УДК 532.5+519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПУЗЫРЬКОВ В ТРЕХМЕРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ НА ГЕТЕРОГЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ БЫСТРЫМ МЕТОДОМ МУЛЬТИПОЛЕЙ И МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Ю. А. Иткулова¹, О. А. Абрамова², Н. А. Гумеров³, И. Ш. Ахатов⁴

Исследуется динамика пузырьков в потенциальных течениях несжимаемой жидкости. Предлагаемый подход основан на методе граничных элементов для уравнения Лапласа, который особенно эффективен для трехмерного моделирования динамики пузырьков. Для увеличения масштаба задачи и ускорения расчетов разработан и реализован эффективный численный алгоритм. В зависимости от размера задачи для ускорения метода граничных элементов применяется прямой метод расчета матрично-векторного произведения на графических процессорах (GPU) или быстрый метод мультиполей (FMM), реализованный на гетерогенных вычислительных системах (многоядерные CPU и GPU). Предложен новый метод стабилизации сетки, моделирующий поверхность пузырька, основанный на фильтрации сферических гармоник. Все это позволяет напрямую рассчитывать трехмерную динамику одиночного пузырька, двух взаимодействующих пузырьков и пузырькового кластера с высокой степенью дискретизации поверхности. Разработанный метод может быть использован для решения широкого класса задач, связанных с потенциальными течениями пузырьковых жидкостей.

Ключевые слова: динамика пузырьков, потенциальное течение, метод граничных элементов, быстрый метод мультиполей, параллельные вычисления, графические процессоры.

1. Введение. Пузырьки широко встречаются в естественных условиях, а также используются во многих технологических процессах [1, 2], в том числе для очистки загрязненных поверхностей ультразвуком [3]. Описанию коллективного поведения пузырьков в акустических полях посвящено большое количество исследований [4–10]. Эти работы показывают, что эффекты самоорганизации пузырьковых скоплений существенно зависят от сил, действующих на пузырьки со стороны жидкости, вычисление которых требует более детального рассмотрения динамики пузырьков в акустических полях, включая прямое численное моделирование пузырьков произвольной формы.

Радиальные осцилляции сферического пузырька описываются уравнением Рэлея–Плессета [11]. Это уравнение использовалось также для исследования влияния направленной диффузии на динамику одиночного сферически-симметричного пузырька [12]. Динамика пузырьков при малых числах Рейнольдса описывается уравнениями Стокса, в которых пренебрегается инерцией [13, 14], при больших же числах Рейнольдса используется модель для потенциальных течений, в которой пренебрегается вязкостью жид-кости [15–27].

Решение таких задач может быть получено методом граничных элементов (МГЭ) [28], который особенно эффективен для трехмерных задач, так как все расчеты связаны только с границей. Этот метод успешно применялся в [29] для исследования динамики сжимаемых пузырьков под действием акустического поля в стоксовом течении. В настоящей статье используется метод МГЭ для потенциальных течений [15–24]. Для исследования двумерной динамики одиночного пузырька вблизи твердой стенки МГЭ успешно применялся в [15, 16]. Изучение трехмерной динамики взаимодействующих пузырьков в

¹Башкирский государственный университет, Центр микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем (ЦМНДДС, БашГУ); ул. Заки Валиди, 32, 450076, г. Уфа; стажер-исследователь, e-mail: Itkulova.Yulia@bashedu.ru

² Башкирский государственный университет, Центр микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем (ЦМНДДС, БашГУ); ул. Заки Валиди, 32, 450076, г. Уфа; мл. науч. сотр., e-mail: abramovacmndds@gmail.com

³ Университет штата Мэриленд, Институт продвинутых компьютерных исследований, США, Room 3305 A.V. Williams Building, College Park, MD 20742; профессор, e-mail: gumerov@umiacs.umd.edu

⁴ Университет штата Северная Дакота, факультет инженерной механики, США, NDSU Dept 2490, 210 Dolve Hall, P.O. Box 6050, Fargo, ND 58108; профессор, e-mail: Iskander.Akhatov@ndsu.edu

⁽с) Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

потенциальных течениях методом граничных элементов представлено в работах [19, 20, 22, 24], в которых исследуется процесс взрыва пузырьков под водой. Ниже рассматривается динамика пузырьков в акустических полях.

Некоторые другие подходы исследования динамики пузырьков при больших числах Рейнольдса можно найти в работах [25–27], в которых представлен также обзор современной литературы.

В настоящей статье численная методика основывается на трехмерном МГЭ с применением быстрого метода мультиполей (FMM — Fast Multipole Method) для случая произвольных деформируемых границ. Кроме того, реализованные алгоритмы были ускорены с использованием многоядерных CPU (Central Processing Unit) и графических процессоров (GPU — Graphics Processing Unit). Такой подход обусловлен тем, что МГЭ сводится к решению на каждом временном шаге плотной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно N неизвестных, где N — число расчетных узлов. Для систем из пузырьков с высокой степенью дискретизации поверхности (тысячи пузырьков), поверхность каждого из которых содержит сотни треугольных элементов, значение N может достигать миллиона. Прямые методы решения с вычислительной сложностью $O(N^3)$ в таких случаях неприменимы на практике. Использование эффективных итеративных методов [44] снижает вычислительную сложность до $O(N_{\text{iter}}N^2)$, где $N_{
m iter} \ll N$ — количество итераций и $O(N^2)$ — сложность одного умножения матрицы на вектор. Таким образом, для больших N решение СЛАУ происходит не так быстро, поскольку время вычислений возрастает пропорционально квадрату N. Основной особенностью реализованного нами численного подхода является применение алгоритма FMM для $N > 60\,000$, имеющего сложность O(N) для заданной точности матрично-векторных произведений (МВП), возникающих при решении СЛАУ, что приводит к $O(N_{\text{iter}}N)$ вычислительной сложности всего алгоритма.

Метод FMM впервые был представлен в статье [30] для суммирования электростатического и гравитационного потенциалов (функция Грина для уравнения Лапласа) в двух и трех измерениях. Эффективный подход к реализации FMM для трехмерных уравнений Лапласа и Гельмгольца представлен в работах [31, 32], а в [33] рассматриваемый FMM был применен к МГЭ. Метод FMM может быть достаточно эффективно распараллелен на гетерогенных вычислительных системах. Первая реализация FMM на графических процессорах была опубликована в статье [34], где было показано, что FMM для трехмерного уравнения Лапласа может быть ускорен в 30–60 раз и время счета одного МВП для системы с миллионом частиц составило 1 секунду на одном GPU. Этот подход получил дальнейшее развитие и в работах [35, 36], где авторы представили реализацию масштабируемого FMM на гетерогенном вычислительном кластере с несколькими вычислительными узлами. В этих работах структура данных формировалась на GPU. В [37] также представлен эффективный подход к формированию иерархической структуры данных на GPU для ускорения молекулярно-динамических расчетов. В настоящей работе структура данных рассчитывается на CPU, так как в течение одного шага по времени происходит амортизация формирования структуры данных, что не приводит к существенному увеличению общего времени счета.

Первая попытка авторов настоящей статьи ускорить расчет динамики деформируемых капель методом граничных элементов с помощью GPU была предпринята в [38]. Несмотря на достигнутое ускорение, размер задач, решаемых в рамках этого подхода, ограничен в связи с нехваткой памяти и с тем, что сложность алгоритма составляла $O(N^2)$. В последующих работах [39–41] авторы успешно применили FMM для уравнений Стокса к моделированию динамики большого количества деформируемых капель и течению эмульсий в каналах различной формы методом граничных элементов. В работе [24] при исследовании динамики пузырьков в потенциальных течениях МГЭ был ускорен одноуровневым FMM с применением быстрого преобразования Фурье (FFT — Fast Fourier Transform). Однако при больших размерах задачи предложенный в [24] подход уступает многоуровневому гетерогенному FMM. В настоящей работе для расчета трехмерной динамики пузырьков с высокой степенью дискретизации поверхности в зависимости от размера задачи для ускорения МГЭ применяется прямой метод расчета MBII на GPU или FMM для суммирования монополей и диполей, реализованный на гетерогенных вычислительных системах. Несмотря на то что компоненты алгоритма (метод граничных элементов для потенциальных течений и быстрый метод мультиполей) были реализованы и протестированы в цитируемых работах, представленное в настоящей статье объединение этих методов, реализованных на гетерогенной архитектуре, произведено впервые.

Кроме того, при решении динамических задач методом граничных элементов возникают проблемы с дестабилизацией сетки, связанные с погрешностью в расчете геометрических характеристик из-за дискретизации поверхности треугольными элементами. Для стабилизации сетки разработан и реализован новый подход, основанный на применении сферического фильтра, который очищает поверхность пузырька от возникающих шумов. Данный стабилизатор позволяет рассчитывать несколько периодов колебаний сильно коллапсирующего пузырька. Ниже представлены результаты тестирования применения сферического фильтра, гетерогенного FMM для суммы монополей и диполей и прямого MBП на GPU. Исследована трехмерная динамика одиночного пузырька, двух и трех взаимодействующих пузырьков и пузырькового кластера в акустическом поле.

2. Математическая модель. Рассматривается динамика газового пузырька в идеальной несжимаемой жидкости плотности *ρ*. Предполагается, что динамической вязкостью жидкости и газа можно пренебречь. Тогда течение жидкости можно описать уравнениями Эйлера

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + \boldsymbol{g}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla, \tag{1}$$

где v, p и g — скорость, давление и ускорение свободного падения. Решение уравнения (1) ищется в виде $v = \nabla \phi$, где ϕ — потенциал скорости, который является гармонической функцией $\nabla^2 \phi = 0$. Уравнения (1) могут быть переписаны в форме интеграла Коши–Лагранжа

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} + F(t), \quad \phi = \phi(\boldsymbol{x}, t),$$

где \boldsymbol{x} — радиус-вектор рассматриваемой точки, а F(t) — константа интегрирования, которая может быть определена из условий на бесконечности. В случае жидкости, покоящейся на бесконечности, имеем

 $\phi|_{|\mathbf{x}|\to\infty} = 0, p|_{|\mathbf{x}|\to\infty} = p_{\infty}(t) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$. Значение F(t) определяется в виде $F(t) = \frac{p_{\infty}(t)}{\rho}, p_{\infty}(t) = p_0 + p_a(t), p_a(t) = P_a \sin(\omega t + \varphi),$ где $p_{\infty}(t)$ — давление в жидкости вдали от пузырька; p_0 — давление в жидкости в момент времени $t = 0; p_a(t)$ — давление акустического поля; P_a, ω и φ — амплитуда, частота и сдвиг по фазе колебаний акустического поля.

На межфазной границе S выполняется граничное условие $p(\boldsymbol{x},t) = p_g(t) - 2\gamma k(\boldsymbol{x},t)$, где $p(\boldsymbol{x},t) -$ давление в жидкости, $p_g(t)$ — давление в пузырьке, γ — коэффициент поверхностного натяжения и $k(\boldsymbol{x},t)$ — средняя кривизна поверхности. Давление в газе определяется в виде $p_g(t) = p_{g0} \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa}$, $p_{g0} = p_0 + \frac{2\gamma}{a_0}$, где κ — показатель политропы, который равен 1 для изотермического процесса и показателю адиабаты γ_g для адиабатического процесса; параметры с индексом "0" — начальные значения при t = 0; V — объем

 γ_g для адиабатического процесса; параметры с индексом "0" — начальные значения при t = 0; V — объем пузырька; a —радиус пузырька. 3. Гранично-интегральная формулировка. Задача решается методом граничных элементов, ко-

3. Гранично-интегральная формулировка. Задача решается методом граничных элементов, который заключается в переходе от уравнений в частных производных, описывающих поведение неизвестной функции внутри и на границе области, к интегральному уравнению, связывающему только граничные значения, и поиске численного решения этого уравнения. Далее значения искомой функции в произвольных точках расчетной области можно определить из интегрального уравнения, используя найденные решения на границе. Таким образом, МГЭ достаточно эффективен для трехмерного моделирования, так как размерность задачи уменьшается на единицу.

Гранично-интегральные уравнения для потенциала скорости ϕ , где $\phi|_{|y|\to\infty} = 0$, могут быть записаны в следующем виде:

$$L[q](\boldsymbol{y}) - M[\phi](\boldsymbol{y}) = \begin{cases} -\phi(\boldsymbol{y}), & \boldsymbol{y} \notin S, \quad \boldsymbol{y} \notin V, \\ -\frac{1}{2}\phi(\boldsymbol{y}), & \boldsymbol{y} \in S, \\ 0, & \boldsymbol{y} \in V. \end{cases}$$
(2)

Здесь L[q] и $M[\phi]$ — потенциалы простого и двойного слоя соответственно:

$$L[q](\boldsymbol{y}) = \int_{S} q(\boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \, dS(\boldsymbol{x}), \quad q = \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad M[\phi](\boldsymbol{y}) = \int_{S} \phi(\boldsymbol{x}) \, \frac{\partial G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{\partial n(\boldsymbol{x})} \, dS(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

где $G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ и $\frac{\partial G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{\partial n(\boldsymbol{x})}$ — функция Грина для уравнения Лапласа и ее нормальная производная:

$$G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi r}, \quad \frac{\partial G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial n(\boldsymbol{x})} = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}, \quad r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|.$$
(4)

Поверхность пузырьков дискретизируется треугольной сеткой. Для вычисления поверхностных интегралов используются квадратурные формулы [43]. Сингулярные интегралы определяются на основе интегральных тождеств. Для вычисления средней кривизны поверхности в каждом узле сетки применяется метод параболической аппроксимации [42, 43]. Методом коллокаций в узлах сетки второе уравнение в граничных интегралах (2) сводится к СЛАУ относительно неизвестной нормальной производной потенциала скорости на границе:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\tag{5}$$

где A — расчетная матрица системы, x — вектор неизвестных и b — правая часть системы. Таким образом, при моделировании динамики пузырьков с общим числом N узлов сетки на поверхности пузырьков требуется вычислять решение СЛАУ размером $N \times N$ на каждом временном шаге.

Изменение потенциала скорости и движение точек поверхности пузырька описываются кинематическими условиями

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} |\boldsymbol{v}|^2 - \frac{p_g(t) - 2\gamma k(\boldsymbol{x}, t)}{\rho} + \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} + F(t), \quad \boldsymbol{x} \in S,$$
(6)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{x} \in S, \tag{7}$$

которые на начальных временны́х шагах решаются методом Рунге–Кутта 4-го порядка, а затем методом Адамса–Башфорта–Мултона 6-го порядка.

Общая скорость течения определяется как $v = nq + v_t$, $v_t = (n \times v) \times n$, где v_t — тангенциальная составляющая скорости и n — нормаль к поверхности S, направленная в сторону жидкости.

Для стабилизации сетки к общей скорости может быть добавлена тангенциальная поправка $\boldsymbol{w} = \alpha \boldsymbol{v}_t$, $\alpha = \text{const:} \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. Узлы сетки в этом случае перемещаются следующим образом: $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{u}, \ \boldsymbol{x} \in S$. Тогда изменение потенциала скорости (6) вычисляется по формуле

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \left(\alpha \boldsymbol{v}_t + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\right) \cdot \boldsymbol{v} - \frac{p_g(t) - 2\gamma k(\boldsymbol{x}, t)}{\rho} + \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} + F(t).$$

Таким образом, для расчета динамики пузырька необходимо на каждом временном шаге решать задачу Дирихле. Решение задачи Неймана может потребоваться для инициализации процесса, когда неизвестен потенциал скорости, но известна нормальная скорость. Однако в случае, когда жидкость покоится на бесконечности, нет необходимости решать задачу Неймана для инициализации процесса, так как потенциал скорости при t = 0 равен нулю.

4. Вычисление тангенциальной составляющей скорости. Для расчета полной скорости v, которая встречается в кинематическом условии (7), необходимо вычислить ее тангенциальную составляющую $v_t = (n \times v) \times n$. Основную сложность составляет нахождение векторного произведения $n \times v$ через потенциал скорости ϕ . Из теоремы Стокса имеем $\int_{S_e} [n \times \nabla \phi(r)] dS = \int_{C_e} \phi(r) dr$, или

$$\int_{S_e} [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}] \, dS = \int_{C_e} \phi(\boldsymbol{r}) \, d\boldsymbol{r},\tag{8}$$

где S_e — произвольная часть поверхности S и C_e — контур поверхности S_e .

Рассмотрим метод коллокаций в узлах сетки и граничный элемент S_e (плоский треугольник) с верпинами $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ и положительной ориентацией. В этих вершинах значения потенциала скорости ϕ известны и равны ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 соответственно. Функция ϕ может быть линейно интерполирована на отрезок C_{ij} , соединяющий точки \boldsymbol{x}_i и \boldsymbol{x}_j : $\phi(\boldsymbol{r}) = (1 - \xi)\phi_i + \xi\phi_j, \ \boldsymbol{r} = (1 - \xi)\boldsymbol{x}_i + \xi\boldsymbol{x}_j, \ \xi \in [0, 1], \ i, j = 1, 2, 3$. Продифференцировав \boldsymbol{r} по ξ , получаем $d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i) d\xi$. Тогда интеграл от ϕ по этому отрезку вычисляется как

$$I_{ij} = \int_{C_{ij}} \phi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \int_{0}^{1} \left[(1 - \xi)\phi_i + \xi\phi_j \right] d\xi = \frac{1}{2} \, (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)(\phi_i + \phi_j).$$

Интеграл от ϕ по контуру C_e равен

$$\int_{C_e} \phi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = I_{12} + I_{23} + I_{31} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)\phi_1 + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)\phi_2 + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\phi_3 \right]. \tag{9}$$

Таким образом, из (8) и (9) можно вычислить значение $(n \times v)_e$ в элементе S_e :

$$(\boldsymbol{n} imes \boldsymbol{v})_e S_e = rac{1}{2} \left[(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3)\phi_1 + (\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1)\phi_2 + (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\phi_3
ight].$$

Значения $\boldsymbol{n} imes \boldsymbol{v}$ в узлах можно найти методом осреднения значений $(\boldsymbol{n} imes \boldsymbol{v})_e$ во всех соседних элементах S_e .

5. Сферический фильтр для стабилизации сетки. При решении динамических задач методом граничных элементов возникают трудности с дестабилизацией сетки, связанные с погрешностью в расчете геометрических характеристик, таких как поверхностные интегралы, нормали, площади и тангенциальные компоненты, из-за дискретизации поверхности треугольными элементами. Для устранения этих трудностей поверхность представляют различными способами.

Одним из таких способов является параметрическое представление поверхности, которое может быть рассмотрено независимо или совместно с сеточным представлением поверхности, используемым в МГЭ. Такой подход применим к геометрическим объектам, топологически эквивалентным сфере и тору и, таким образом, подходит для моделирования динамики капель и пузырьков. Наиболее подходящим объектом для рассматриваемых задач является сфера, поэтому на ее примере будет изложена концепция параметрического представления поверхности. В дальнейшем теория может быть расширена на более сложные объекты.

5.1. Параметризация поверхности. Любая поверхность в трехмерном пространстве может быть определена параметрически в форме

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}(u, v),\tag{10}$$

или x = X(u, v), y = Y(u, v), z = Z(u, v), где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — декартовы координаты точек поверхности в пространстве \mathbf{R}^3 ; u и v — параметры; $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ — функция, определяющая достаточно гладкую поверхность, удовлетворяющую условиям дифференцирования.

Рассмотрим замкнутую поверхность S, которая топологически эквивалентна сфере. Обозначим единичную сферу через S_u , θ и φ — сферические координаты сферы. Обозначая $u = \theta$ и $v = \varphi$, параметризацию (10) можно переписать в виде $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\theta, \varphi), \ 0 \leq \theta \leq \pi, \ 0 \leq \varphi < 2\pi$. Так как поверхность замкнутая, функция \mathbf{r} является периодической:

$$\boldsymbol{R}(\theta,\varphi) = \boldsymbol{R}(\theta,\varphi+2\pi), \quad \boldsymbol{R}(\theta+\pi,\varphi) = \boldsymbol{R}(\theta,\varphi+\pi).$$
(11)

В МГЭ рассматриваются различные функции на поверхности, которые имеют периодические свойства и могут быть представлены аналогично (11).

5.2. Разложение по сферическим гармоникам. Любая функция f, определенная на сфере S_u , может быть разложена в ряд по сферическим гармоникам $Y_n^m(\theta, \varphi)$, которые образуют комплексный ортогональный базис. Разложение функции $f \in L_2(S_u)$ по сферическим гармоникам имеет вид

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_n^m Y_n^m(\theta,\varphi), \qquad (12)$$

где $\{C_n^m\}$ — коэффициенты разложения (сферический спектр функции f). Из условия ортогональности базисных функций коэффициенты разложения могут быть определены для данной функции как

$$C_n^m = \int_{S_u} f(\theta, \varphi) Y_n^{-m}(\theta, \varphi) \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) Y_n^{-m}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

5.3. Сферический фильтр. Для функции f под сглаженной (отфильтрованной) функцией $\hat{f}(\theta, \phi)$ порядка p_f мы понимаем поверхностную функцию, которая может быть представлена в виде ряда (12), в котором $C_n^m = 0$ при $n \ge p_f$ (или в виде ряда, усеченного по n до $p_f - 1$). Такой ряд содержит $P = p_f^2$, вообще говоря, ненулевых коэффициентов. Рассмотрим построение сферического фильтра методом наименьших квадратов. Цель фильтра — сгладить функции на поверхности, включая функции X, Y и Z, определяющие поверхность. Если в какой-либо момент времени поверхность задана, то любая точка на поверхности определяется как $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{R}(\theta_i, \varphi_i, t), \ i = 1, \ldots, N$, где параметры θ_i и φ_i известны для *i*-й точки. Коэффициенты разложения C_j некоторой функции f по сферическим гармоникам Y_j , заданной N значениями $f_i = f(\theta_i, \phi_i)$, можно найти из минимизации функционала

$$\mathcal{F}(C_1,\ldots,C_P) = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^P C_j Y_j(\theta_i,\varphi_i) - f_i \right]^2 \to \min,$$

где $j = (n+1)^2 - n + m$ — общий индекс для пары индексов n и m, таких, что $n = 0, \ldots, p_f - 1$ и $m = -n, \ldots, n$. Таким образом, функция может быть аппроксимирована в виде $f(\theta, \varphi) \approx \widehat{f}(\theta, \phi) \approx \sum_{j=1}^{P} C_j Y_j(\theta, \varphi)$. Задача минимизации методом наименьших квадратов эквивалентна решению переопреде-

ленной системы

$$MC = f, \quad M_{ij} = Y_j(\theta_i, \varphi_i), \tag{13}$$

где M — матрица размера $N \times P$ с компонентами M_{ij} ; C и f — векторы размера $P \times 1$ и $N \times 1$ с компонентами C_j и f_i соответственно. Решение переопределенной СЛАУ (13) можно записать в виде

$$\boldsymbol{C} = M'\boldsymbol{f}, \quad M' = \left(M^{\mathrm{T}}M\right)^{-1}M^{\mathrm{T}},\tag{14}$$

где M' — псевдообратная матрица. Значения сглаженной функции в *i*-й точке θ_i и ϕ_i , организованные в вектор \hat{f} размера $N \times 1$, теперь можно найти из уравнения

$$\widehat{\boldsymbol{f}} = M\boldsymbol{C} = MM'\boldsymbol{f} = F\boldsymbol{f},\tag{15}$$

где F — сферический фильтр размера $N \times N$ и порядка p_f , так как размер базиса может быть выбран произвольно. Таким образом, из (14) и (15) мы имеем $F = M(M^{T}M)^{-1}M^{T}$. Матрицу F можно вычислить один раз (компоненты M заданы в (13)) и использовать для сглаживания формы пузырьков и поверхностных функций в любой момент времени.



Рис. 1. Поверхности высокого порядка, $p_N = 10$ с различным пропускным спектром $p_f = 10, 7, 5, 2$

5.4. Тестирование сферического фильтра. Реализован модуль расчета матрицы сферического фильтра порядка p_f . Тестовые расчеты сглаживания поверхностей различного спектра показали хоропие результаты. На рис. 1 представлены поверхности, полученные из поверхности с числом $p_N = 10$ усечения ряда (12), $n = 0, \ldots, p_N - 1$, после применения сферического фильтра порядка p_f . Из рисунка видно, что сферический фильтр очищает поверхность от возникающих шумов, связанных с численными опшобками, соответствующих $n = p_f, \ldots, p_N - 1$, и может применяться для стабилизации сетки при моделировании динамики пузырьков.

6. Гетерогенный быстрый метод мультиполей в МГЭ. При решении СЛАУ (5) в случае небольшого числа расчетных узлов применяются стандартные прямые методы, но при увеличении дискретизации сетки их использование затрудняется. Это связано с тем, что размер необходимой памяти пропорционален квадрату числа узлов сетки. Кроме того, при увеличении масштаба задачи возрастает время вычислений, что делает невозможным расчеты для систем размера более 5000 × 5000 на обычных персональных компьютерах. Поэтому для ускорения расчетов и увеличения масштаба задачи применяется многоуровневый FMM, реализованный на гетерогенных вычислительных системах.

6.1. Основные идеи быстрого метода мультиполей. Произведение матрицы с элементами K_{ij} на вектор с компонентами q_i представляет собой вычисление сумм вида [45]

$$\phi_j = \phi(\boldsymbol{y}_j) = \sum_{i=j}^{N_{\boldsymbol{x}}} q_i K(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{x}_i), \quad j = 1, \dots, N_{\boldsymbol{y}},$$
(16)

где x_i и y_j — источники и приемники соответственно, представляющие собой точки в d-мерном пространстве; N_x и N_y — количество источников и приемников соответственно, q_i — интенсивность источников; K — заданная функция, называемая ядром. В дальнейшем будем рассматривать ядра, зависящие от y - x. В общем случае вычисление суммы (16) требует $O(N_x N_y)$ операций, применение FMM позволяет сократить вычислительную сложность до $O(N_x)$ за счет построения разложений для различных областей пространства, в которых обеспечивается сходимость, трансляций этих разложений и иерархической структуры данных.

Для каждой рассматриваемой области пространства с центром в точке x^* строится мультипольное M- или S-разложение, которое справедливо в бесконечной области, удаленной от центра разложения:

$$K(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{p^2} C_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_*) S_n(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_*) + \varepsilon_p, \quad |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_*| > \beta |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_*|, \quad \beta > 1,$$
(17)

и локальное L- или R-разложение, которое справедливо в конечной области вблизи центра:

$$K(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{p^2} D_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_*) R_n(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_*) + \varepsilon_p, \quad |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_*| < \beta |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_*|, \quad \beta < 1.$$
(18)

Здесь C_n и D_n — коэффициенты разложения; S_n и R_n — базисные функции, которые выбираются из соображений удобства и быстроты сходимости рядов. В разложениях (17) и (18) рассматриваются только первые p^2 членов разложения, где p — параметр усечения, который определяет точность разложения и самого метода FMM.

Трансляция разложений используется для перехода от представления функции в одной области Ω с центром \boldsymbol{x}^* к представлению функции в другой области Ω' с центром $\boldsymbol{x}^{*\prime}$. Применяя оператор трансляции $T(\boldsymbol{x}^{*\prime}-\boldsymbol{x}^*)$ к коэффициентам известного разложения в области Ω , можно получить коэффициенты искомого разложения в области Ω' . В методе FMM различают три типа операторов трансляции: M2M, M2L и L2L, где первая буква означает тип начального разложения, а вторая — тип конечного разложения.

Иерархический алгоритм основан на разбиении трехмерного пространства с помощью восьмеричного дерева. Начальный куб уровня 0 разбивается на 8 дочерних кубов, которым присваивается уровень 1. Процесс восьмеричного деления продолжается до некоторого уровня l_{\max} , определяемого из соображений оптимизации.

Таким образом, метод FMM используется при вычислении МВП для матриц специального вида, элементы которых находятся через ядра. В основе FMM лежит иерархическая структура данных, а также математическая теория разложения и трансляции функций. Детальное описание FMM можно найти в публикациях [45, 46].

6.2. Применение гетерогенного быстрого метода мультиполей к МГЭ. Метод FMM в (2)–(4) используется для расчета произведений ядра Лапласа $G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (монополь) на нормальную производную потенциала скорости $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ и нормальной производной ядра Лапласа $\frac{\partial G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{\partial n(\boldsymbol{x})} = \nabla_{\boldsymbol{x}} G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}$ (диполь с моментом \boldsymbol{n}) на потенциал скорости ϕ . Тогда потенциал v суммарного ядра можно представить как сумму монополей с интенсивностью $f = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ и диполей с интенсивностью $g = \phi$ и моментом \boldsymbol{n} : $v = f \frac{1}{r} + g \frac{(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r})}{r^3}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}, \ r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$.

Следовательно, вычисление интегралов в (3) сводится к суммированию монополей и диполей уравнения Лапласа. Когда необходимо вычислить первый интеграл в (3), интенсивность $f = \frac{\partial \phi}{\partial n}$, в то время как g = 0. Когда необходимо вычислить второй интеграл в (3), интенсивность f = 0, в то время как $g = \phi$. На основе этой декомпозиции для решения уравнения Лапласа используются уже готовые компоненты FMM для трехмерного уравнения Лапласа [34].

Для ускорения расчетов в данной работе используются графические процессоры. Реализация FMM на GPU была предложена в статье [34]. Подробный анализ алгоритма [35] показал, что более эффективно он может быть реализован на гетерогенных вычислительных архитектурах, состоящих из многоядерных центральных процессоров (CPU) и графических процессоров. Особенность FMM состоит в следующей декомпозиции расчетной матрицы A в СЛАУ (5): $A = A_{\text{sparse}} + A_{\text{dense}}$, где $A_{\text{sparse}} -$ разреженная матрица, учитывающая ближнее взаимодействие источников и приемников, а $A_{\text{dense}} -$ плотная матрица, учитывающая их дальнее взаимодействие. Матрично-векторное произведение $A_{\text{sparse}}x$ вычисляется непосредственно, а произведение $A_{\text{dense}}x$ вычисляется через оценку разложений и операторов трансляций. В [34] показано, что в связи с особенностями архитектуры графических процессоров произведение $A_{\text{sparse}}x$ может быть реализовано достаточно эффективно на GPU с ускорением до 100 раз в сравнении с одним

ядром CPU, в то же время реализация $A_{\text{dense}} \boldsymbol{x}$ наиболее эффективна на CPU с использованием OpenMP. Возможность рассчитывать на GPU взаимодействие большого числа частиц позволяет снижать глубину иерархического дерева структуры данных, что обеспечивает дополнительное ускорение алгоритма.

Особенности реализации модуля для вычисления произведения разреженной матрицы $A_{\text{sparse}} \boldsymbol{x}$ на GPU с использованием технологии CUDA приведены в работе [40].

Подобный подход к распараллеливанию алгоритма FMM был предложен и протестирован в [35]. В этой работе структура данных формировалась на GPU с помощью алгоритма, который, несмотря на ускорение, существенно ограничен размером глобальной памяти GPU. В настоящей работе структура данных вычисляется на CPU, так как она рассчитывается всего один раз для приблизительно 30 вызовов FMM. Таким образом, формирование структуры данных на CPU не приводит к существенному увеличению общего времени счета.



Рис. 2. Относительная погрешность (ε) FMM для суммы монополей и диполей при различных значениях параметра p



Рис. 3. Время выполнения одного МВП для суммы монополей и диполей, реализованных прямым методом счета на СРU, на GPU и на CPU+GPU с помощью FMM

Ν	p	l_{\max}	Формирование структуры данных, с	Время вычисления $A_{ m dense} oldsymbol{x}, { m c}$	Время вычисления $A_{ m sparse} {m x},$ с
$\begin{array}{c} 8 \ 192 \\ 32 \ 768 \\ 131 \ 072 \\ 524 \ 288 \\ 1 \ 048 \ 576 \end{array}$	$\begin{array}{c}4\\4\\4\\4\\4\\4\end{array}$	$ \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{array} $	$\begin{array}{c} 0.0194 \\ 0.0292 \\ 0.0998 \\ 0.3805 \\ 0.7298 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.1271 \\ 0.1177 \\ 0.1173 \\ 1.3134 \\ 1.2695 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.0291 \\ 0.0645 \\ 0.2720 \\ 0.808 \\ 2.2854 \end{array}$
$8 192 \\32 768 \\131 072 \\524 288 \\1 048 576$	8 8 8 8	$ \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{array} $	$\begin{array}{c} 0.0166 \\ 0.0279 \\ 0.0847 \\ 0.3207 \\ 0.6984 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.5923 \\ 0.4905 \\ 0.4341 \\ 0.5520 \\ 3.2242 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.0301 \\ 0.0621 \\ 0.265 \\ 2.5321 \\ 2.2732 \end{array}$
8 192 32 768 131 072 524 288 1 048 576	12 12 12 12 12 12	$\begin{array}{c}3\\3\\3\\3\\4\end{array}$	$\begin{array}{c} 0.0176 \\ 0.0308 \\ 0.099 \\ 0.3363 \\ 0.7145 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.3515\\ 0.3732\\ 0.4663\\ 1.8475\\ 3.7919\end{array}$	$\begin{array}{c} 0.0283\\ 0.0625\\ 0.2722\\ 2.4753\\ 2.2791 \end{array}$

Таблица 1 Время одного вызова FMM для суммы монополей и диполей при различных значениях параметра p

6.3. Тестирование модуля гетерогенного FMM. Все программные модули, кроме FMM, разработаны в среде Matlab. Расчеты проводились на персональном компьютере, оснащенном CPU Intel Xeon 5660, 2.8GHz, 12 GB RAM с 12 физическими и 12 виртуальными ядрами, и GPU NVIDIA Tesla K20 (Kepler), 5GB глобальной памяти. Все результаты представлены для операций с двойной точностью.

На рис. 2 показаны графики зависимости относительной погрешности FMM от размера задачи при различных значениях параметра p. Из рисунка видно, что точность расчетов зависит от количества членов p^2 в разложениях (17), (18). Известно, что не только точность, но и скорость выполнения FMM сильно зависят от p, что видно из табл. 1. Чем больше p, тем больше времени требуется на выполнение алгоритма. Значительное изменение времени при увеличении p происходит за счет возрастания времени вычисления произведения плотной матрицы дальних взаимодействий. Для последующих расчетов динамики пузырьков выбирался параметр p = 12, при котором достигался баланс между получаемой точностью алгоритма и временем его выполнения. Таким образом, точность используемого FMM составила порядка 10^{-6} . На общую погрешность численного метода влияют также погрешности вычисления геометрических характеристик, сингулярных частей интегралов, точности итеративного решателя и схемы интегрирования по времени.

Кроме того, большое значение имеет выбор максимального уровня разбиения иерархического дерева. Как видно из табл. 1, для достижения оптимальных результатов необходимо для каждого размера задачи подбирать свой уровень разбиения. От глубины дерева зависит, какая часть вычислительной нагрузки будет распределена на CPU, а какая на GPU. Чем меньше уровень $l_{\rm max}$, тем больше вычислений выполняется на GPU и тем меньше рассчитывается на CPU.

Графики зависимости времени выполнения одного МВП для суммы монополей и диполей, реализованного на различных архитектурах прямым методом и FMM, от размера исследуемой задачи представлены на рис. 3. Можно видеть, что сложность МВП, реализованного прямым методом на CPU или GPU, квадратичная, а с использованием гетерогенного FMM —линейная. Точное время выполнения МВП для различных размеров матриц представлено в табл. 2. Рассчитано полученное ускорение модулей, реализованных на GPU прямым методом с применением технологии CUDA (при замерах времени учитывалась пересылка данных) и с применением гетерогенного FMM (без учета формирования структуры данных), по сравнению с модулем, реализованным на CPU прямым методом.

Анализ табл. 1 и 2 и рис. 3 показывает, что применение FMM к задачам размера $N < 60\,000$ приводит к сравнительно небольшому ускорению по сравнению с прямым методом расчета МВП на GPU. Поэтому в данной работе для проведения тестовых расчетов для задач небольшого размера использовался МГЭ с модулем расчета МВП на GPU, а для задач большого размера — МГЭ с гетерогенным FMM.

7. Численные результаты. Расчеты проводились при параметрах жидкости $\rho = 1000 \text{ kr/m}^3$; акустического поля $p_0 = 10^5 \text{ Па}, \varphi = \pi, \omega/2\pi = 200 \text{ к}\Gamma$ ц, T = 5 мкс; пузырька $\gamma = 0.073 \text{ Па/м}, \kappa = 1.4$, $a = 10 \div 15 \text{ мкм}$. Все результаты представлены в безразмерных координатах $x' = x/a_m, y' = y/a_m, z' = z/a_m$, где $a_m = 10 \text{ мкм}$.

7.1. Динамика одиночного пузырька. Простой тестовый пример реализован для исследования динамики одиночного сферического пузырька в потенциальном течении. Уравнение, описывающее изменение радиуса пузырька, можно получить из обобщенного уравнения Рэлея–Плессета [11], в котором пренебрегается вязкостью:

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \left[p_{g0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - p_{\infty}(t) - \frac{2\gamma}{a}\right], \quad a(0) = a_0, \quad \dot{a}(0) = 0.$$
(19)

На рис. 4 представлено сравнение численных расчетов динамики радиуса одиночного сферического пузырька ($a_0 = 10$ мкм) в акустическом поле амплитуды $P_a = p_0$ с использованием МГЭ при различной дискретизации поверхности пузырька N и решения задачи Коши (19) с высокой точностью, которое в дальнейшем будем называть точным решением. Как видно из сопоставления для t < 2T, МГЭ дает решение с хорошей точностью, которая увеличивается при увеличении узлов N. При t > 2T для небольших значений N точная и численная кривая расходятся значительно. Это объясняется тем, что со временем объемные моды переходят в поверхностные, т.е. пузырек слегка теряет свою сферическую форму. Для пузырька с лучшей граничной дискретизацией $N > 10\,000$ этот переход произойдет значительно позже, поскольку первоначальная форма такого пузырька наиболее близка к сферической. Дискретизации поверхности пузырька для различных N представлены на рис. 5. На рис. 6 представлены формы пузырька для $N = 10\,245$ в различные моменты времени.

7.2. Взаимодействие двух пузырьков. Исследовалось взаимодействие двух пузырьков, расположенных на различном расстоянии d друг от друга. Когда $d \ge 12a_0$ и $P_a \le p_0$, пузырьки взаимодействуют,

N	$l_{\rm max}$	Метод	Время	Ускорение
			вычисления, с	
		прямое МВП на СРU	0.5582	1
8 192	3	прямое МВП на GPU	0.0307	18.18
		FMM на CPU+GPU	0.4266	1.31
16384	3	прямое МВП на СРU	1.8252	1
		прямое МВП на GPU	0.0704	25.93
		FMM на CPU+GPU	0.4304	4.24
32 768	3	прямое МВП на СРИ	5.1118	1
		прямое МВП на GPU	0.1993	25.65
		FMM на CPU+GPU	0.4774	10.71
65 536	3	прямое МВП на СРИ	22.0225	1
		прямое МВП на GPU	0.7338	30.01
		FMM на CPU+GPU	0.5522	39.88
131 072	3	прямое МВП на СРИ	46.8520	1
		прямое МВП на GPU	2.6832	17.46
		FMM на CPU+GPU	0.6903	67.87
262 144	3	прямое МВП на СРИ	341.84	1
		прямое МВП на GPU	11.0196	31.02
		FMM на CPU+GPU	1.3548	252.32
524 288	3	прямое МВП на СРU	927.83	1
		прямое МВП на GPU	43.364	21.4
		FMM на CPU+GPU	3.4287	270.6
1 048 576	4	прямое МВП на СРИ	3931.9	1
		прямое МВП на GPU	162.25	24.23
		FMM на CPU+GPU	6.3113	623

Таблица 2 Время выполнения прямого МВП на СРU и GPU и МВП с применением FMM (гетерогенный CPU+GPU алгоритм) для суммы монополей и диполей, p=12

сохраняя свою сферическую форму. Динамика двух сферических пузырьков одинакового радиуса описывается уравнением Рэлея–Плессета с учетом вторичных сил Бьеркнеса, которые возникают в результате влияния пузырьков друг на друга [47]. Предполагается, что изменение расстояния между центрами пузырьков d незначительно:

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \left[p_{g0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - p_{\infty}(t) - \frac{2\gamma}{a}\right] - \frac{1}{d}\left[2\dot{a}^2a + a^2\ddot{a}\right], \quad a(0) = a_0, \quad \dot{a}(0) = 0.$$
(20)

На рис. 7 представлены результаты сравнения численных расчетов изменения радиуса для динамики двух одинаковых пузырьков ($a_0 = 10$ мкм) в акустическом поле амплитуды $P_a = p_0$, полученных МГЭ, с решением задачи Коши (19) для динамики одиночного сферического пузырька и решением задачи Коши (20) для динамики двух сферических пузырьков, расположенных на значительном расстоянии друг от друга. Как видно из сопоставления, численные результаты для динамики двух пузырьков хорошо согласуются с решением, полученным с учетом вторичных сил Бьеркнеса. Таким образом, модель и



Рис. 4. Сравнение численных расчетов (ВЕМ) для $N=642,\,2562,\,10\,245$ с решением задач Коши (19) (exact)



Рис. 7. Сравнение численных расчетов (BEM) с решением задач Коши (19) (exact, one bubble) и (20) (exact, two bubbles), $N = 1284, d = 12a_0$



Рис. 9. Формы двух взаимодействующих пузырьков в акустическом поле в трехмерном случае, t=0.8T, $N=1284, d=4a_0, P_a=0.5p_0$



Рис. 6. Динамика одиночного пузырька в акустическом поле, $N=10\,245$



Рис. 8. Формы двух взаимодействующих пузырьков в акустическом поле в плоскости 0X'Z', $N=1284, d=4a_0, P_a=0.5p_0$



Рис. 10. Динамика центров пузырьков, $N=1284,\, d=4a_0,\, P_a=0.5p_0$

используемый метод учитывают влияние взаимодействия пузырьков на изменение их объемов.

При уменьшении расстояния между пузырьками в результате взаимодействия пузырьки теряют свою сферическую форму (рис. 8, 9, 11, 12). На рис. 10 представлена динамика центров левого (left bubble) и правого (right bubble) пузырьков для амплитуды акустического поля $P_a = 0.5p_0$. Из рисунков видно, что при уменьшении давления акустического поля пузырьки расширяются, отталкиваются и деформируются под действием друг друга. При увеличении давления акустического поля их объемы уменьшаются и они начинают притягиваться друг к другу. При небольшой амплитуде акустического поля $P_a = 0.5p_0$ и расстоянии $d = 4a_0$ за один период колебаний формирование кумулятивной струи не наблюдается (рис. 8, 9). Однако при увеличении давления до $P_a = 0.7p_0$ можно видеть образование струи (рис. 11, 12). Струя формируется в фазе сжатия пузырька и продолжает расти при его расширении.



Рис. 11. Формы двух взаимодействующих пузырьков в акустическом поле в плоскости $0X'Z', N = 1284, d = 4a_0, P_a = 0.7p_0$



Рис. 13. Формы трех взаимодействующих пузырьков одинакового радиуса в акустическом поле в плоскости 0X'Z', N = 1926, $d = 5a_0$, $P_a = 0.7p_0$



Рис. 12. Формы двух взаимодействующих пузырьков в акустическом поле в трехмерном случае, t = T, N = 1284, $d = 4a_0$, $P_a = 0.7p_0$



Рис. 14. Формы трех взаимодействующих пузырьков одинакового радиуса в акустическом поле в трехмерном случае, t = T, N = 1926, $d = 5a_0$, $P_a = 0.7p_0$

7.3. Взаимодействие трех пузырьков. На рис. 13–16 представлены результаты исследования взаимодействия трех пузырьков при амплитуде акустического поля $P_a = 0.7p_0$. В случае трех пузырьков

одинакового радиуса ($a_0 = 10$ мкм) два крайних пузырька, расположенных на расстоянии $d = 5a_0$ от центрального, отталкиваются при расширении и притягиваются при сжатии. При дальнейшем расширении наблюдается образование струи, направленной в сторону центрального пузырька, который приобретает эллипсоидальную форму (рис. 13, 14).

Динамика трех пузырьков с радиусом двух крайних пузырьков вдвое больше радиуса центрального $(2a_0, a_0 = 10 \text{ мкm})$, расположенных на расстоянии $d = 6a_0$ от него, представлена на рис. 15, 16. В этом примере большие пузырьки оказывают сильное воздействие на центральный пузырек. В фазе отталкивания пузырек расширяется вдоль оси, перпендикулярной линии взаимодействия, в фазе притяжения — вдоль линии взаимодействия. За один период колебаний образования кумулятивных струй в крайних пузырьках не наблюдается. Полученные результаты хорошо согласуются с численными расчетами, представленными в работе [24].



Рис. 15. Формы трех взаимодействующих пузырьков различного радиуса в акустическом поле в плоскости 0X'Z', N = 1926, $d = 6a_0$, $P_a = 0.7p_0$



Рис. 16. Формы трех взаимодействующих пузырьков различного радиуса в акустическом поле в трехмерном случае, t = T, N = 1926, $d = 6a_0$, $P_a = 0.7p_0$



Рис. 17. Динамика пузырькового кластера в акустическом поле, $M = 56, N_{\Delta} = 642$



Рис. 18. Фрагмент расчетной области $(0;10)^3$ при t=T, представленной на рис. 17; $M=56,~N_{\Delta}=642$

7.4. Динамика пузырькового кластера. На рис. 17 представлена динамика пузырькового кластера, содержащего M = 56 одинаковых пузырьков ($a_0 = 10$ мкм) в акустическом поле амплитуды $P_a = p_0$. Из рисунка видно, что пузырьки отталкиваются и притягиваются к друг другу. В момент времени t = T объем центральных пузырьков кластера в два раза больше, чем объем крайних пузырьков, в которых наблюдается формирование кумулятивных струй (рис. 18). Изменение объема рассматриваемого пузырькового кластера представлено на рис. 19. Можно видеть, что динамика пузырькового кластера значительно отличается от динамики одиночного пузырька (рис. 4). Общее количество расчетных узлов в данном примере составило $N = MN_{\Delta} = 35952$, один временной шаг занимает 16 секунд, куда входит около 30 вызовов FMM, вычисление всех геометрических характеристик пузырьков, применение сферического фильтра для сглаживания поверхности и вычисление тангенциальной составляющей скорости.



Рис. 21. Фрагмент расчетной области $(-7;7)^3,$ представленной на рис. 20; M=9240, $N_{\Delta}=162$

Рис. 22. Динамика объема пузырькового кластера, $M=9240,\, N_{\Delta}=162$

Исследовалась динамика пузырькового кластера, содержащего M = 9240 пузырьков, с начальным гауссовым распределением пузырьков по радиусам и по пространству (рис. 20). На рис. 21 изображен фрагмент расчетной области $(-7;7)^3$ начального распределения пузырьков, представленной на рис. 20. Поверхность каждого пузырька дискретизировалась сеткой с $N_{\Delta} = 162$ вершинами. Таким образом, общее количество расчетных узлов составило $N = M \cdot N_{\Delta} = 1496\,880$, что совпадает с количеством неизвестных в СЛАУ. Исследовалась динамика пузырьков в акустическом поле амплитуды $P_a = 0.5p_0$. Изменение объема каждого пузырька и пузырькового кластера в целом (рис. 22) незначительное, что связано с небольшой

амплитудой акустического поля и влиянием пузырьков различного радиуса друг на друга. Общее время счета рассмотренного процесса для 500 шагов по времени составляет около четырех дней, один вызов FMM занимает 6 секунд, один временной шаг занимает около 11 минут.

8. Заключение. Разработан и реализован эффективный подход для расчета динамики одиночного пузырька, двух и трех взаимодействующих пузырьков с высокой степенью дискретизации поверхности, а также пузырькового кластера с большим количеством пузырьков. Предложенный подход основан на методе граничных элементов для трехмерных задач, ускорение которого произведено за счет расчета МВП на GPU или с применением высокоэффективного масштабируемого алгоритма FMM, реализованного на гетерогенных вычислительных системах, в зависимости от количества расчетных узлов. Для стабилизации сетки разработан и реализован сферический фильтр, позволяющий рассчитывать несколько периодов колебаний сильно коллапсирующего пузырька.

Сравнение полученных численных расчетов методом граничных элементов с точным решением для одного и двух сферических пузырьков показало хорошие результаты. Представлены результаты сильного взаимодействия двух и трех пузырьков, рассмотрена динамика пузырькового кластера.

Результаты расчетов показали, что реализованный подход достаточно хорошо описывает динамику пузырьков с высокой степенью дискретизации поверхности в трехмерных потенциальных течениях и может быть использован для исследования многих эффектов в пузырьковых жидкостях в макромасштабах.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (грант № 11.G34.31.0040), Christian Doppler Research Association (Austria) и Göttingen University (Germany). Часть программного обеспечения, использованного при разработке основного кода, описанного в настоящей статье, любезно предоставлена компанией Fantalgo, LLC (Maryland, USA).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Knapp R.T., Daily J.W., Hammitt F.G. Cavitation. New York: McGraw-Hill, 1970.
- 2. Brennen C.E. Cavitation and bubble dynamics. Oxford: Oxford Univ. Press, 2013.
- Xi X., Cegla F., Mettin R., Holsteyns F., Lippert A. Collective bubble dynamics near a surface in a weak acoustic standing wave field // J. Acoust. Soc. Am. 2012. 132, N 1. 37–47.
- 4. Gumerov N.A., Akhatov I.Sh. Numerical simulation of 3D self-organization of bubbles in acoustic fields // Proc. of the 8th International Symposium on Cavitation. Singapore: National Univ. of Singapore, 2012. Article No. 189.
- Gumerov N.A., Ohl C.-D., Akhatov I.S., Sametov S., Khasimullin M. Waves of acoustically induced transparency in bubbly liquids: theory and experiment // J. Acoust. Soc. Am. 2013. 133, N 5. 3277–3286.
- Lauterborn W., Kurz T., Akhatov I. Nonlinear acoustics in fluids // Springer Handbook of Acoustics. New York: Springer, 2007. 257–297.
- Nasibullaeva E.S., Akhatov I.S. Bubble cluster dynamics in an acoustic field // J. Acoust. Soc. Am. 2013. 133, N 6. 3727–3738.
- Konovalova S.I., Akhatov I.S. Structure formation in acoustic cavitation // Multiphase Science and Technology. 2005. 17, N 4. 343–371.
- Parlitz U., Mettin R., Luther S., Akhatov I., Voss M., Lauterborn W. Spatio-temporal dynamics of acoustic cavitation bubble clouds // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1999. 357. 313–334.
- Akhatov I., Parlitz U., Lauterborn W. Towards a theory of self-organization phenomena in bubble-liquid mixtures // Phys. Rev. E. 1996. 54. 4990–5003.
- 11. Plesset M.S., Prosperetti A. Bubble dynamics and cavitation // Ann. Rev. Fluid Mech. 1977. N 9. 145–185.
- Akhatov I., Gumerov N., Ohl C.-D., Parlitz U., Lauterborn W. The role of surface tension in stable single-bubble sonoluminescence // Phys. Rev. Lett. 1997. 78, N 2. 227–230.
- 13. Pozrikidis C. Expansion of a compressible gas bubble in Stokes flow // J. Fluid Mech. 2001. 442. 171–189.
- 14. *Pozrikidis C.* Computation of the pressure inside bubbles and pores in Stokes flow // J. Fluid Mech. 2003. 474. 319–337.
- 15. Blake J.R., Gibson D.C. Cavitation bubbles near boundaries // Ann. Rev. Fluid Mech. 1987. 19. 99–123.
- Best J.P., Kucera A. A numerical investigation of non-spherical rebounding bubbles // J. Fluid Mech. 1992. 245. 137–154.
- Sangani A.S., Didwania A.K. Dynamic simulations of flows of bubbly liquids at large Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 1993. 250. 307–337.
- Lucca G., Prosperetti A. A numerical method for the dynamics of non-spherical cavitation bubbles // Proc. 2nd Int. Colloq. on Drops and Bubbles. Monterey: Jet Propulsion Lab., 1982. 175–181.
- Chahine G.L., Duraiswami R. Dynamical interactions in a multi-bubble cloud // J. Fluids Eng. 1992. 114, N 4. 680–686.
- Chahine G.L. Strong interactions bubble/bubble and bubble/flow // Bubble Dynamics and Interface Phenomena. Dordrecht: Kluwer, 1994. 195–206.
- 21. Oguz H.N., Prosperetti A. Dynamics of bubble growth and detachment from a needle // J. Fluid Mech. 1993. 257.

111 - 145.

- 22. Zhang Y.L., Yeo K.S., Khoo B.C., Wang C. 3D jet impact and toroidal bubbles // J. Comput. Phys. 2001. 166, N 2. 336–360.
- 23. Воинов О.В., Петров А.Г. Движение пузырей в жидкости // Гидромеханика. Т. 10. М.: ВИНИТИ, 1976. 86–147.
- 24. Bui T.T., Ong E.T., Khoo B.C., Klaseboer E., Hung K.C. A fast algorithm for modeling multiple bubbles dynamics // J. Comp. Physics. 2006. 216, N 2. 430–453.
- 25. Prosperetti A., Tryggvason G. Computational methods for multiphase flow // New York: Cambridge Univ. Press, 2007.
- Magnaudet J., Eames I. The motion of high-Reynolds-number bubbles in inhomogeneous flows // Ann. Rev. Fluid Mech. 2000. 32. 659–708.
- 27. Zhang S., Duncan J.H., Chahine G.L. The final stage of the collapse of cavitation bubble near a rigid wall // J. Fluid Mech. 1993. 257. 147–181.
- 28. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Berlin: Springer, 1984.
- Itkulova Yu.A., Abramova O.A., Gumerov N.A. Boundary element simulations of compressible bubble dynamics in Stokes flow // Proc. of ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. San Diego, 2013. Article No. 63284.
- 30. Greengard L., Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations // J. Comput. Phys. 1987. 73, N 2. 325–348.
- 31. *Gumerov N.A., Duraiswami R.* Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions. Oxford: Elsevier, 2005.
- 32. Gumerov N.A., Duraiswami R. Comparison of the efficiency of translation operators used in the fast multipole method for the 3D Laplace equation. Technical Report CS-TR-4701. College Park: Univ. of Maryland, 2005.
- 33. Gumerov N.A., Duraiswami R. FMM accelerated BEM for 3D Laplace & Helmholtz equations // Proc. of the Int. Conf. on Boundary Element Techniques VII. Paris, 2006. 79–84.
- 34. Gumerov N.A., Duraiswami R. Fast multipole methods on graphics processors // J. Comput. Phys. 2008. 227, N 18. 8290–8313.
- 35. Hu Q., Gumerov N.A., Duraiswami R. Scalable fast multipole methods on distributed heterogeneous architectures // Proc. 2011 Int. Conf. for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis. Article N 36. New York: ACM Press, 2011.
- 36. Hu Q., Gumerov N.A., Duraiswami R. Scalable distributed fast multipole methods // Proc. 14th International Conference on High Performance Computing and Communications. New York: IEEE Press, 2012. 270–279.
- 37. Марьин Д.Ф, Малышев В.Л., Моисеева Е.Ф., Гумеров Н.А., Ахатов И.Ш., Михайленко К.И. Ускорение молекулярно-динамических расчетов с помощью быстрого метода мультиполей и графических процессоров // Вычислительные методы и программирование. 2013. 14. 483–495.
- 38. Солнышкина О.А., Иткулова Ю.А., Гумеров Н.А. Ускорение расчетов на графических процессорах при исследовании течения Стокса методом граничных элементов // Вестник Уфимского гос. авиационного техн. ун-та. 2013. 17, № 2. 92–100.
- 39. Itkulova Yu.A., Solnyshkina O.A., Gumerov N.A. Toward large scale simulations of emulsion flows in microchannels using fast multipole and graphics processor accelerated boundary element method // Proc. of ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Vol. 7. Houston, 2012. Article No. 86238, pp. 873–881.
- 40. Абрамова О.А, Иткулова Ю.А., Гумеров Н.А., Ахатов И.Ш. Трехмерное моделирование динамики деформируемых капель эмульсии методом граничных элементов и быстрым методом мультиполей на гетерогенных вычислительных системах // Вычислительные методы и программирование. 2013. 14. 438–450.
- 41. Abramova O.A., Itkulova Yu.A., Gumerov N.A. FMM/GPU accelerated BEM simulations of emulsion flow in microchannels // Proc. of ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. San Diego, 2013. Article No. 63193. 8 pp.
- Zinchenko A.Z., Rother M.A., Davis R.H. A novel boundary-integral algorithm for viscous interaction of deformable drops // Phys. Fluids. 1997. 9, N 6. 1493–1511.
- 43. *Абрамова О.А., Иткулова Ю.А., Гумеров Н.А.* Моделирование трехмерного движения деформируемых капель в стоксовом режиме методом граничных элементов // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. **6**, № 2. 214–223.
- 44. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. Philadelphia: SIAM, 2000.
- 45. Гумеров Н.А. Быстрый метод мультиполей // Вестник АН Республики Башкортостан. 2013. 18, № 4. 11–24.
- 46. *Gumerov N.A., Duraiswami R., Borovikov E.A.* Data structures, optimal choice of parameters, and complexity results for generalized multilevel fast multipole method in *d* dimensions. Technical Report CS-TR-4458. College Park: Univ. of Maryland, 2003.
- Mettin R., Akhatov I., Parlitz U., Ohl C.-D., Lauterborn W. Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field // Phys. Rev. E. 1997. 56, N 3. 2924–2931.

Поступила в редакцию 25.03.2014

Simulation of Bubble Dynamics in Three-Dimensional Potential Flows on Heterogeneous Computing Systems Using the Fast Multipole and Boundary Element Methods

Yu. A. Itkulova¹, O. A. Abramova², N. A. Gumerov³, and I. Sh. Akhatov⁴

- ¹ Bashkir State University, Center for Micro- and Nanoscale Dynamics of Dispersed Systems; ulitsa Zaki Validi 32, Ufa, 450076, Russia; Trainee Researcher, e-mail: Itkulova.Yulia@bashedu.ru
- ² Bashkir State University, Center for Micro- and Nanoscale Dynamics of Dispersed Systems; ulitsa Zaki Validi 32, Ufa, 450076, Russia; Junior Scientist, e-mail: abramovacmndds@gmail.com
- ³ University of Maryland, Institute of Advanced Computer Studies; Room 3305, A. V. Williams Building, College Park, USA, MD 20742; Professor, e-mail: gumerov@umiacs.umd.edu
- ⁴ North Dakota State University, Department of Mechanical Engineering; NDSU Dept 2490, 210 Dolve Hall, P.O. Box 6050, Fargo, USA, ND 58108; Professor, e-mail: Iskander.Akhatov@ndsu.edu

Received March 25, 2014

Abstract: The bubble dynamics in potential flows of incompressible liquid is studied. The proposed approach is based on the boundary element method for the Laplace equation, which is especially efficient for the 3D bubble dynamics. In order to increase the problem size and to accelerate computations, an efficient numerical algorithm is developed and implemented. Depending on the problem size, for the acceleration of computations we used the direct matrix-vector multiplication on graphics processors (GPU) or the fast multipole method (FMM) implemented on heterogeneous computing systems (multicore CPUs and graphics processors). For the simulation of bubble surfaces, a new method based on the filtration of spherical harmonics is proposed. The proposed approach allows one to directly calculate the 3D dynamics of a single bubble, two and three interacting bubbles as well as a bubble cluster with a high degree of surface discretization. The developed method can be used to solve a wide range of problems related to the potential flow of bubble liquids.

Keywords: bubble dynamics, potential flow, boundary element method, fast multipole method, parallel computing, graphics processors.

References

1. R. T. Knapp, J. W. Daily, and F. G. Hammitt, *Cavitation* (McGraw-Hill, New York, 1970).

2. C. E. Brennen, Cavitation and Bubble Dynamics (Oxford Univ. Press, Oxford, 2013).

3. X. Xi, F. Cegla, R. Mettin, et al., "Collective Bubble Dynamics Near a Surface in a Weak Acoustic Standing Wave Field," J. Acoust. Soc. Am. **132** (1), 37–47 (2012).

4. N. A. Gumerov and I. Sh. Akhatov, "Numerical Simulation of 3D Self-Organization of Bubbles in Acoustic Fields," in *Proc. 8th Int. Symp. on Cavitation, Singapore, August 13–16, 2012* (Nat. Univ. of Singapore, Singapore, 2012), Article No. 189.

5. N. A. Gumerov, C.-D. Ohl, I. S. Akhatov, et al., "Waves of Acoustically Induced Transparency in Bubbly Liquids: Theory and Experiment," J. Acoust. Soc. Am. **133** (5), 3277–3286 (2013).

6. W. Lauterborn, T. Kurz, and I. Akhatov, "Nonlinear Acoustics in Fluids," in *Springer Handbook of Acoustics* (Springer, New York, 2007), pp. 257–297.

7. E. S. Nasibullaeva and I. S. Akhatov, "Bubble Cluster Dynamics in an Acoustic Field," J. Acoust. Soc. Am. **133** (6), 3727–3738 (2013).

8. S. I. Konovalova and I. S. Akhatov, "Structure Formation in Acoustic Cavitation," Multiphase Sci. Technol. **17** (4), 343–371 (2005).

9. U. Parlitz, R. Mettin, S. Luther, et al., "Spatio-Temporal Dynamics of Acoustic Cavitation Bubble Clouds," Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **357**, 313–334 (1999).

10. I. Akhatov, U. Parlitz, and W. Lauterborn, "Towards a Theory of Self-Organization Phenomena in Bubble-Liquid Mixtures," Phys. Rev. E 54, 4990–5003 (1996).

11. M. S. Plesset and A. Prosperetti, "Bubble Dynamics and Cavitation," Ann. Rev. Fluid Mech. 9, 145–185 (1977).

12. I. Akhatov, N. Gumerov, C.-D. Ohl, et al., "The Role of Surface Tension in Stable Single-Bubble Sonoluminescence," Phys. Rev. Lett. **78** (2), 227–230 (1997).

13. C. Pozrikidis, "Expansion of a Compressible Gas Bubble in Stokes Flow," J. Fluid Mech. **442**, 171–189 (2001).

14. C. Pozrikidis, "Computation of the Pressure Inside Bubbles and Pores in Stokes Flow," J. Fluid Mech. **474**, 319–337 (2003).

15. J. R. Blake and D. C. Gibson, "Cavitation Bubbles Near Boundaries," Ann. Rev. Fluid Mech. **19**, 99–123 (1987).

16. J. P. Best and A. Kucera, "A Numerical Investigation of Non-Spherical Rebounding Bubbles," J. Fluid Mech. **245**, 137–154 (1992).

17. A. S. Sangani and A. K. Didwania, "Dynamic Simulations of Flows of Bubbly Liquids at Large Reynolds Numbers," J. Fluid Mech. **250**, 307–337 (1993).

18. G. Lucca and A. Prosperetti, "A Numerical Method for the Dynamics of Non-Spherical Cavitation Bubbles," in *Proc. 2nd Int. Colloq. on Drops and Bubbles* (Jet Propulsion Lab., Monterey, 1982), pp. 175–181.

19. G. L. Chahine and R. Duraiswami, "Dynamical Interactions in a Multi-Bubble Cloud," J. Fluids Eng. 114 (4), 680–686 (1992).

20. G. L. Chahine, "Strong Interactions Bubble/Bubble and Bubble/Flow," in *Bubble Dynamics and Interface Phenomena* (Kluwer, Dordrecht, 1994), pp. 195–206.

21. H. N. Oguz and A. Prosperetti, "Dynamics of Bubble Growth and Detachment from a Needle," J. Fluid Mech. 257, 111–145 (1993).

22. Y. L. Zhang, K. S. Yeo, B. C. Khoo, and C. Wang, "3D Jet Impact and Toroidal Bubbles," J. Comput. Phys. 166 (2), 336–360 (2001).

23. O. V. Voinov and A. G. Petrov, "The Motion of Bubbles in a Liquid," in *Hydromechanics* (VINITI, Moscow, 1976), Itogi Nauki Tekh., Ser.: Fluid Mech. Vol. 10, pp. 86–147.

24. T. T. Bui, E. T. Ong, B. C. Khoo, et al., "A Fast Algorithm for Modeling Multiple Bubbles Dynamics," J. Comput. Phys. **216** (2), 430–453 (2006).

25. A. Prosperetti and G. Tryggvason, *Computational Methods for Multiphase Flow* (Cambridge Univ. Press, New York, 2007).

26. J. Magnaudet and I. Eames, "The Motion of High-Reynolds-Number Bubbles in Inhomogeneous Flows," Ann. Rev. Fluid Mech. **32**, 659–708 (2000).

27. S. Zhang, J. H. Duncan, and G. L. Chahine, "The Final Stage of the Collapse of Cavitation Bubble Near a Rigid Wall," J. Fluid Mech. **257**, 147–181 (1993).

28. C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, and L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering* (Springer, Berlin, 1984).

29. Yu. A. Itkulova, O. A. Abramova, and N. A. Gumerov, "Boundary Element Simulations of Compressible Bubble Dynamics in Stokes Flow," in *Proc. ASME 2013 Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition, San Diego* (ASME Press, New York, 2013), Article No. 63284.

30. L. Greengard and V. Rokhlin, "A Fast Algorithm for Particle Simulations," J. Comput. Phys. **73** (2), 325–348 (1987).

31. N. A. Gumerov and R. Duraiswami, *Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions* (Elsevier, Oxford, 2005).

32. N. A. Gumerov and R. Duraiswami, Comparison of the Efficiency of Translation Operators Used in the Fast Multipole Method for the 3D Laplace Equation, Tech. Rep. CS-TR-4701 (Univ. of Maryland, College Park, 2005).

33. N. A. Gumerov and R. Duraiswami, "FMM Accelerated BEM for 3D Laplace & Helmholtz Equations," in *Proc. Int. Conf. on Boundary Element Techniques VII* (École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2006), pp. 79–84.

34. N. A. Gumerov and R. Duraiswami, "Fast Multipole Methods on Graphics Processors," J. Comput. Phys. **227** (18), 8290–8313 (2008).

35. Q. Hu, N. A. Gumerov, and R. Duraiswami, "Scalable Fast Multipole Methods on Distributed Heterogeneous Architectures," in *Proc. 2011 Int. Conf. for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis* (ACM Press, New York, 2011), Article No. 36.

36. Q. Hu, N. A. Gumerov, and R. Duraiswami, "Scalable Distributed Fast Multipole Methods," in *Proc.* 14th Int. Conf. on High Performance Computing and Communications, Liverpool (IEEE Press, New York, 2012), pp. 270–279.

37. D. F. Marin, V. L. Malyshev, E. F. Moiseeva, et al., "Acceleration of Molecular Dynamics Simulations Using the Fast Multipole Method and Graphics Processing Units," Vychisl. Metody Programm. 14, 483–495 (2013).

38. O. A. Solnyshkina, Yu. A. Itkulova, and N. A. Gumerov, "Acceleration of the Calculations on the Graphics Processors for the Study of Stokes Flow by Boundary Element Method," Vestn. Ufimsk. Gos. Aviats. Tekh. Univ. **17** (2), 92–100 (2013).

39. Yu. A. Itkulova, O. A. Solnyshkina, and N. A. Gumerov, "Toward Large Scale Simulations of Emulsion Flows in Microchannels Using Fast Multipole and Graphics Processor Accelerated Boundary Element Method," in *Proc. ASME 2012 Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition, Houston* (ASME Press, New York, 2012), Vol. 7, pp. 873–881.

40. O. A. Abramova, Yu. A. Itkulova, N. A. Gumerov, and I. Sh. Akhatov, "Three-Dimensional Simulation of the Dynamics of Deformable Droplets of an Emulsion Using the Boundary Element Method and the Fast Multipole Method on Heterogeneous Computing Systems," Vychisl. Metody Programm. **14**, 438–450 (2013).

41. O. A. Abramova, Yu. A. Itkulova, and N. A. Gumerov, "FMM/GPU Accelerated BEM Simulations of Emulsion Flow in Microchannels," in *Proc. ASME 2013 Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition, San Diego* (ASME Press, New York, 2013), Article No. 63193.

42. A. Z. Zinchenko, M. A. Rother, and R. H. Davis, "A Novel Boundary-Integral Algorithm for Viscous Interaction of Deformable Drops," Phys. Fluids **9** (6), 1493–1511 (1997).

43. O. A. Abramova, Yu. A. Itkulova, and N. A. Gumerov, "Modeling of Three-Dimensional Motion of Deformable Droplets in Stokes Regime Using Boundary Element Method," Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred 6 (2), 214–223 (2013).

44. Y. Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems (SIAM, Philadelphia, 2000).

45. N. A. Gumerov, "Fast Multipole Method," Vestn. Akad. Nauk Resp. Bashkortostan 18 (4), 11–24 (2013).

46. N. A. Gumerov, R. Duraiswami, and E. A. Borovikov, *Data Structures, Optimal Choice of Parameters, and Complexity Results for Generalized Multilevel Fast Multipole Method in d Dimensions*, Tech. Rep. CS-TR-4458 (Univ. of Maryland, College Park, 2003).

47. R. Mettin, I. Akhatov, U. Parlitz, et al., "Bjerknes Forces between Small Cavitation Bubbles in a Strong Acoustic Field," Phys. Rev. E 56 (3), 2924–2931 (1997).