2011).
8. F. Natterer, "Incomplete Data Problems in Wave Equation Imaging," *Inverse Probl. Imaging* **4** (4), 685–691 (2010).
9. J. Wiskin, D. Borup, M. Andre, et al., "Three-Dimensional Nonlinear Inverse Scattering: Quantitative Transmission Algorithms, Refraction Corrected Reflection, Scanner Design, and Clinical Results," *J. Acoust. Soc. Am.* **133** (2013). doi: 10.1121/1.4800267
10. A. N. Danilin and L. N. Pestov, "Numerical Solving of the Linearized Inverse Boundary Value Problem for the Dynamical Lamé System," *Vestn. Balt. Feder. Univ.*, No. 10, 81–85 (2012).
11. A. B. Bakushinskii, A. I. Kozlov, and M. Yu. Kokurin, "On Some Inverse Problem for a Three-Dimensional Wave Equation," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **43** (8), 1201–1209 (2003) [*Comput. Math. Math. Phys.* **43** (8), 1149–1158 (2003)].
12. A. O. Vatul'yan, O. V. Yavruyan, and I. V. Bogachev, "Identifying the Elastic Properties of an Inhomogeneously Thick Layer," *Akust. Zh.* **57** (6), 723–730 (2011) [*Acoust. Phys.* **57** (6), 741–748 (2011)].
13. Yu. K. Evdokimov and B. K. Tem'yanov, "Inverse Operator Problem for Hyperbolic Systems in Acousting Sounding," *Vestn. Kazansk. Gos. Tekh. Univ.* **4** (2), 121–125 (2012).
14. J. Wiskin, D. T. Borup, S. A. Johnson, and M. Berggren, "Non-Linear Inverse Scattering: High Resolution Quantitative Breast Tissue Tomography," *J. Acoust. Soc. Am.* **131** (5), 3802–3813 (2012).
15. N. Duric, P. Littrup, L. Poulou, et al., "Detection of Breast Cancer with Ultrasound Tomography: First Results with the Computed Ultrasound Risk Evaluation (CURE) Prototype," *Med. Phys.* **34** (2), 773–785 (2007).
16. H. Gemmeke, L. Berger, M. Birk, et al., "Hardware Setup for the Next Generation of 3D Ultrasound Computer Tomography," in *IEEE Nucl. Sci. Symp. Conf. Rec.* (IEEE Press, New York, 2010), pp. 2449–2454.
17. A. Bakushinsky and A. Goncharsky, *Ill-Posed Problems: Theory and Applications* (Kluwer, Dordrecht, 1994).
18. A. V. Goncharskii and S. Yu. Romanov, "Two Approaches to the Solution of Coefficient Inverse Problems for Wave Equations," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **52** (2), 263–269 (2012) [*Comput. Math. Math. Phys.* **52** (2), 245–251 (2012)].
19. A. V. Goncharskii, S. L. Ovchinnikov, and S. Yu. Romanov, "On the One Problem of Wave Diagnostic," *Vestn. Mosk. Gos. Univ.*, Ser. 15: Vychisl. Matem. Kibern., No. 1, 7–13 (2010) [*Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.* **34** (1), 1–7 (2010)].
20. S. G. Golovina, S. Yu. Romanov, and V. V. Stepanov, "On the Inverse Problem of Seismics," *Vestn. Mosk. Gos. Univ.*, Ser. 15: Vychisl. Matem. Kibern., No. 4, 16–21 (1994).
21. A. V. Goncharsky and S. Yu. Romanov, "On a Problem of Ultrasonic Tomography," *Vychisl. Metody Programm.* **12** (1), 317–320 (2011).
22. S. L. Ovchinnikov and S. Yu. Romanov, "Organization of Parallel Computations when Solving the Inverse Problem of Wave Diagnostics," *Vychisl. Metody Programm.* **9** (1), 338–345 (2008).
23. A. V. Goncharsky and S. Yu. Romanov, "A Computer Tomography Problem in Wave Approximation," *Vychisl. Metody Programm.* **7**, 36–40 (2006).
24. A. V. Goncharsky and S. Yu. Romanov, "Supercomputer Technologies in the Development of Methods for Solving Inverse Problems in Ultrasound Tomography," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 235–238 (2012).
25. S. Yu. Romanov, "Scalability of the Program for Solving the Inverse Problem of Wave Tomography," *Vestn. Nizhegorodsk. Univ.*, No. 2, 160–167 (2013).
26. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "Inverse Problems of 3D Ultrasonic Tomography with Complete and Incomplete Range Data," *Wave Motion* **51** (3), 389–404 (2014).
27. O. Roy, I. Jovanović, A. Hormati, et al., "Sound Speed Estimation Using Wave-Based Ultrasound Tomography: Theory and GPU Implementation," *Proc. SPIE* **7629** (2010). doi: 10.1117/12.844691
28. Vl. Voevodin, S. Zhumatiy, S. Sobolev, et al., "Practice of Using the Lomonosov Supercomputer," *Otkrytye Sistemy*, No. 7, 36–39 (2012).
29. E. G. Bazulin, "On the Possibility of Using the Maximum Entropy Method in Ultrasonic Nondestructive Testing for Scatterer Visualization from a Set of Echo Signals," *Akust. Zh.* **59** (2), 235–254 (2013) [*Acoust. Phys.* **59** (2), 210–227 (2013)].
30. P. K. Gaikovich, A. I. Khil'ko, and K. P. Gaikovich, "The Method of Multifrequency Near-Field Acoustical Tomography of Bulk Inhomogeneities of the Sea Bottom," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz.* **54** (6), 431–443 (2011) [*Radiophys. Quantum Electron.* **54** (6), 390–401 (2011)].

31. A. A. Kruglikov, G. I. Lazorenko, V. L. Shapovalov, et al., "Computer Simulation of Acoustic Oscillations Propagation in Railway Embankment," Vestn. Rostovsk. Gos. Univ. Putei Soobshcheniya, No. 3, 135–140 (2012).
32. M. F. Schiffner and G. Schmitz, "Plane Wave Pulse-Echo Ultrasound Diffraction Tomography with a Fixed Linear Transducer Array," Acoust. Imaging **31**, 19–30 (2012).